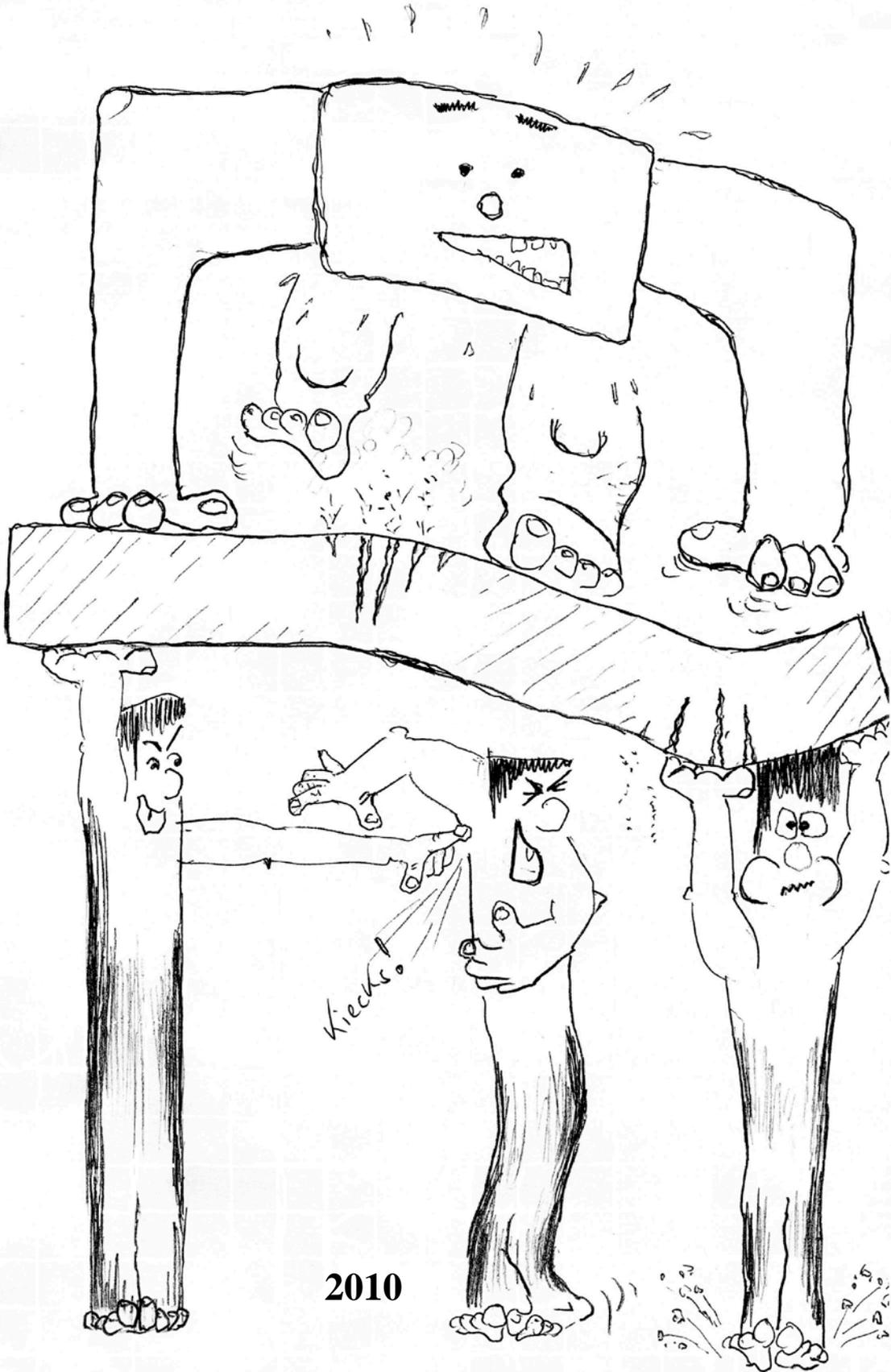


Berechnung von Pfahl-Plattengründungen mit dem Programm *ELPLA*

Baugrund-Bauwerk-Pfahl-Interaktionen 44.03/1. Saubk



Berechnung von Pfahl-Plattengründungen

Vorwort

Heute hat fast jedes Ingenieurbüro seine eigenen Computerprogramme zur Berechnung und zum Entwurf von Pfahl-Plattengründungen. Dazu sind die meisten verfügbaren Programme unter Windows benutzerfreundlich und bieten ausgezeichnete graphische Farbdarstellungen, so dass theoretisch eine Sekretärin, nicht nur ein Ingenieur, diese verwenden kann. Aber das Problem dabei ist, wie man die Daten kontrollieren und die Ergebnisse überprüfen kann.

Der Zweck dieses Buches ist, Methoden, Gleichungen, Verfahren und Techniken zu zeigen, die bei der Formulierung der Computerberechnung von Pfahl-Plattengründungen verwendet werden. Diese Sachgebiete sind im Programm *ELPLA* codiert.

Dieses Buch zeigt viele praktische Probleme, die mit Verwendung des Programms *ELPLA* berechnet werden können. Es ist wichtig, dass der Ingenieur mit diesen Informationen vertraut ist, wenn er Computerberechnungen von Pfahl-Plattengründungen durchführt. Ein Verständnis dieser Konzepte ist von großem Nutzen beim Ausführen der Computerberechnung, zur Lösung von Schwierigkeiten und zur Entscheidung der Annehmbarkeit der Ergebnisse. Drei bekannte Baugrundmodelle zur Berechnung von Pfahlplatten (Standardmodelle) werden berücksichtigt. Die Baugrundmodelle sind Einfaches Annahme-Modell (Spannungstrapezverfahren), Winkler-Modell (Bettungsmodulverfahren) und Kontinuummodell (Steifemodulverfahren). In der Berechnung werden die Platte als elastisch oder starr behandelt. In diesem Buch wird die Finite Element-Methode verwendet, um Platten zu berechnen. In der finiten Elementberechnung wird die Platte von Plattenelementen entsprechend der zweidimensionalen Natur des Fundaments dargestellt. Die Entwicklung der finiten Elementgleichungen für Plattenelemente ist in Standardlehrbüchern dokumentiert wie Schwarz (1984) und Zienkiewicz/Cheung (1970). Sie wird deshalb nicht in diesem Buch dupliziert.

Calculation of Deep Foundations

Preface

Today, nearly every engineering office has its own computer programs for the analysis and design of piled rafts. Furthermore, most of the available programs under Windows are user-friendly and give very excellent output graphics with colors. Consequently, theoretically a secretary not an engineer can use them. But the problem here is, how can man control the data and check the results.

The purpose of this book is to present methods, equations, procedures and techniques used in the formulation of the computer analysis of piled rafts. These items are coded in the program *ELPLA*.

This book contains many practical problems which are analyzed in details by using the program *ELPLA*. It is important for the engineer to be familiar with these information when carrying out computer analysis of piled rafts. An understanding of these concepts will be of great benefit in carrying out the computer analysis, resolving difficulties and judging the acceptability of the results. Three familiar types of subsoil models (standard models) for piled raft analyses are considered. The models are Simple Assumption Model, *Winkler's* Model and Continuum Model. In the analysis, rafts are treated as elastic or rigid. In this book the Finite Element-Method was used to analyze the raft. In which plate bending elements represent the raft according to the two-dimensional nature of foundation. The development of the finite element equations for plate elements is well documented in standard textbooks such as *Schwarz* (1984) and *Zienkiewicz/ Cheung* (1970). Therefore, it is not duplicated in this book.

Abschnitt 1

Modelle zur Berechnung von Pfahl-Plattengründung

Inhalt	Seite
1 Modelle zur Berechnung von Pfahl-Plattengründung.....	4
1.1 Einleitung.....	4
1.2 Beschreibung der numerischen Berechnungsverfahren.....	6
1.2.1 Spannungstrapezverfahren (Verfahren 1).....	8
1.2.2 Bettungsmodulverfahren (Verfahren 2 und 3).....	11
1.2.3 Steifemodulverfahren (Verfahren 4 bis 9).....	13
1.3 Numerisches Beispiel:	15
1.3.1 Testbeispiel: Überprüfung der Kräfte in den Pfählen einer Pfahlgruppe	15
1.4 Literatur.....	20

Abschnitt 1

1 Modelle zur Berechnung von Pfahl-Plattengründung

1.1 Einleitung

Die in diesem Abschnitt genannten und beschriebenen, in der grundbaulichen Berechnungspraxis gebräuchlichen Verfahren zur elektronischen Berechnung werden in der Reihenfolge der geschichtlichen Entwicklung erläutert.

Tiefgründungen sind Fundamente mit Pfählen von Bauwerken, die statisch durchgehend zwischen den Stützen verlaufen, so dass sie oft erhebliche Biegemomente und Querkräfte aufnehmen müssen. Sie kommen in der Baupraxis häufig vor bei nachgiebigem und ungleichem Baugrund oder großen Auflasten.

Es gibt drei Standardbaugrundmodelle für die Berechnung von Gründungsplatten und Pfahl-Plattengründungen, die in der angegebenen Reihenfolge entwickelt wurden.

- A- Einfaches Annahme-Modell (Spannungstrapezverfahren)
- B- *Winkler*-Modell (Bettungsmodulverfahren)
- C- Kontinuumsmodell (Steifemodulverfahren)

Beim Modell A wird keine Interaktion zwischen der Platte oder Pfähle und dem Boden berücksichtigt. Das Modell nimmt eine lineare Sohldruckverteilung unter der Platte an. Das *Winkler*-Modell B ist das einfachste und älteste, das die Interaktion zwischen der Platte, der Pfähle und dem Boden berücksichtigt. Das Modell stellt den Boden oder die Pfähle als elastische Federn dar. Das Kontinuumsmodell C ist kompliziert. Es berücksichtigt auch die Wechselwirkung zwischen der Platte, der Pfähle und dem Boden. Es stellt den Boden als ein geschichtetes Kontinuumsmedium oder isotropes elastisches Halbraummedium dar.

Obwohl das Kontinuumsmodell C eine sehr gute Methode zur Erfassung der Baugrundverhältnisse bereitstellt, konnte es früher aufgrund seiner mathematischen Schwierigkeiten nur selten genutzt werden. Die sinnvolle Anwendung des Verfahrens für allgemeine Baugrund- und Bauwerksverhältnisse verursacht einen relativ großen Rechenaufwand. Deshalb ist die praktische Verwendung ohne Computer nur möglich, wenn entsprechend aufbereitete Tafel- oder Tabellenwerke zur Verfügung stehen. Diese Tabellen sind aber auf ebene Probleme begrenzt.

Um unabhängig von Tabellen praxisnahe Eingangswerte über den Baugrund und das Bauwerk berücksichtigen zu können, wurde zunächst eine allgemeine, für Computer geeignete mathematische Lösung entwickelt, die auf einem Finite Element-Modell für die Sohlplatte basiert. Damit können Gründungsplatten oder Pfahl-Plattengründungen mit den der Wirklichkeit am nächsten kommenden Baugrundmodellen dargestellt werden. Mit dem für diese Zwecke für die Praxis entwickelten Computerprogramm *ELPLA* kann man mit den weitgehend gleichen Ausgangsdaten verschiedene

Typen von Baugrundmodellen anwenden. Es ist auch möglich, beim dreidimensionalen Kontinuumsmodell unregelmäßige Schichtenverläufe zu berücksichtigen.

Es können auch nach dem Bettungs- und Steifemodulverfahren Bauwerke berechnet werden, die auf ungleichmäßig geschichtetem Baugrund aufliegen und von Element zu Element unterschiedliche Gründungstiefe und Plattendicke haben können. Mit dem Programm lassen sich auch verschiedene Nebeneinflüsse wie Grundwasserdruck und Außensetzung berechnen. Auch ist es möglich, mehrere Lastfälle zu überlagern und bei nicht ständigen Lasten Maxima und Minima zu erfassen.

Im vorliegenden Buch werden die drei Standardmodelle mit Verwendung von 9 verschiedenen numerischen Verfahren beschrieben.

1.2 Beschreibung der numerischen Berechnungsverfahren

Entsprechend den drei Standardbaugrundmodellen (einfaches Annahme-Modell, *Winkler*-Modell, Kontinuumsmodell) werden 9 verschiedene numerische Verfahren zur Berechnung von Pfahl-Platten und Pfahlgruppen berücksichtigt, wie in Bild 1-1 und Tabelle 1-1 gezeigt.

Tabelle 1-1 Numerische Berechnungsverfahren

Verfahren Nr.	Verfahren
1	Spannungstrapezverfahren (Einfaches Annahme-Modell)
2	Bettungsmodulverfahren mit konstantem Bettungsmodul (<i>Winkler</i> -Modell)
3	Bettungsmodulverfahren mit von Knoten zu Knoten unterschiedlichen Bettungsmoduli (<i>Winkler</i> -Modell)
4	Bettungsmodulverfahren mit von Knoten zu Knoten unterschiedlichen Bettungsmoduli mit iterativer Verbesserung (elastische Schichten - <i>Winkler</i> -Modell oder Kontinuumsmodell)
5	Halbraumverfahren für den isotropen Halbraum Baugrund (Lösung des Gleichungssystems mit Elimination) (Isotroper Halbraum - Kontinuumsmodell)
6	Steifemodulverfahren für den beliebig geschichteten Baugrund (Lösung des Gleichungssystems mit Iteration nach <i>El Gendy</i> (1994)) (elastische Schichten - Kontinuumsmodell)
7	Steifemodulverfahren für den beliebig geschichteten Baugrund (Lösung des Gleichungssystems mit Elimination) (elastische Schichten - Kontinuumsmodell)
8	Steifemodulverfahren für die starre Pfahl-Plattengründung auf dem beliebig geschichteten Baugrund (elastische Schichten - Kontinuumsmodell)
9	Steifemodulverfahren für die starre Pfahlgruppen auf dem beliebig geschichteten Baugrund (elastische Schichten - Kontinuumsmodell)

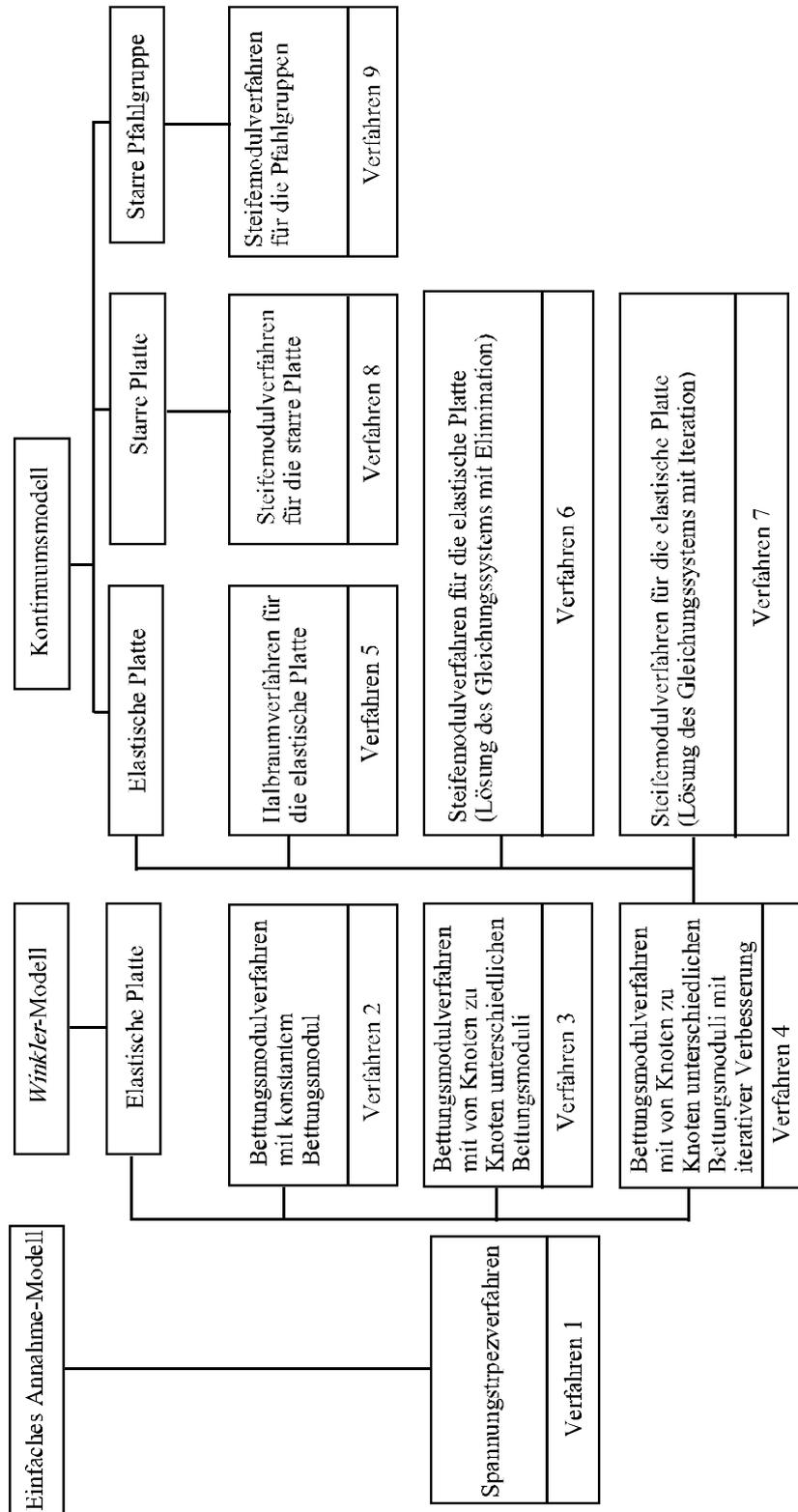


Bild 1-1 Berechnungsmodelle für Pfahl-Plattengründungen (Verfahren 1-9) im Programm *ELPLA*

Heute ist die Finite Element-Methode das leistungsfähigste Verfahren, das zur Lösung von vielen komplexen Problemen verfügbar ist. Sie kann fast für alle Ingenieurprobleme besonders in den Berechnungsproblemen für die Statik angewendet werden. In diesem Buch wird die Finite Element-Methode verwendet, um die Platte für alle numerischen Berechnungsverfahren zu berechnen, außer dem Steifemodulverfahren für die starre Pfahl-Plattengründung auf dem beliebig geschichteten Baugrund (Verfahren 8), die die Elastizitätsregeln nicht befolgen. In der Finiten Element-Berechnung wird die Platte aus rechteckigen oder dreieckigen Plattenelementen entsprechend der zweidimensionalen Natur des Fundaments dargestellt. Jeder Knoten der Plattenelemente hat drei Freiheitsgrade, senkrechte Verschiebung w und zwei Verdrehungen θ_x und θ_y über die x - und y - Achse. Die Entwicklung der finiten Elementgleichungen ist gut in Standardlehrbüchern dokumentiert. Zur weiteren Information kann der Leser z.B. von *Zienkiewicz/ Cheung* (1970) oder *Schwarz* (1984) verfasste Abhandlungen über die Entwicklung von finiten Elementgleichungen lesen.

Um die Gleichungen der numerischen Berechnungsverfahren zu formulieren, ist die Pfahl-Plattengründung, die beliebige Grundform haben kann, in finite Elemente unterteilt. Diese sind an einer diskreten, finiten Anzahl von Knotenpunkten miteinander verbunden. Kompatibilität zwischen der Pfahl-Plattengründung und dem Bodenmedium in senkrechter Richtung wird für alle Verfahren außer dem Spannungstrapezverfahren (Verfahren 1) berücksichtigt. Die Grundformulierung der Gleichgewichtsgleichung für die Pfahl-Plattengründung kann in allgemeiner Form durch die folgende Gl. (1.1) beschrieben werden:

$$[k_p]\{\delta\} = \{F\} \quad (1.1)$$

Der Vektor $\{F\}$ der Kräfte enthält in Gl. (1.1) die Wirkung und Rückwirkung auf die Pfahl-Plattengründung. $\{\delta\}$ ist der Verformungsvektor und $[k_p]$ die Steifigkeitsmatrix für die Platte und die Pfähle.

Im Prinzip sind für alle Berechnungsverfahren die Wirkungskräfte bekannt und gleichen den angreifenden Lasten und Momenten, die von oben auf die Pfahl-Plattengründung drücken. Die Rückwirkungskräfte sind unbekannt und gleichen den Kontaktkräften (Sohldrücken), die von unten auf die Pfahl-Plattengründung einwirken. Die Sohldrücke werden entsprechend jedem Baugrundmodul benötigt.

Entsprechend den drei Standardbaugrundmodellen (Einfache Annahme-Modell, *Winkler*-Modell, Kontinuumsmodell) werden 9 numerische Verfahren verwendet, um die Sohldrücke oder Pfahllasten zu finden und daher die Pfahl-Plattengründung zu berechnen. Die nächsten Seiten beschreiben die Wechselwirkung zwischen der Pfahl-Plattengründung und dem Baugrund bei diesen Verfahren.

1.2.1 Spannungstrapezverfahren (Verfahren 1)

Das Spannungstrapezverfahren stellt die ursprünglichste und älteste Berechnungsmethode der Ermittlung der Pfahllasten dar. Es erfolgt eine einfache Annahme der Pfahllasten. Die Pfahllast wird unabhängig vom Baugrund linear auf der Unterseite des Fundaments angenommen (Bild 1-2). Dabei bleiben Formänderungsbedingungen unbeachtet. Die Gleichgewichtsbedingungen wird erfüllt, indem

die Vertikalkomponente N , die resultierende aus den Auflast und die Resultierende des Pfahllastkörpers in der gleichen Wirkungslinie liegen und entgegengesetzt gleich groß sind.

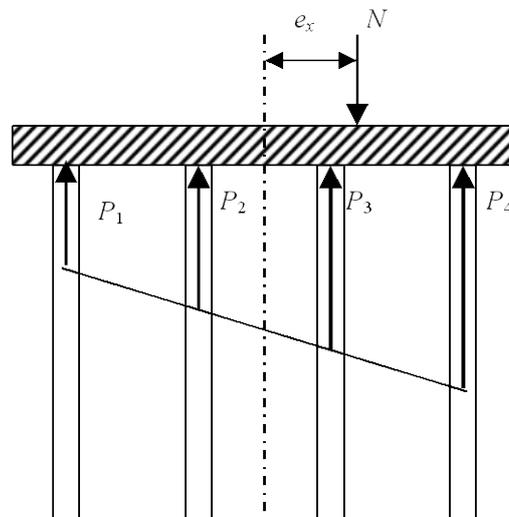


Bild 1-2 Pfahllastverteilung für das Spannungstrapezverfahren

Im allgemeinen Fall von vertikalen Pfählen unter einer Pfahlplatte mit M_x und M_y , die lineare Sohlkräfte bilden, wird die Kraft in jedem Pfahl analog zur Navierschen Lösung wie folgt angesetzt:

$$P_i = \frac{N}{n} + \frac{M_y I_x - M_x I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} x_i + \frac{M_x I_y - M_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} y_i \quad (1.2)$$

Hierin bedeuten $I_x = \sum_1^n y_i^2$, $I_y = \sum_1^n x_i^2$ und $I_{xy} = \sum_1^n x_i y_i$

und wobei

- P_i Kraft im Pfahl i [kN]
- N Lotrechte Komponente der Resultierenden aus den Lasten auf der Pfahlplatte [kN]
- x_i Koordinate des Pfahls i von der Schwerpunktschwerachse x [m]
- y_i Koordinate des Pfahls i von der Schwerpunktschwerachse y [m]
- M_x Moment von N um die x -Achse, $M_x = N e_y$ [kN.m]
- M_y Moment von N um die y -Achse, $M_y = N e_x$ [kN.m]
- e_x Exzentrizität gemessen von der Schwerpunktschwerachse x [m]
- e_y Exzentrizität gemessen von der Schwerpunktschwerachse y [m]
- n Anzahl der Pfähle unter der Pfahlplatte [-]

Falls die x - Achse und die y - Achse Hauptachsen der Fundamentfläche sind, ist das Zentrifugalmoment $I_{xy} = 0$. Dann vereinfacht sich die Gl. (1.2) wie folgt:

$$P_i = \frac{N}{n} + \frac{M_y}{I_y} x_i + \frac{M_x}{I_x} y_i \quad (1.3)$$

Beim Streifenpfahlplattenfundament ergibt sich der Kräfte in der Pfähle aus:

$$P_i = \frac{N}{n} + \frac{M_y}{I_y} x_i \quad (1.4)$$

Greift N im Schwerpunkt der Grundrissfläche (mittig) an, so sind $M_x = 0$ und $M_y = 0$. Es errechnet sich dann eine gleichmäßig verteilte Pfahllast:

$$P_i = \frac{N}{n} \quad (1.5)$$

Damit können der Pfahlkräfte unter dem Fundament und die Schnittkräfte an den verschiedenen Netzpunkten des Fundamentes berechnet werden.

1.2.1.1 Gleichungssysteme für das Spannungstrapezverfahren

Betrachtet man das gesamte Fundament, wird das Fundament unter der Wirkung der gesamten äußeren Lasten $\{F\}$ verformt, wobei:

$$\{F\} = \{P\} - \{Q\} \quad (1.6)$$

Dabei ist $\{P\}$ der Vektor der bekannten angreifenden Lasten und Momente, die von oben auf das Fundament drücken und $\{Q\}$ der Vektor der bekannten Pfahllasten, die von unten auf das Fundament einwirken. Daraus wird das Gleichgewicht des Systems mit der folgenden Matrixgleichung ausgedrückt:

$$[k_p] \{\delta\} = \{P\} - \{Q\} \quad (1.7)$$

wobei:

- $\{Q\}$ Vektor der Pfahllasten.
- $\{P\}$ Lastvektor aus Lasten und Momenten.
- $\{\delta\}$ Verformungsvektor.
- $[k_p]$ Steifigkeitsmatrix für die Platte.

1.2.1.2 Lösung des Gleichungssystems für das Spannungstrapezverfahren

Da die Steifigkeitsmatrix der Platte $[k_p]$ in der Gl. (1.7) eine diagonale Matrix ist, wird das System der linearen Gln. (1.7) mit der Bandkoeffizienten-Technik gelöst. Die unbekanntenen Variablen sind die Knotenverschiebungen w_i und die Knotenverdrehungen θ_{xi} und θ_{yi} um die x - und y - Achse.

1.2.2 Bettungsmodulverfahren (Verfahren 2 und 3)

Das Bettungsmodulverfahren ist die älteste Methode, die die Berechnung von Fundamenten auf elastischen Baugrund ermöglicht. Bei der Ermittlung der Sohldruckverteilung werden bestimmte Formänderungsbedingungen des Fundamentes und Untergrundes berücksichtigt. Das Verfahren wurde von *Winkler* (1867) entwickelt. Es beruht auf dem idealisierten Bodenmodell des Federkissens. Die Vertikalverschiebung eines beliebigen Punktes der Bodenoberfläche ist direkt proportional zu der an dieser Stelle wirkenden Belastung. Das geschieht unabhängig von an anderen Stellen vorhandenen Belastungen. Bei dem Pfahlplattengründung werden auch die Pfähle als Federkissen simuliert wie im Bild 1-3 nach *Poulos* (1994).

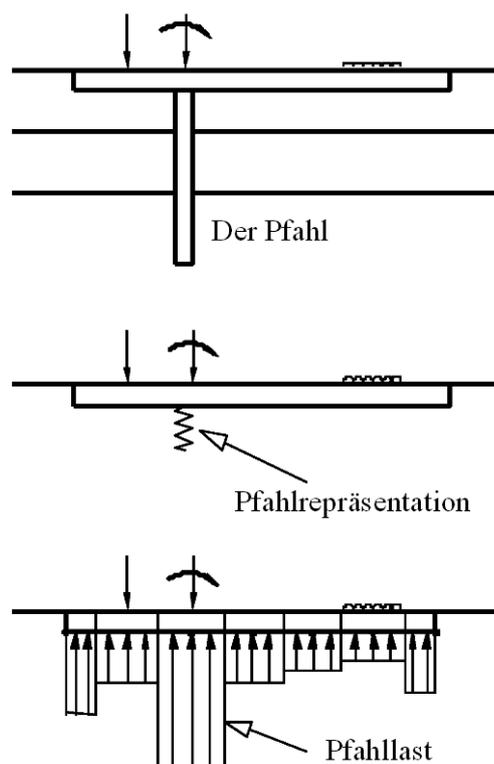


Bild 1-3 Federkissen des Pfahles für das Bettungsmodulverfahren nach *Poulos* (1994)

Die Sohldruckverteilung wird verhältnismäßig zur Durchbiegung der Gründung angesetzt. An jeder beliebigen Stelle des Gründungskörpers ergibt sich das Bettungsmodul k_s aus dem Quotienten aus dem Sohldruck oder Pfahllast Q und der sich dadurch einstellenden Setzung s . Es handelt sich bei dem Bettungsmodul um eine Federkonstante.

1.2.2.1 Gleichungssysteme für das Bettungsmodulverfahren

Für einen Knoten i auf dem FE-Netz wird die Sohldruckkraft oder die Pfahllast Q_i gegeben als:

$$Q_i = k_i s_i \quad (1.8)$$

wobei:

Q_i Sohlkraft oder Pfahllast im Knoten i , [kN].

k_i Bodenkoeffizient oder Pfahlsteifigkeit des Knotens i mit Bettungsmodul, [kN/m].

Betrachtet man die gesamte Platte, so kann die Gl. (1.8) wie folgt in Matrizenform angeschrieben werden:

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \dots \\ \dots \\ Q_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & k_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \dots \\ \dots \\ s_n \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

Gl. (1.9) ist vereinfacht:

$$\{Q\} = [k_s]\{s\} \quad (1.10)$$

wobei:

$\{Q\}$ Vektor der Sohl drücke und Pfahllasten

$\{s\}$ Vektor der Setzung

$[k_s]$ Steifigkeitsmatrix für den Baugrund und der Pfähle

Das Fundament wird unter der Wirkung der gesamten äußeren Lasten $\{F\}$ verformt, wobei:

$$\{F\} = \{P\} - \{Q\} \quad (1.11)$$

Dabei ist $\{P\}$ der Vektor der bekannten angreifenden Lasten und Momente, die von oben auf das Fundament drücken und $\{Q\}$ der Vektor der unbekanntenen Sohl drücke und Pfahllasten, die von unten auf das Fundament einwirken. Daraus wird das Gleichgewicht des Systems mit der folgenden Matrixgleichung ausgedrückt:

$$[k_p]\{\delta\} = \{P\} - \{Q\} \quad (1.12)$$

Fasst man alle Knoten zusammen, so kann man folgendes Gleichungssystem für das Fundament aufstellen:

$$[k_p]\{\delta\} = \{P\} - [k_s]\{s\} \quad (1.13)$$

Betrachtet man die Kompatibilität der Verschiebung zwischen Platte und Baugrund, wobei die Setzungsmulde des Baugrunds s [m] der Biegelinie der Platte w [m] entspricht, so lautet Gl. (1.14):

$$[[k_p] + [k_s]]\{\delta\} = \{P\} \quad (1.14)$$

Gl. (1.14) zeigt, dass die Gesamtsteifigkeitsmatrix des Systems Platte-Baugrund-Pfähle die Summe der Steifigkeitsmatrix der Platte $[k_p]$ und der Steifigkeitsmatrix des Baugrunds und der Pfähle $[k_s]$ ist.

1.2.2.2 Lösung des Gleichungssystems für das Bettungsmodulverfahren

Es ist zu bemerken, dass die Steifigkeitsmatrix für die Plattenmatrix $[k_p]$ eine Bandmatrix und die Steifigkeitsmatrix für die Baugrundmatrix und die Pfähle $[k_p]$ eine Diagonalmatrix bei den Bettungsmodulverfahren 2 und 3 aufweist. Es ist einfacher, für das Bettungsmodulverfahren 2 und 3 die Matrix $[k_s]$ zur Matrix $[k_p]$ zu addieren. Die daraus resultierende Matrix ist auch eine Bandmatrix. Damit kann man das Gleichungssystem (1.14) mit der Bandkoeffizienten-Technik lösen. Da die Gesamtsteifigkeitsmatrix eine Bandmatrix ist, benötigt man zur Lösung des Gleichungssystems (1.14) eine kurze Rechenzeit beim Anwenden der Verfahren 2 und 3.

Die unbekanntenen Variablen sind die Knotenverschiebungen w_i ($w_i = s_i$) und die Knotenverdrehungen θ_{xi} und θ_{yi} um die x - und y - Achse. Nach Lösen des linearen Gleichungssystems (1.17) setzt man die erhaltenen Setzungen s_i in Gl. (1.10) ein und erhält die unbekanntenen Sohlkräfte Q_i .

1.2.3 Steifemodulverfahren (Verfahren 4 bis 9)

Bei dem Steifemodulverfahren tritt die Setzung unter der Lastfläche oder dem Pfahl sowie infolge Drucküberschneidung auch außerhalb der Lastfläche oder dem Pfahl auf. Es erfolgt eine Berücksichtigung der Wechselwirkung zwischen den verschiedenen Knoten des Kontinuumsmediums und zwischen der Platte und dem Boden. Im Gegensatz zum Bettungsmodul k_s stellt der Steifemodul E_s einen echten Bodenwert dar, der entweder anhand von Versuchen ermittelt oder mittels Tabellen hinreichend genau geschätzt wird. Bild 1-4 zeigt Kontinuumsmedium angewendet für die Pfahlgründung nach *Liang/ Chen* (2004).

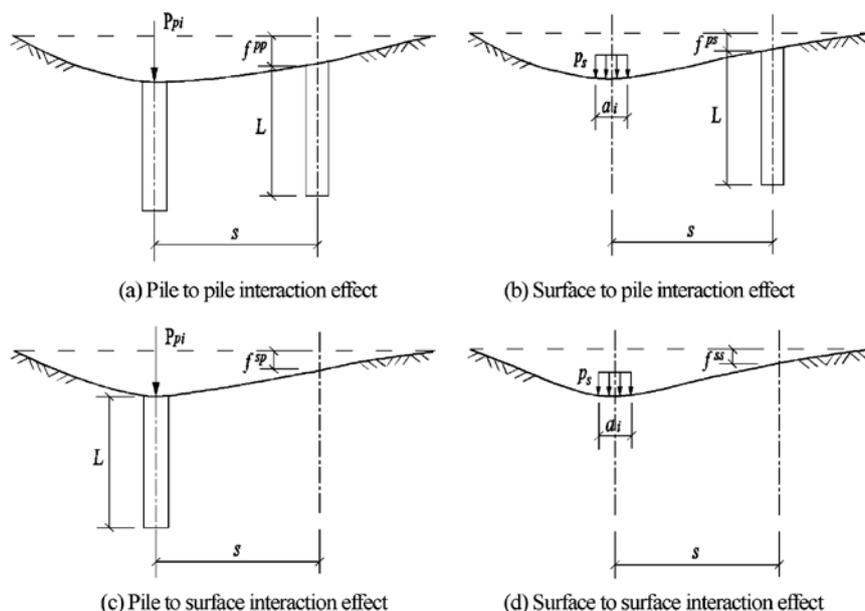


Bild 1-4 Die Setzungsmulde bei Steifemodulverfahren nach *Liang/ Chen* (2004)

1.2.3.1 Theorie zur Berechnung von Pfahl-Plattengründungen nach Steifemodulverfahren

Das Verhältnis des Pfahl-Baugrundsystems kann anhand einer linearen sowie nicht nichtlinearen Annahme erfolgen. Zuzufolge unterscheidet man zwischen den drei untenstehenden Verfahren:

- Lineare Berechnung der Pfahl-Plattengründungen (**L**inear analysis of **p**iled **r**aft), genannt LPR
- Nichtlineare Berechnung der Pfahl-Plattengründungen mit einer hyperbolischen Funktion (**N**onlinear analysis of **p**iled **r**aft using **h**yperbolic function), genannt NPRH.
- Nichtlineare Berechnung der Pfahl-Plattengründungen mit Verwendung der DIN 4014 (**N**onlinear analysis of **p**iled **r**aft using **D**IN 4014), genannt NPRD.

Im nächsten Abschnitte werden die Theorie zur Berechnung von Pfahl-Plattengründungen nach Steifemodulverfahren beschrieben.

1.3 Numerisches Beispiel:

Die numerischen Modelle, die in diesem Abschnitt beschrieben sind, wurden im Programm *ELPLA* implementiert. Um die numerischen Modelle zu überprüfen und zu auswerten, wurde ein Vergleich durchgeführt, in welches die Ergebnisse von *ELPLA* mit denen von vorhandenen Verfahren verglichen wurden.

1.3.1 Testbeispiel: Überprüfung der Kräfte in den Pfählen einer Pfahlgruppe

1.3.1.1 Aufgabenstellung

Um das mathematische Modell des Programms *ELPLA* für die Berechnung der Pfahlkräfte von Pfahlgruppen unter einer Pfahlplatte zu überprüfen, werden die Ergebnisse einer Pfahlgruppe, berechnet von *Bakhoun* (1992) (Beispiel 5.19, Seite 592) mit denen aus dem Programm *ELPLA* verglichen.

Eine Pfahlplatte auf 24 vertikalen Pfählen wird berücksichtigt, wie im Bild 1-5 gezeigt. Es soll die Kraft in jedem Pfahl der Pfahlgruppe infolge einer vertikalen Last von $N = 8000$ [kN] auf die Pfahlplatte mit den Exzentrizitäten $e_x = 1.4$ [m] und $e_y = 1.8$ [m] in x - und y -Richtung berechnet werden.

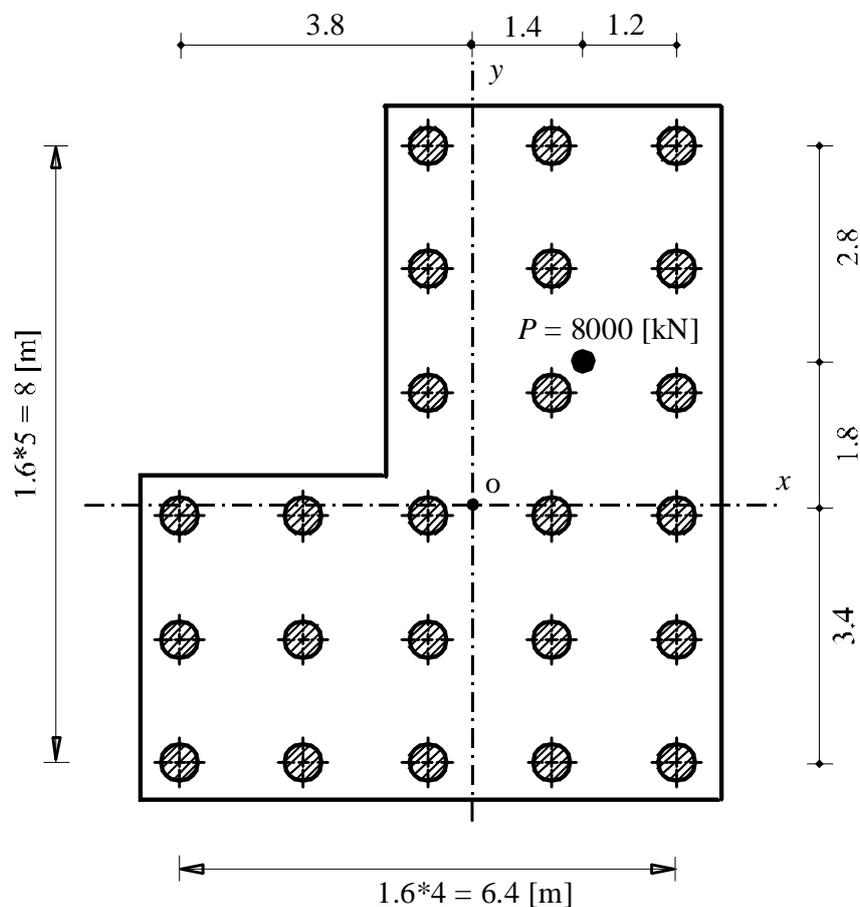


Bild 1-5 Abmessungen der Pfahlplatte und Pfahlanordnung

1.3.1.2 Handberechnung der Pfahlkräfte

Entsprechend *Bakhoun* (1992) kann die Kraft in jedem Pfahl der Pfahlgruppe mit Handberechnung wie folgt erhalten werden:

Schritt 1: Berechnung der Momente

$$M_x = 8000 * 1.8 = 14400 [\text{kN.m}] \tag{1.15}$$

$$M_y = 8000 * 1.4 = 11200 [\text{kN.m}]$$

Schritt 2: Berechnung der Eigenschaften I_x , I_y und I_{xy}

Die Bestimmung der Eigenschaften I_x , I_y und I_{xy} wird in der Tabelle 1-2 gelistet.

Tabelle 1-2 Eigenschaften I_x , I_y und I_{xy}

Pfahl- Nummer	x_i [m]	y_i [m]	x_i^2 [m ²]	y_i^2 [m ²]	$x_i y_i$ [m ²]
1	-3.8	-3.4	14.44	11.56	12.92
2	-2.2	-3.4	4.84	11.56	7.48
3	-0.6	-3.4	0.36	11.56	2.04
4	1.0	-3.4	1.00	11.56	-3.40
5	2.6	-3.4	6.76	11.56	-8.84
6	-3.8	-1.8	14.44	3.24	6.84
7	-2.2	-1.8	4.84	3.24	3.96
8	-0.6	-1.8	0.36	3.24	1.08
9	1.0	-1.8	1.00	3.24	-1.08
10	2.6	-1.8	6.76	3.24	-4.68
11	-3.8	-0.2	14.44	0.04	0.76
12	-2.2	-0.2	4.84	0.04	0.44
13	-0.6	-0.2	0.36	0.04	0.12
14	1.0	-0.2	1.00	0.04	-0.20
15	2.6	-0.2	6.76	0.04	-0.52
16	-0.6	1.4	0.36	1.96	-0.84
17	1.0	1.4	1.00	1.96	1.40
18	2.6	1.4	6.76	1.96	3.64
19	-0.6	3.0	0.36	9.00	-1.80
20	1.0	3.0	1.00	9.00	3.00
21	2.6	3.0	6.76	9.00	7.80
22	-0.6	4.6	0.36	21.16	-2.76
23	1.0	4.6	1.00	21.16	4.60
24	2.6	4.6	6.76	21.16	11.96
			$I_y = 106.56$	$I_x = 170.56$	$I_{xy} = 43.2$

Schritt 3: Berechnung der Pfahlkräfte

Die Kraft P_i im Pfahl i in der Lage (x_i, y_i) des Geometripfahlgruppenschwerpunkts unter der Pfahlplatte erhält man mit:

$$P_i = \frac{N}{n} + \frac{M_y I_x - M_x I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} x_i + \frac{M_x I_y - M_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} y_i$$

$$P_i = \frac{8000}{24} + \frac{(11200)(170.56) - (14400)(43.2)}{(170.56)(106.56) - (43.2)^2} x_i + \frac{(14400)(106.56) - (11200)(43.2)}{(170.56)(106.56) - (43.2)^2} y_i \quad (1.16)$$

$$P_i = 333.333 + 78.988 x_i + 64.421 y_i$$

3 Pfahlkräfte, errechnet mit dem Programm *ELPLA*

Das verfügbare Verfahren „Spannungstrapezverfahren (1)“ im Programm *ELPLA* kann hier verwendet werden, um die Kraft in jedem Pfahl der Pfahlgruppe zu bestimmen. Ein Netz von gleichen Quadratelementen wird gewählt, jedes Element hat eine Seite von 1.6 [m]. Die Pfahlkräfte, die vom Programm *ELPLA* erhalten werden, werden mit denen von *Bakhoun* (1992) in der Tabelle 1-3 verglichen. Es ist deutlich zu sehen, dass die Pfahlkräfte vom Programm *ELPLA* denen der Handberechnung gleichen.

Tabelle 1-3 Vergleich der Pfahlkräfte, berechnet mit dem Programm *ELPLA* und nach *Bakhoum* (1992)

Pfahl- Nummer	<i>Bakhoum</i> (1992)						<i>ELPLA</i> P_i [kN]
	x_i [m]	y_i [m]	N/n [kN]	$78.988 x_i$ [kN]	$64.421 y_i$ [kN]	P_i [kN]	
1	-3.8	-3.4	333.33	-300.16	-219.03	-185.86	-185.85
2	-2.2	-3.4	333.33	-173.77	-219.03	-59.47	-59.47
3	-0.6	-3.4	333.33	-47.39	-219.03	66.91	66.91
4	1.0	-3.4	333.33	78.99	-219.03	193.29	193.29
5	2.6	-3.4	333.33	205.37	-219.03	319.67	319.67
6	-3.8	-1.8	333.33	-300.16	-115.96	-82.79	-82.78
7	-2.2	-1.8	333.33	-173.77	-115.96	43.50	43.60
8	-0.6	-1.8	333.33	-47.39	-115.96	169.98	169.98
9	1.0	-1.8	333.33	78.99	-115.96	296.36	296.36
10	2.6	-1.8	333.33	205.37	-115.96	422.74	422.72
11	-3.8	-0.2	333.33	-300.16	-12.88	20.29	20.29
12	-2.2	-0.2	333.33	-173.77	-12.88	146.68	146.67
13	-0.6	-0.2	333.33	-47.39	-12.88	273.06	273.06
14	1.0	-0.2	333.33	78.99	-12.88	399.44	399.44
15	2.6	-0.2	333.33	205.37	-12.88	525.82	525.82
16	-0.6	1.4	333.33	-47.39	90.19	376.13	376.13
17	1.0	1.4	333.33	78.99	90.19	502.51	502.51
18	2.6	1.4	333.33	205.37	90.19	628.89	628.89
19	-0.6	3.0	333.33	-47.39	193.26	479.20	479.20
20	1.0	3.0	333.33	78.99	193.26	605.58	605.59
21	2.6	3.0	333.33	205.37	193.26	731.96	731.97
22	-0.6	4.6	333.33	-47.39	296.34	582.28	582.28
23	1.0	4.6	333.33	78.99	296.34	708.66	708.66
24	2.6	4.6	333.33	205.37	296.34	835.04	835.04

1.4 Literatur

- [1] *Bakhoun, M.* (1992): Structural Mechanics. Cairo, Egypt.
- [2] *Liang, F./ Chen, L.* (2004): A modified variational approach for the analysis of piled raft foundation. Mechanics Research Communications 31, 593-604
- [3] *Ohde, J.* (1942): Die Berechnung der Sohldruckverteilung unter Gründungskörpern. Der Bauingenieur, Heft 14/16, S. 99 bis 107 - Heft 17/18 S. 122 bis 127.
- [4] *Schwarz, H.* (1984): Methode der finiten Elemente. Teubner-Verlag, Stuttgart.
- [5] *Poulos, H.* (1994): An Approximation numerical analysis of pile-raft interaction. Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 18, 73-92
- [6] *Zienkiewicz, O./ Cheung, Y.* (1970): The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics. McGraw-Hill, England.
- [7] *Winkler, E.* (1867): Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit. Dominicus, Prag.

Abschnitt 2

Numerische Modellierung von Einzelpfahl, Pfahlgruppen und Pfahl-Plattengründung

Inhalt	Seite
2 Numerische Modellierung von Einzelfahl, Pfahlgruppen und Pfahl-Plattengründung	
4	
2.1 Einleitung.....	4
2.2 Modellierung eines Einzelfahles.....	6
2.2.1 Bodenflexibilität eines Einzelfahles	6
2.2.2 Bestimmung der Flexibilitätskoeffizienten.....	8
2.2.3 Elastische Berechnung eines Einzelfahles	13
2.2.4 Starre Berechnung eines Einzelfahles.....	15
2.3 Modellierung einer starren Pfahlgruppe (freistehende starre Platte)	17
2.3.1 Bodensteifigkeit einer Pfahlgruppe.....	17
2.3.2 Berechnung einer Pfahlgruppe.....	20
2.4 Modellierung einer Pfahl-Plattengründung.....	25
2.4.1 Bodensteifigkeit einer Pfahl-Plattengründung.....	25
2.4.2 Berechnung einer Pfahl-Plattengründung für die schlaffe Platte.....	28
2.4.3 Berechnung einer Pfahl-Plattengründung für die starre Platte	29
2.4.4 Berechnung einer Pfahl-Plattengründung für die elastische Platte.....	30
2.5 Nichtlineare Berechnung mit einer hyperbolischen Funktion (NPRH)	32
2.5.1 Nichtlineare Berechnung eines starren Einzelfahles.....	32
2.5.2 Nichtlineare Berechnung einer Pfahlgruppe, einer Pfahl-Plattengründung für die elastische Platte und einer Pfahl-Plattengründung für die starre Platte	33
2.5.3 Iterationsverfahren	33
2.6 Zahlenbeispiele	36
2.6.1 Testbeispiel: Auswertung des Setzungseinflussfaktors I_1 für einen Einzelfahl..	36
2.6.2 Untersuchungsfall: Pfahl-Plattengründung beim <i>Messe-Torhaus</i> in Frankfurt	39
2.7 Literatur.....	49

Abschnitt 2

2 Numerische Modellierung von Einzelpfahl, Pfahlgruppen und Pfahl-Plattengründung

2.1 Einleitung

Die Berechnung einer Pfahl-Plattengründung ist eine komplizierte Aufgabe, da es sich um ein dreidimensionales Problem handelt, das viele Einflussfaktoren enthält. In der Berechnung müssen folgende Faktoren betrachtet werden: die Interaktion zwischen allen Elementen der Pfahl-Plattengründung und dem Boden, Berücksichtigung der gegenwärtigen Last und der Geometrie der Pfahl-Plattengründung, Darstellung des Bodens durch ein reales Modell und Behandlung des Problems als nichtlineare Berechnung. Die Berücksichtigung aller dieser Einflussfaktoren erfordert große Erfahrung und Bemühungen. Außerdem erfordert ein solches Problem lange Berechnungszeiten für die enorm große Bodenmatrix bei einer großen Pfahl-Plattengründung, denn die Bodenmatrix diskretisiert die Knoten entlang der Pfähle und unter der Platte. Aus diesen Gründen haben viele Autoren in den letzten Jahren vereinfachte Methoden vorgeschlagen, um den Aufwand der Berechnung zu minimieren.

Clancy & Randolph (1993) entwickelten die hybride Schichtenmethode, die den Rechenaufwand deutlich verringerte. *Ta & Small* (1997) näherten die Oberflächensetzung des Bodens durch ein Polynom an, anstatt sie durch einen Flexibilitätsfaktor zu beschreiben. Allerdings muss die Platte quadratisch sein. *Russo* (1998) stellte eine numerische Näherungsmethode für die Berechnung der Pfahl-Plattengründungen vor, in der die Pfähle als wechselwirkende lineare oder nicht lineare Federn modelliert wurden. Er verwendete die Interaktive Faktorenmethode und ein einleitendes BEM zum Modellieren der Pfahl-Pfahl-Interaktion. *Poulos* (1999) beschrieb eine Näherungsberechnung für die Tragwerksreaktion einer Pfahlgruppe. Die Berechnung basiert auf einer vereinfachten Form der Grenzelementmethode, um einzelne Pfahlreaktionen und Interaktionsfaktoren zu erhalten. Dabei werden verschiedene vereinfachte Annahmen getroffen, die den Berechnungsprozess erleichtern. *Lee & Xiao* (2001) stellten eine vereinfachte analytische Methode für nichtlineare Berechnung des Verhaltens der Pfahlgruppen mit einer hyperbolischen Annäherung vor, welche die nichtlineare Beziehung zwischen der Schaftbelastung und der Setzung beschreibt. Sie entwickelten die Methode für Pfahlgruppen unter einer steifen Platte mit schlaffen Pfahlplatten, die auf der Last-Übertragungsfunktion basiert. *Kitiyodom & Matsumoto* (2002) und (2003) entwickelten eine vereinfachte Methode numerischer Berechnungen der Pfahl-Plattengründung mit einer hybriden Form, wobei die Gründungsplatte als dünne Platte, die Pfähle als elastische Träger und der Boden als Federn modelliert werden. *Mendonça & Paiva* (2003) stellten eine BEM/ FEM-Formulierung für die Berechnung der Pfahl-Plattengründung vor, in der jeder Pfahl durch ein einzelnes Element mit drei Knotenpunkten und die Scherkraft entlang des Schaftes dargestellt wird. Sie wird durch eine quadratische Funktion angenähert. Der Boden wird als Halbraum angenommen. *Jeong et al.* (2003) schlugen einen einfachen Algorithmus vor, um seitlich belastete dreidimensionale Pfahlgruppen mit einer Balken-Stütze-Methode zu berechnen. *Liang & Chen* (2004) stellten eine veränderte Variationsannäherung für die Berechnung der Pfahl-Plattengründung durch einen vereinfachten rechnerischen Ansatz vor. Sie werteten damit die Pfahl-Boden-Interaktion aus. Sie wendeten die Annäherung auf die starre und elastische Pfahl-Plattengründung an, die auf homogenem Boden steht. *Wong & Poulos* (2005) entwickelten Näherungswerte für die Interaktionsfaktoren zwischen verschiedenen Pfählen über eine umfangreiche parametrische Untersuchung. *Lutz et al.* (2006) stellten eine einfache Methode vor, um das Last-Setzungs-Verhalten der Pfahl-Plattengründung, basierend auf der Elastizitätstheorie und der Tragfähigkeit, abzuschätzen. Die meisten oben

genannten Berechnungen verwenden das Bodenmodell. Doch es gibt auch Methoden zur Berechnung solcher Aufgaben mit dreidimensionalen Modellen, die allerdings sogar für schnelle Rechner zeitaufwändig sind.

In den Standardmethoden zur Berechnung von Pfahl-Plattengründungen, die auf der Elastizitätstheorie basieren, setzt sich die gesamte Bodensteifigkeitsmatrix aus allen Elementen der Pfähle und der Platte zusammen. Man erhält die Setzungen der Pfahl-Plattengründungselemente direkt, indem man die globale Gleichung löst. Auf der Grundlage der Elastizitätstheorie stellte *EL Gendy* (2007) leistungsfähigere Berechnungen für Einzelpfahl, Pfahlgruppen und Pfahl-Plattengründungen durch die zusammengesetzte Koeffizientenmatrix vor, um die Größe der gesamten Bodensteifigkeitsmatrix zu verringern. In der Technik wird der Pfahl als starres Element behandelt; er hat eine konstante Setzung an seinen Knoten. Diese Annahme ermöglicht, Pfahlkoeffizienten in zusammengesetzten Koeffizienten zusammenzustellen. Sie kann das nichtlineare Verhalten des Einzelpfahles, der Pfahlgruppen und der Pfahl-Plattengründung leicht modellieren. Durch die zusammengesetzte Koeffiziententechnik ist die Steifigkeitsmatrixgröße der Pfahl-Plattengründung gleich der Steifigkeitsmatrixgröße der Platte ohne die Pfähle. Die vorgeschlagene Berechnung verringert beträchtlich die Anzahl der Gleichungen, die gelöst werden müssen. Die Platte kann als schlaff, starr oder elastisch auf geschichtetem Baugrund berechnet werden. Der Vorteil dieser Berechnung ist, dass es keinen Näherungswert gibt, wenn man die Flexibilitätskoeffizienten des Bodens generiert. In der Berechnung wird bei der Generierung der Gesamtflexibilitätsmatrix der Pfahl-Plattengründung eine volle Interaktion zwischen den Elementen der Pfahl-Plattengründung in Betracht gezogen. Das Verwenden der zusammengesetzten Koeffiziententechnik ermöglicht es, das nichtlineare Verhalten des Pfahles durch eine hyperbolische Beziehung zwischen der Last und der Setzung des Pfahles anzuwenden. *EL Gendy* (2007) stellte ebenfalls eine direkte hyperbolische Funktion für die nichtlineare Berechnung eines Einzelpfahles vor. Außerdem wurde ein Iterationsverfahren entwickelt, welches das System der nichtlinearen Gleichungen der Pfahlgruppe oder der Pfahl-Plattengründung löst. Dieser Abschnitt stellt eine numerische Modellierung eines Einzelpfahles, einer Pfahlgruppe und einer Pfahl-Plattengründung nach *EL Gendy* (2007) vor.

2.2 Modellierung eines Einzelpfahles

Für die Berechnung wird ein zusammengesetzter Koeffizient oder der Modul ks [kN/m] zur Darstellung der linearen Bodensteifigkeit des Pfahles bestimmt. Der Modul ks ist ein Parameter, der sowohl in der linearen als auch in der nichtlinearen Berechnung des Pfahles verwendet wird. Er wird als das Verhältnis zwischen der einwirkenden Kraft auf dem Pfahlkopf Ph [kN] und der Pfahlsetzung w_0 [m] definiert. Der Modul ks ist keine Bodenkonstante. Er hängt von der Pfahllast, von der Pfahlgeometrie und von der Schichtung des Bodens ab. Er ist analog dem Modul der Untergrundreaktion der Platte nach dem Bettungsmodulverfahren von *Winkler* (1867), welches das Verhältnis zwischen dem durchschnittlichen Sohldruck und der Setzung unter dem charakteristischen Punkt auf der Platte angibt. In diesem Abschnitt wird die Methode zur Bestimmung des Moduls ks für den starren Pfahl vorgestellt.

2.2.1 Bodenflexibilität eines Einzelpfahles

Bei der Modellierung eines Einzelpfahles wird der Pfahlschaft in einzelne Elemente mit m Knoten unterteilt. Jedes Element hat, wie im Bild 2-1a dargestellt, eine gleichmäßige Mantelreibungskraft qs_j [kN/m²]. Auf den Pfahlfuß wirkt ein gleichförmiger Spitzendruck qb [kN/m²]. Die Pfahlschaftelemente werden als eine Linie dargestellt, wie im Bild 2-1b gezeigt. Die Spannungen am Schaft und an der Sohle werden als eine aneinander gereihte Linie mit der Kraft Q_i an den Knoten abgebildet. Die Mantelreibungskraft am Knoten j wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$Qs_j = 2\pi r_o \frac{l_{j-1} + l_j}{2} qs_j \quad (2.1)$$

während die Spitzenkraft auf dem Pfahlfuß ausgedrückt wird durch:

$$Qb = \pi r_o^2 qb \quad (2.2)$$

wobei:

$j-1$ und j	Knotennummer des Elementes j
Qs_j	Mantelreibungskraft am Knoten j [kN]
Qb	Spitzenkraft [kN]
r_o	Radius des Pfahles [m]
l_j	Länge des Elementes j [m]

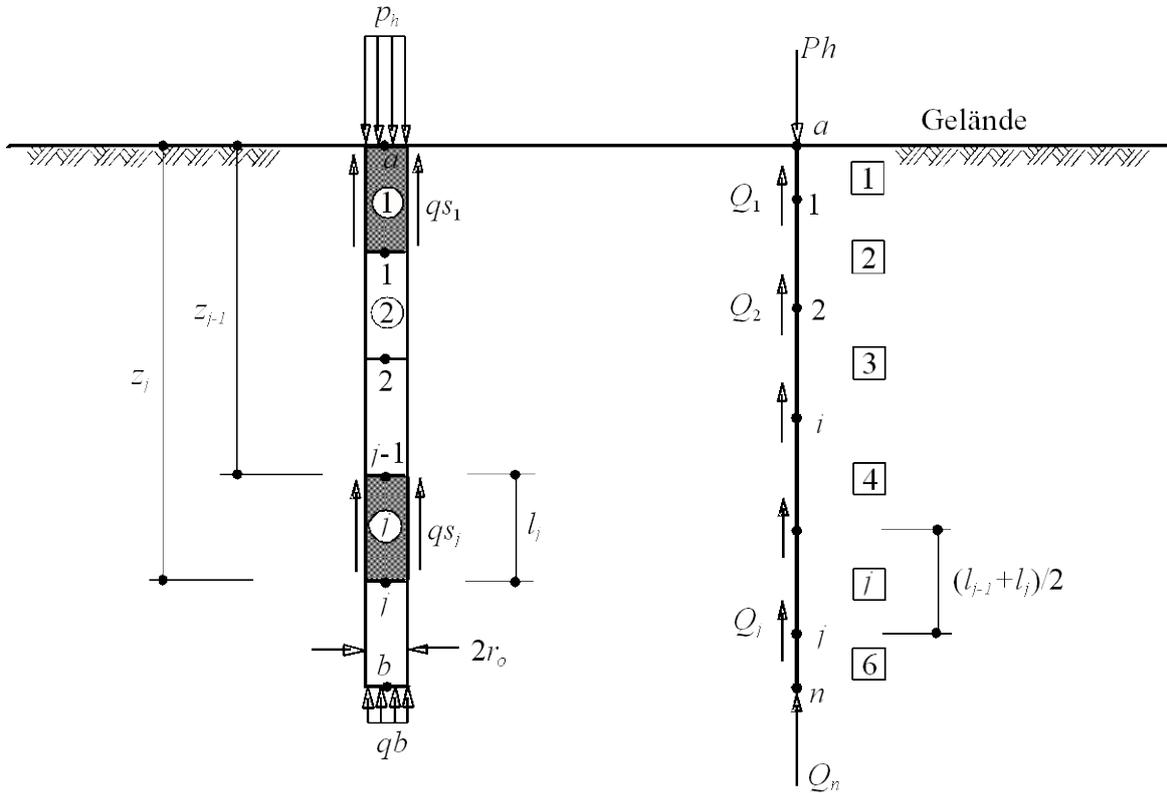
Eine Berücksichtigung der Interaktion zwischen dem Pfahl und dem Boden erfolgt, indem man den Boden als geschichteten oder als elastisch isotropen Halbraum darstellt. Unter der Annahme eines Knotens i , Bild 2-1b, ergibt sich die Setzung des Bodens s_i der benachbarten Knoten i infolge der Mantelreibungskräfte Qs_j an allen Knoten m und der Spitzenkraft Qb aus der Gleichung:

$$s_i = \sum_{j=1}^m f_{i,j} Qs_j + f_{i,b} Qb \quad (2.3)$$

wobei:

$f_{i,j}$	Flexibilitätskoeffizient des Knotens i infolge einer Einheitsmantelreibungskraft am Knoten j [m/kN]
-----------	---

$f_{i,b}$ Flexibilitätskoeffizient des Knotens i infolge einer Einheitsspitzenkraft auf dem Pfahlfuß b [m/kN]



a) Pfahlschaftelemente

b) Pfahlelemente als Linie

Bild 2-1 Geometrie und Elemente des Pfahles

Analog ergibt sich die Setzung im Pfahlfuß s_b :

$$s_b = \sum_{j=1}^m f_{b,j} Qs_j + f_{b,b} Qb \quad (2.4)$$

wobei:

$f_{b,j}$ Flexibilitätskoeffizient des Pfahlfußes b infolge einer Einheitsmantelreibungskraft am Knoten j [m/kN]

$f_{b,b}$ Flexibilitätskoeffizient des Pfahlfußes b infolge einer Einheitsspitzenkraft auf dem Pfahlfuß b [m/kN]

Die Gleichungen (2.3) und (2.4) für die Setzung des Bodens an allen Knoten des Pfahles können in einer allgemeinen Form neu geschrieben werden:

$$w_i = \sum_{j=1}^n I_{i,j} Q_j \quad (2.5)$$

wobei:

- Q_j Sohlkraft im Knoten j [kN]. Q_j stellt die Mantelreibungskräfte Q_{s_j} auf einem Schaftknoten j oder die Spitzenkraft Q_b dar
- w_i Setzung im Knoten i [m]. w_i stellt die Setzung s_j im Schaftknoten j oder die Setzung s_b im Fuß dar
- n Gesamtanzahl der Sohlknoten, $n = m+1$
- $I_{i,j}$ Flexibilitätskoeffizient des Knotens i infolge einer Einheitskraft im Knoten j [m/kN]. $I_{i,j}$ stellt den Flexibilitätskoeffizient $f_{i,j}$, $f_{i,b}$, $f_{b,j}$ oder $f_{b,b}$ dar. Diese Koeffizienten können mit Hilfe der elastischen Theorie nach der *Mindlinschen* Lösung abgeschätzt werden. Geschlossene Formgleichungen für diese Koeffizienten sind im nächsten Abschnitt beschrieben.

2.2.2 Bestimmung der Flexibilitätskoeffizienten

Im Jahr 1936 *Raymond Mindlin* präsentiert eine mathematische Lösung für die Bestimmung der Spannungen und Verschiebungen im Boden durch eine Punktlast wirkende unter der Oberfläche des halbunendlichen Medium. Die Lösung ist oft in der numerischen Berechnung von Pfahl-Plattengründungen verwenden und können andere Anwendungen in der Geotechnik haben, wie Untersuchung der Interaktion zwischen den Fundamenten und Erdanker oder vergrabene Strukturen.

Die Pionierautoren von Pfahl-Plattengründung wie *Poulos & Davis* (1968) and *Butterfield & Banerjee* (1971) integrierten numerisch die Flexibilitätskoeffizienten mit der *Mindlinschen* Lösung (*Mindlin* (1936)). Berechnung von Pfahl-Plattengründung mit numerischen Integration der Flexibilitätskoeffizienten führt erheblichen Berechnungen zu, besonders bei den großen Pfahlgruppenprobleme. Eine analytische Integration der Flexibilitätskoeffizienten mit der *Mindlinschen* Lösung wird präsentiert.

2.2.2.1 Flexibilitätskoeffizient $f_{i,b}$ eines Knotens i infolge einer Eigenlast auf der Basis b

Um die erhebliche Berechnungen bei der Anwendung der *Mindlinschen* Lösung zur Bestimmung von Flexibilitätskoeffizient der Knoten außerhalb der Basis zu vermeiden, wird kreisförmige Belastung an der Basis durch ein gleichwertiges Punktlast ersetzt. In diesem Fall wird der Flexibilitätskoeffizient direkt mit der *Mindlinschen* Lösung für die Bestimmung der Verschiebung w_{ij} [m] im Punkt i durch eine Punktlast Q_j [kN] wirkende im Punkt j unter der Oberfläche des halbunendlichen Medium (Bild 2-2) kann. Nach *Mindlinschen* Lösung wird die Verschiebung w_{ij} kann wie folgt ausgedrückt werden:

$$w_{ij} = f_{ij} Q_j \quad (2.6)$$

wobei f_{ij} wird durch *Mindlinschen* Lösung gegeben als:

$$f_{ij} = \frac{1}{16 \pi G_s (1 - \nu_s)} \left(\frac{3 - 4 \nu_s}{R_1} + \frac{8(1 - \nu_s)^2 - (3 - 4 \nu_s)}{R_2} + \frac{(z - c)^2}{R_1^3} + \frac{(3 - 4 \nu_s)(z + c)^2 - 2cz}{R_2^3} + \frac{6cz(z + c)^2}{R_2^5} \right) \quad (2.7)$$

wobei:

$$R_1 = \sqrt{r^2 + (z - c)^2}, \quad R_2 = \sqrt{r^2 + (z + c)^2} \text{ and}$$

c Tiefe der Punktlast Q_j [kN] von der Oberfläche, [m].

- z Tiefe der untersuchten Punkt i von der Oberfläche, [m].
 r Radialer Abstand zwischen den Punkten i und j , [m].
 $z-c$ Vertikaler Abstand zwischen den Punkten i und j , [m].
 $z+c$ Vertikaler Abstand zwischen den Punkten i und k , [m].
 f_{ij} Verschiebungsfaktor des Punktes i infolge einer Einheitslast im Punkt j , [m/kN].
 G_s Schubmodul des Bodens, [kN/m²].

$$G_s = \frac{E_s}{2(1 + \nu_s)}$$

E_s Elastizitätsmodul des Bodens, [kN/m²].

ν_s Poissonzahl des Bodens, [-].

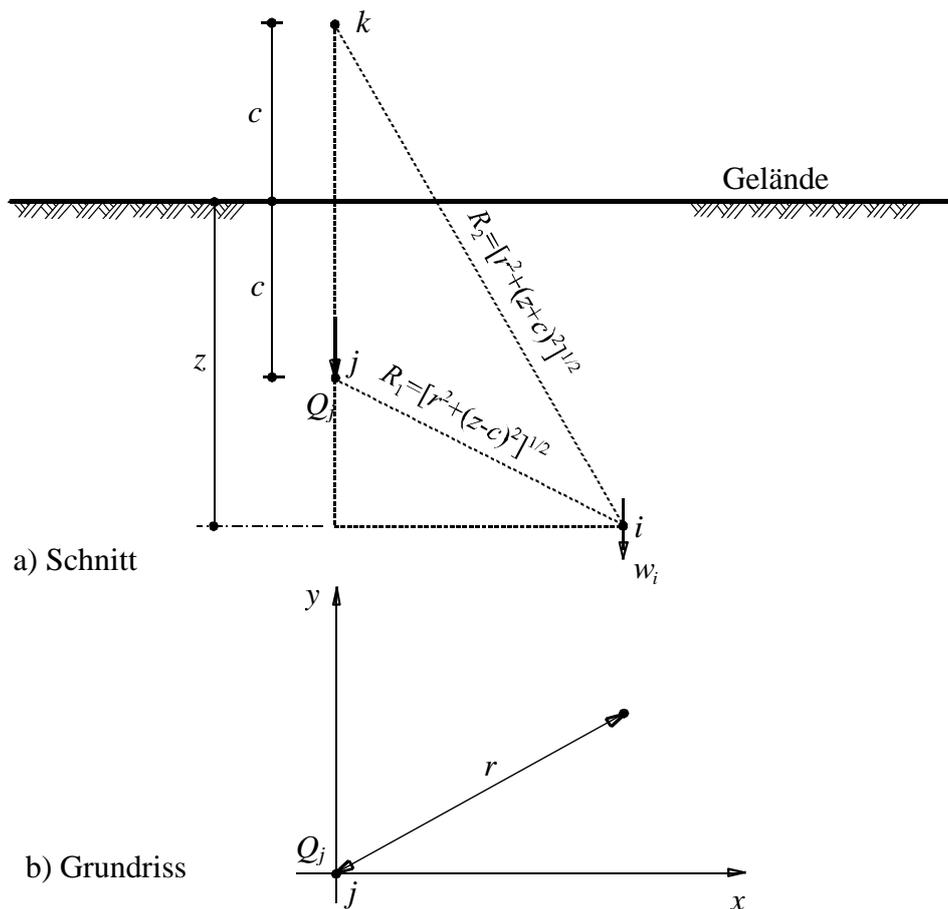


Bild 2-2 Geometrie des *Mindlinschen* Problems

Nun, der Flexibilitätskoeffizient $f_{i,b}$ [m/kN] eines Knotens i infolge einer Eigenlast $Q_b = 1$ [kN] auf der Basis b ist gleich der Verschiebungsfaktor f_{ij} . In Gl (2,7), r der radialer Abstand zwischen dem Pfahl des Punkts i und dem Pfahl der Basis b . Für den Pfahl der untersuchten Basis b , r ist gleich dem Radius der Basis r_0 .

2.2.2.2 Flexibilitätskoeffizient $f_{b,b}$ der Basis b infolge einer Eigenlast auf der Basis selbst

Die Basis b des Pfahles hat eine kreisförmige belastete Fläche des Durchmesser r_o [m] und einer Flächenlast $q = Q_b / \pi r_o^2$ [kN/m²], wie im Bild 2-3 gezeigt. Der Flexibilitätskoeffizient $f_{b,b}$ [m/kN] an der Basismitte b infolge einer Eigenlast $Q_b = 1$ [kN] auf der Basis selbst kann erhalten werden aus:

$$f_{b,b} = \frac{1}{\pi r_o^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_o} f_{ij} r dr d\theta \quad (2.8)$$

Die Integration des Flexibilitätskoeffizient kann analytisch wie folgt erhalten werden:

$$f_{b,b} = \frac{1}{8 \pi r_o^2 G_s (1 - \nu_s)} \left((3 - 4 \nu_s) r_o + \left[8 (1 - \nu_s)^2 - (3 - 4 \nu_s) \right] \left[\sqrt{r_o^2 + 4 c^2} - 2 c \right] \right. \\ \left. + \left[4 c^2 (3 - 4 \nu_s) - 2 c^2 \right] \left[\frac{1}{2 c} - \frac{1}{\sqrt{r_o^2 + 4 c^2}} \right] + \left[1 - \frac{8 c^4}{(r_o^2 + 4 c^2)^{3/2}} \right] \right) \quad (2.9)$$

Der Flexibilitätskoeffizient $f_{b,b}$ kann mit einem Faktor $\pi/4$ multipliziert werden, um den Einfluss der Basisstarrheit zu berücksichtigen. Dieser Faktor ist das Verhältnis der Oberfläche Verschiebung eines starren Kreis auf der Oberfläche eines Halbraum zu der Mitte Verschiebung eines entsprechenden gleichmäßigen belasteten Kreis.

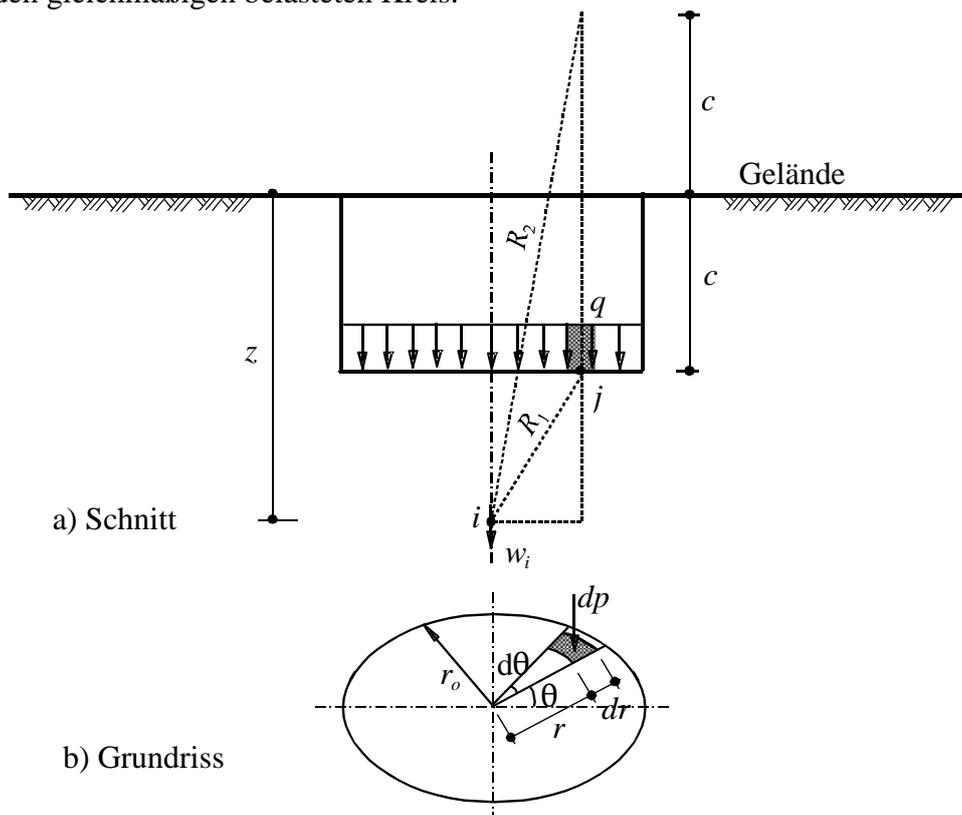


Bild 2-3 Geometrie der kreisförmigen belasteten Fläche für die Bestimmung der Verschiebung in der Mitte

2.2.2.3 Flexibilitätskoeffizient $f_{i,j}$ eines Knotens i infolge einer Mantelreibung auf einem Mantelknoten j

Um die erhebliche Berechnungen bei der Anwendung der *Mindlinschen* Lösung zur Bestimmung des Flexibilitätskoeffizient der Mantelreibung zu vermeiden, wird die Mantelreibung durch eine entsprechende Linienlast ersetzt. Das Mantelelement j des Pfahles hat eine Länge l [m] und eine Linienlast $T = Q_j / l$ [kN/m], wie im Bild 2-4 gezeigt. Der Flexibilitätskoeffizient $f_{i,j}$ [m/kN] eines Knoten i infolge einer Punktlast Q_j [kN] wirkende im Mantelelement j kann wie folgt erhalten werden:

$$f_{i,j} = \frac{1}{l} \int_{l_1}^{l_2} f_{ij} dc \quad (2.10)$$

Die Integration führt zu:

$$f_{i,j} = \frac{1}{16 \pi l G_s (1 - \nu_s)} (I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5) \quad (2.11)$$

wobei die Begriffe I_1 bis I_5 werden gegeben mit:

$$I_1 = (3 - 4 \nu_s) \ln \left[\frac{\sqrt{r_1^2 + (z - l_2)^2} - (z - l_2)}{\sqrt{r_1^2 + (z - l_1)^2} - (z - l_1)} \right] \quad (2.12)$$

$$I_2 = [8(1 - \nu_s)^2 - (3 - 4 \nu_s)] \ln \left[\frac{\sqrt{r_1^2 + (z + l_2)^2} + (z + l_2)}{\sqrt{r_1^2 + (z + l_1)^2} + (z + l_1)} \right] \quad (2.13)$$

$$I_3 = \ln \left[\frac{\sqrt{r_1^2 + (z - l_2)^2} - (z - l_2)}{\sqrt{r_1^2 + (z - l_1)^2} - (z - l_1)} \right] + \frac{z - l_2}{\sqrt{r_1^2 + (z - l_2)^2}} - \frac{z - l_1}{\sqrt{r_1^2 + (z - l_1)^2}} \quad (2.14)$$

$$I_4 = (3 - 4 \nu_s) \left(\ln \left[\frac{\sqrt{r_1^2 + (z + l_2)^2} + (z + l_2)}{\sqrt{r_1^2 + (z + l_1)^2} + (z + l_1)} \right] - \frac{(z + l_2)}{\sqrt{r_1^2 + (z + l_2)^2}} + \frac{(z + l_1)}{\sqrt{r_1^2 + (z + l_1)^2}} \right) - 2z \left(\frac{1}{\sqrt{r_1^2 + (z + l_1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + (z + l_2)^2}} + \frac{z(z + l_1)}{r_1^2 \sqrt{r_1^2 + (z + l_1)^2}} - \frac{z(z + l_2)}{r_1^2 \sqrt{r_1^2 + (z + l_2)^2}} \right) \quad (2.15)$$

$$I_5 = \frac{6z [r_1^4 - z(z + l_2)^3]}{3r_1^2 [r_1^2 + (z + l_2)^2]^{3/2}} - \frac{6z [r_1^4 + z(z + l_1)^3]}{3r_1^2 [r_1^2 + (z + l_1)^2]^{3/2}} - \frac{6z}{\sqrt{r_1^2 + (z + l_2)^2}} + \frac{6z}{\sqrt{r_1^2 + (z + l_1)^2}} \quad (2.16)$$

wobei:

- l_1 Starttiefe der Leinenlast T oder die Mantelreibung τ von der Oberfläche, [m].
- l_2 Endtiefe der Leinenlast T oder die Mantelreibung τ von der Oberfläche, [m].
- l Länge der Leinenlast T oder die Mantelreibung τ , [m].
- r_1 Radialer Abstand zwischen Punkt i und j [m].

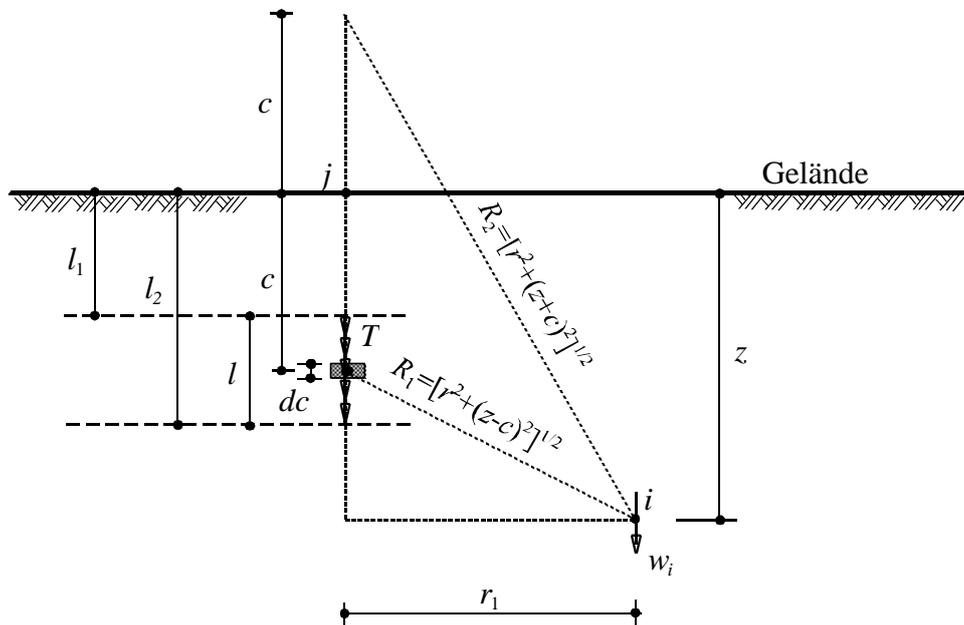


Bild 2-4 Geometrie der Linienlast

2.2.2.4 Flexibilitätskoeffizient $f_{b,j}$ der Basis b infolge einer Eigenmantelreibung auf einem Mantelknoten j

Die Basis b des Pfahles hat ein Durchmesser r_o [m], während das Mantelelement j hat eine Länge l [m] und eine Mantelreibung $\tau = Q_j / 2 \pi r_o l$ [kN/m²], wie im Bild 2-6 gezeigt. Der Flexibilitätskoeffizient $f_{b,j}$ [m/kN] auf der Mitte der Basis b infolge einer Eigenlast $Q_j = 1$ [kN] im Mantelelement j kann wie folgt erhalten werden:

$$f_{b,j} = \frac{l}{2 \pi l} \int_0^{2\pi} \int_{l_1}^{l_2} f_{ij} dc d\theta \quad (2.17)$$

Die Integration führt zu:

$$f_{b,j} = \frac{1}{16 \pi l G_s (1 - \nu_s)} (J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5) \quad (2.18)$$

Ersetzen r_1 mit r_o in Gln (2.12) bis (2.16) ergeben sich die Begriffe J_1 to J_5 .

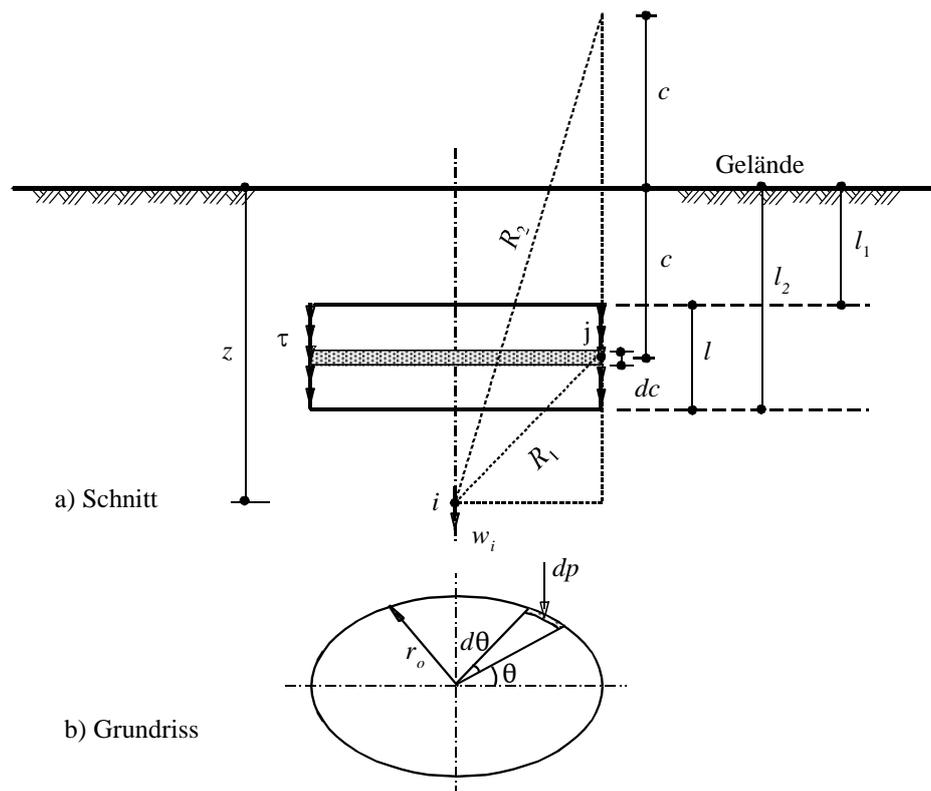


Bild 2-5 Geometrie der zylindrischen belasteten Fläche für die Bestimmung der Verschiebung in der Mitte

2.2.2.5 Mehrschichtenboden

Die vorherigen beschriebenen Flexibilitätskoeffizienten können nur für das isotrope elastische Halbraumbodenmedium angewandt werden. Für eine begrenzte Schicht können die Flexibilitätskoeffizienten erhalten werden, wie von *Poulos/ Davis* (1968) beschrieben wird. Als Beispiel ist der Flexibilitätskoeffizient für einen Punkt k in einer Schicht mit der Tiefe h dann:

$$f_{k,j}(h) = f_{k,j}(\infty) - f_{h,j}(\infty) \quad (3.19)$$

wobei:

$f_{k,j}(h)$ Flexibilitätskoeffizient für einen Punkt k in einer Schicht mit der Tiefe h infolge einer Einheitslast im Punkt j [m/kN]

$f_{k,j}(\infty)$ Flexibilitätskoeffizient für einen Punkt k für den Halbraum infolge einer Einheitslast im Punkt j [m/kN]

$f_{h,j}(\infty)$ Flexibilitätskoeffizient für einen Punkt innerhalb dem Halbraum direkt unter k an einer Tiefe h unter Gelände infolge einer Einheitslast im Punkt j [m/kN]

2.2.3 Elastische Berechnung eines Einzelfahles

2.2.3.1 Bodensetzung

Die Gleichung (2.5) für die Setzungen des Bodens an allen Knoten des Pfahles kann in Matrixform wie folgt geschrieben werden:

$$\{w\} = [Is] \{Q\} \quad (2.20)$$

wobei:

- $\{w\}$ n Setzungsvektor
- $\{Q\}$ n Sohlkraftvektor
- $[Is]$ $n*n$ Flexibilitätsmatrix des Bodens

Durch Inversion der Bodenflexibilitätsmatrix in Gl. (2.20) erhält man:

$$\{Q\} = [ks] \{w\} \quad (2.21)$$

wobei $[ks]$ $n*n$ die Bodensteifigkeitsmatrix ist, $[ks] = [Is]^{-1}$

Gleichung (2.21) kann wie folgt modifiziert werden:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ Qs_1 \\ Qs_2 \\ Qs_3 \\ \dots \\ Qb \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & \dots & k_{1,n} \\ 0 & k_{2,1} & k_{2,1} & k_{2,1} & \dots & k_{2,n} \\ 0 & k_{3,1} & k_{3,1} & k_{3,1} & \dots & k_{3,n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & k_{n,1} & k_{n,1} & k_{n,1} & \dots & k_{n,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \dots \\ sb \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

Gleichung (2.22) wird in komprimierter Matrixform wie folgt neu geschrieben:

$$\{Qs\} = [ke] \{s\} \quad (2.23)$$

wobei:

- $\{s\}$ $n+1$ Setzungsvektor, $\{s\} = \{0, s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, sb\}^T$
- $\{Qs\}$ $n+1$ Vektor der Sohlkräfte auf dem Pfahl, $\{Q\} = \{0, Qs_1, Qs_2, Qs_3, \dots, Qs_n, Qb\}^T$
- $[ke]$ $n+1 * n+1$ Bodensteifigkeitsmatrix

2.2.3.2 Pfahlverschiebung

Die Finite-Element-Methode wird für die Berechnung des Pfahles verwendet. Nur die axiale Kompression des Pfahles wird betrachtet, um die Verschiebungen der Pfahlelemente festzustellen. Die Steifigkeitsmatrix des Balkens des Pfahlelements i wird wie folgt ausgedrückt:

$$[kp]_i = \frac{Ep \cdot Ap_i}{l_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

wobei:

- Ep Elastizitätsmodul des Pfahlmaterials $[kN/m^2]$
- Ap_i Querschnittsfläche des Pfahlelements i $[m^2]$

l_i Länge des Pfahlelements i [m]

Entsprechend der Finite-Element-Methode kann die zusammengesetzte Gleichung der axialen Steifigkeitsmatrix für den Pfahl wie folgt geschrieben werden:

$$[kp]\{\delta\} = \{P\} - \{Qs\} \quad (2.25)$$

wobei:

$\{\delta\}$ $n+1$ Verschiebungsvektor

$\{P\}$ $n+1$ Vektor der einwirkenden Pfahllast, $\{P\} = \{Ph, 0, 0, 0, \dots, 0\}^T$

$[kp]$ $n+1 * n+1$ Stabsteifigkeitsmatrix

Setzt man Gl. (2.23) in Gl. (2.25) ein, ergibt sich:

$$[kp]\{\delta\} = \{P\} - [ke]\{s\} \quad (2.26)$$

Betrachtet man die Kompatibilität zwischen der Pfahlverschiebung δ_i und der Bodensetzung s_i , kann die folgende Gleichung erhalten werden:

$$[[kp] + [ke]]\{\delta\} = \{P\} \quad (2.27)$$

Nach Lösen des obigen linearen Gleichungssystems erhält man die Verschiebung an jedem Knoten, welche gleich der Bodensetzung an dem jeweiligen Knoten ist. Setzt man die erhaltenen Bodensetzungen aus Gl. (2.27) in Gl. (2.23) ein, erhält man die unbekanntes Sohlkräfte am Pfahl.

2.2.4 Starre Berechnung eines Einzelpfahles

Die Setzung eines starren Pfahles ist gleichmäßig. Deshalb sind die Unbekannten des Problems n Sohlkräfte Q_j und die starre Körperverschiebung w_0 . Die Ableitung der gleichförmigen Setzung für den starren Pfahl kann durch Gleichsetzen der Setzung w_i in Gl. (2.5) bei einer gleichförmigen Verschiebung w_0 an allen Knoten an dem Pfahl durchgeführt werden. Nach Expandierung der Gl. (2.5) für alle Knoten ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} w_1 = w_0 &= I_{1,1}Q_1 + I_{1,2}Q_2 + I_{1,3}Q_3 + \dots + I_{1,n}Q_n \\ w_2 = w_0 &= I_{2,1}Q_1 + I_{2,2}Q_2 + I_{2,3}Q_3 + \dots + I_{2,n}Q_n \\ w_3 = w_0 &= I_{3,1}Q_1 + I_{3,2}Q_2 + I_{3,3}Q_3 + \dots + I_{3,n}Q_n \\ &\dots \\ w_n = w_0 &= I_{n,1}Q_1 + I_{n,2}Q_2 + I_{n,3}Q_3 + \dots + I_{n,n}Q_n \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

Sohlkräfte können als eine Funktion in den Ausdrücken $k_{i,j}$ der Bodensteifigkeitsmatrix $[ks]$ wie folgt geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= k_{1,1}wo + k_{1,2}wo + k_{1,3}wo + \dots + k_{1,n}wo \\ Q_2 &= k_{2,1}wo + k_{2,2}wo + k_{2,3}wo + \dots + k_{2,n}wo \\ Q_3 &= k_{3,1}wo + k_{3,2}wo + k_{3,3}wo + \dots + k_{3,n}wo \\ &\dots \\ Q_n &= k_{n,1}wo + k_{n,2}wo + k_{n,3}wo + \dots + k_{n,n}wo \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

Summiert man alle Sohlkräfte, ergibt sich die folgende Gleichung:

$$\sum_{i=1}^n Q_i = wo \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{i,j} \quad (2.30)$$

Gleichung (2.30) kann wie folgt neu geschrieben werden:

$$Ph = ks wo \quad (2.31)$$

wobei die einwirkende Kraft Ph [kN] die Summe aller Sohlkräfte Q_i ist:

$$Ph = \sum_{i=1}^n Q_i \quad (2.32)$$

während der zusammengesetzte Koeffizient ks [kN/m] die Summe aller Koeffizienten der Steifigkeitsmatrix $[ks]$ ist:

$$ks = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{i,j} \quad (2.33)$$

Die Gleichung (2.31) zeigt die lineare Beziehung zwischen der einwirkenden Kraft am Pfahlkopf und der gleichförmigen Setzung wo , welche analog zum *Hookeschen* Gesetz ist. Deshalb kann der zusammengesetzte Koeffizient ks verwendet werden, um die Gesamtsteifigkeit des Bodens am Pfahl zu bestimmen. Im Fall eines Einzelpfahles ist die Ermittlung der Sohlkräfte Q_i leicht. Setzt man den Wert wo aus der Gleichung (2.31) in die Gleichung (2.29) ein, erhält man die Gleichung (2.34) mit n unbekanntem Sohlkräften Q_i :

$$Q_i = \frac{Ph \sum_{j=1}^n k_{i,j}}{ks} \quad (2.34)$$

Im Falle des isotropen elastischen Halbraumbodens und beim starren Pfahl ist die Gleichung (2.34) der Sohlkräfte unabhängig vom Elastizitätsmodul des Bodens E_s .

2.3 Modellierung einer starren Pfahlgruppe (freistehende starre Platte)

Zunächst wurde die zusammengesetzte Koeffiziententechnik zur linearen Berechnung der Pfahlgruppe angewendet. Dann wird sie erweitert, um den nichtlinearen Effekt zu berücksichtigen. Im nächsten Abschnitt wird die Bodensteifigkeitsmatrix mit Hilfe der zusammengesetzten Koeffizienten für die Pfahlgruppe formuliert.

2.3.1 Bodensteifigkeit einer Pfahlgruppe

Das Ableiten der Gleichungen für die Pfahlgruppe erfordert die Einbeziehung des Einflusses der Interaktion der Pfahlgruppe. Die freistehende Platte auf der Pfahlgruppe im Bild 2-6 wird als Beispiel betrachtet. Sie besteht aus $n_p = 4$ Pfählen und hat eine Gesamtknotenzahl von $n = 23$.

Die Beziehung zwischen Pfahlsetzung und Sohlkraft im Bild 2-6 kann in der nachfolgenden Matrix wie folgt ausgedrückt werden:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} Q_1 \\ \dots \\ Q_6 \end{array} \right\}_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} Q_7 \\ \dots \\ Q_{12} \end{array} \right\}_2 \\ \left\{ \begin{array}{l} Q_{13} \\ \dots \\ Q_{17} \end{array} \right\}_3 \\ \left\{ \begin{array}{l} Q_{18} \\ \dots \\ Q_{23} \end{array} \right\}_4 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} I_{1,1} & \dots & I_{1,6} & I_{1,7} & \dots & I_{1,12} & I_{1,13} & \dots & I_{1,17} & I_{1,18} & \dots & I_{1,23} \\ \dots & \dots \\ I_{6,1} & \dots & I_{6,6} & I_{6,7} & \dots & I_{6,12} & I_{6,13} & \dots & I_{6,17} & I_{6,18} & \dots & I_{6,23} \\ I_{7,1} & \dots & I_{7,6} & I_{7,7} & \dots & I_{7,12} & I_{7,13} & \dots & I_{7,17} & I_{7,18} & \dots & I_{7,23} \\ \dots & \dots \\ I_{12,1} & \dots & I_{12,6} & I_{12,7} & \dots & I_{12,12} & I_{12,13} & \dots & I_{12,17} & I_{12,18} & \dots & I_{12,23} \\ I_{13,1} & \dots & I_{13,6} & I_{13,7} & \dots & I_{13,12} & I_{13,13} & \dots & I_{13,17} & I_{13,18} & \dots & I_{13,23} \\ \dots & \dots \\ I_{17,1} & \dots & I_{17,6} & I_{17,7} & \dots & I_{17,12} & I_{17,13} & \dots & I_{17,17} & I_{17,18} & \dots & I_{17,23} \\ I_{18,1} & \dots & I_{18,6} & I_{18,7} & \dots & I_{18,12} & I_{18,13} & \dots & I_{18,17} & I_{18,18} & \dots & I_{18,23} \\ \dots & \dots \\ I_{23,1} & \dots & I_{23,6} & I_{23,7} & \dots & I_{23,12} & I_{23,13} & \dots & I_{23,17} & I_{23,18} & \dots & I_{23,23} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} w_1 \\ \dots \\ w_6 \end{array} \right\}_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} w_7 \\ \dots \\ w_{12} \end{array} \right\}_2 \\ \left\{ \begin{array}{l} w_{13} \\ \dots \\ w_{17} \end{array} \right\}_3 \\ \left\{ \begin{array}{l} w_{18} \\ \dots \\ w_{23} \end{array} \right\}_4 \end{array} \right\} \quad (2.35)$$

Durch Inversion der Gesamtflexibilitätsmatrix in Gl. (2.35) erhält man die gesamte Bodensteifigkeitsmatrix des Systems für die Pfahlgruppe:

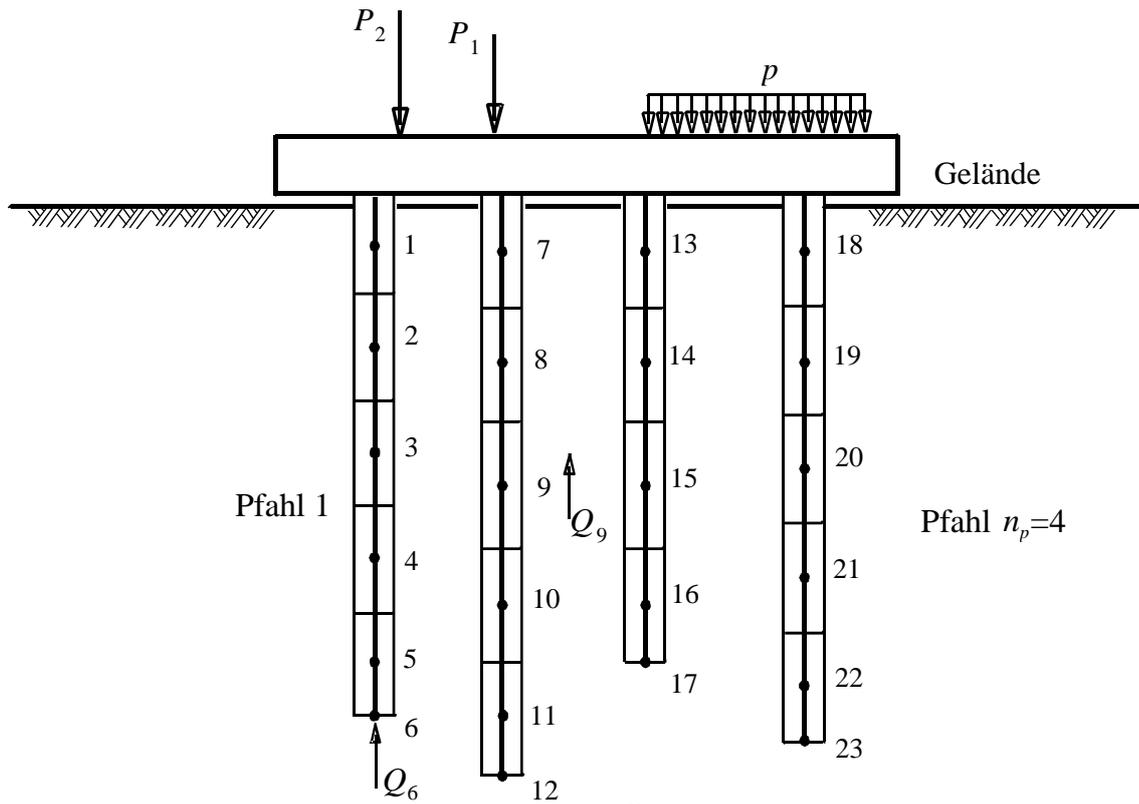
$$\begin{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} w_1 \\ \dots \\ w_6 \end{matrix} \right\}_1 \\ \left\{ \begin{matrix} w_7 \\ \dots \\ w_{12} \end{matrix} \right\}_2 \\ \left\{ \begin{matrix} w_{13} \\ \dots \\ w_{17} \end{matrix} \right\}_3 \\ \left\{ \begin{matrix} w_{18} \\ \dots \\ w_{23} \end{matrix} \right\}_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & \dots & k_{1,6} & k_{1,7} & \dots & k_{1,12} & k_{1,13} & \dots & k_{1,17} & k_{1,18} & \dots & k_{1,23} \\ \dots & \dots \\ k_{6,1} & \dots & k_{6,6} & k_{6,7} & \dots & k_{6,12} & k_{6,13} & \dots & k_{6,17} & k_{6,18} & \dots & k_{6,23} \\ k_{7,1} & \dots & k_{7,6} & k_{7,7} & \dots & k_{7,12} & k_{7,13} & \dots & I_{7,17} & k_{7,18} & \dots & k_{7,23} \\ \dots & \dots \\ k_{12,1} & \dots & k_{12,6} & k_{12,7} & \dots & k_{12,12} & k_{12,13} & \dots & k_{12,17} & k_{12,18} & \dots & k_{12,23} \\ k_{13,1} & \dots & k_{13,6} & k_{13,7} & \dots & k_{13,12} & k_{13,13} & \dots & k_{13,17} & k_{13,18} & \dots & k_{13,23} \\ \dots & \dots \\ k_{17,1} & \dots & k_{17,6} & k_{17,7} & \dots & k_{17,12} & k_{17,13} & \dots & k_{17,17} & k_{17,18} & \dots & k_{17,23} \\ k_{18,1} & \dots & k_{18,6} & k_{18,7} & \dots & k_{18,12} & k_{18,13} & \dots & k_{18,17} & k_{18,18} & \dots & k_{18,23} \\ \dots & \dots \\ k_{23,1} & \dots & k_{23,6} & k_{23,7} & \dots & k_{23,12} & k_{23,13} & \dots & k_{23,17} & k_{23,18} & \dots & k_{23,23} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} Q_1 \\ \dots \\ Q_6 \end{matrix} \right\}_1 \\ \left\{ \begin{matrix} Q_7 \\ \dots \\ Q_{12} \end{matrix} \right\}_2 \\ \left\{ \begin{matrix} Q_{13} \\ \dots \\ Q_{17} \end{matrix} \right\}_3 \\ \left\{ \begin{matrix} Q_{18} \\ \dots \\ Q_{23} \end{matrix} \right\}_4 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

dabei ist $k_{i,j}$ [kN/m] der Steifigkeitskoeffizient der Bodensteifigkeitsmatrix

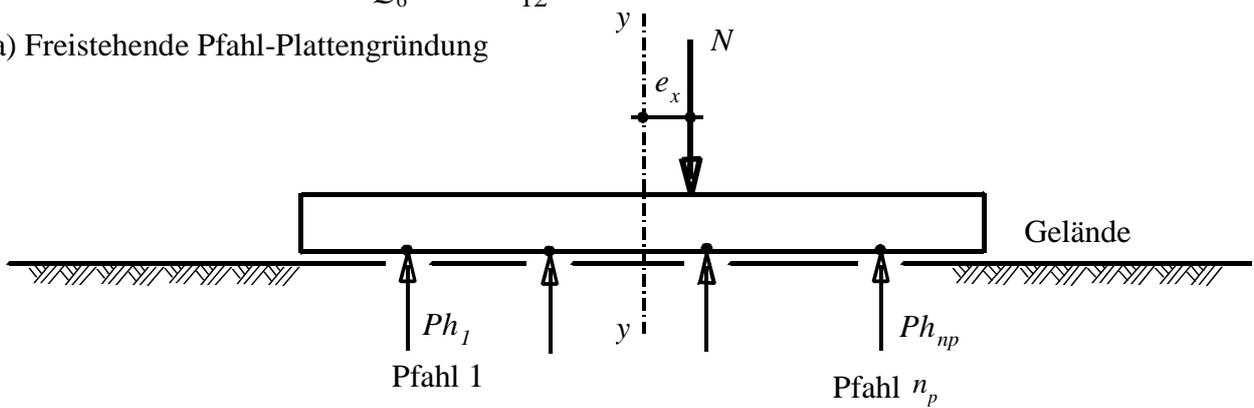
Aufgrund der großen Starrheit des Pfahles entlang der Längsrichtung ist die Setzung an jedem Pfahl selbst konstant. Diese Annahme kann die Beziehung zwischen der konstanten Pfahlsetzung und der Kraft am Pfahlkopf in den Pfahlgruppen herstellen. Dies bedeutet, dass man alle Setzungen an jedem Pfahl durch eine konstante Setzung gleichstellen kann.

Durch Summierung der Reihen und Spalten, die dem Pfahl i in Gl. (2.36) entsprechen, erhält man:

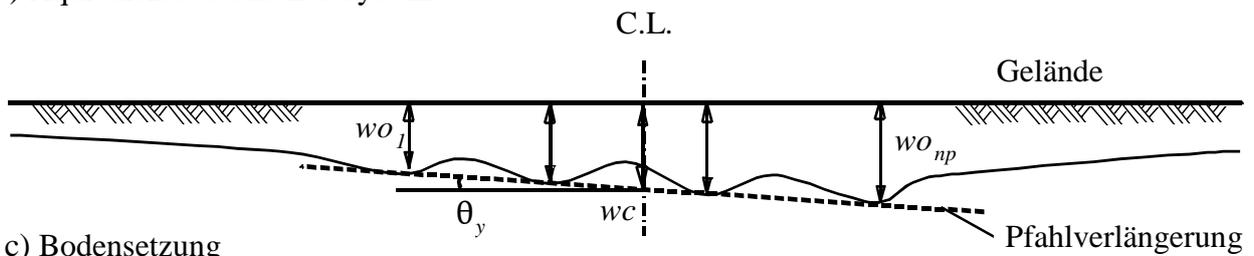
$$\begin{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} \sum_{i=1}^6 Q_i \\ \dots \\ \sum_{i=18}^{23} Q_i \end{matrix} \right\}_1 \\ \left\{ \begin{matrix} \sum_{i=7}^{12} Q_i \\ \dots \\ \sum_{i=18}^{23} Q_i \end{matrix} \right\}_2 \\ \left\{ \begin{matrix} \sum_{i=13}^{17} Q_i \\ \dots \\ \sum_{i=18}^{23} Q_i \end{matrix} \right\}_3 \\ \left\{ \begin{matrix} \sum_{i=18}^{23} Q_i \end{matrix} \right\}_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 k_{i,j} & \sum_{i=1}^6 \sum_{j=7}^{12} k_{i,j} & \sum_{i=1}^6 \sum_{j=13}^{17} k_{i,j} & \sum_{i=1}^6 \sum_{j=18}^{23} k_{i,j} \\ \sum_{i=7}^{12} \sum_{j=1}^6 k_{i,j} & \sum_{i=7}^{12} \sum_{j=7}^{12} k_{i,j} & \sum_{i=7}^{12} \sum_{j=13}^{17} k_{i,j} & \sum_{i=7}^{12} \sum_{j=18}^{23} k_{i,j} \\ \sum_{i=13}^{17} \sum_{j=1}^6 k_{i,j} & \sum_{i=13}^{17} \sum_{j=7}^{12} k_{i,j} & \sum_{i=13}^{17} \sum_{j=13}^{17} k_{i,j} & \sum_{i=13}^{17} \sum_{j=18}^{23} k_{i,j} \\ \sum_{i=18}^{23} \sum_{j=1}^6 k_{i,j} & \sum_{i=18}^{23} \sum_{j=7}^{12} k_{i,j} & \sum_{i=18}^{23} \sum_{j=13}^{17} k_{i,j} & \sum_{i=18}^{23} \sum_{j=18}^{23} k_{i,j} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} w_{O_1} \\ \dots \\ w_{O_4} \end{matrix} \right\}_1 \\ \left\{ \begin{matrix} w_{O_2} \\ \dots \\ w_{O_4} \end{matrix} \right\}_2 \\ \left\{ \begin{matrix} w_{O_3} \\ \dots \\ w_{O_4} \end{matrix} \right\}_3 \\ \left\{ \begin{matrix} w_{O_4} \end{matrix} \right\}_4 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$



a) Freistehende Pfahl-Plattengründung



b) Äquivalentes statisches System



c) Bodensetzung

Bild 2-6 Modellierung der freistehenden Platte auf einer Pfahlgruppe

Dementsprechend kann Gl. (2.37) für die einfache Pfahlgruppe im Bild 2-6 in den zusammengesetzten Koeffizienten wie folgt neu geschrieben werden:

$$\begin{Bmatrix} Ph_1 \\ Ph_2 \\ Ph_3 \\ Ph_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3} & K_{1,4} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & K_{2,3} & K_{2,4} \\ K_{3,1} & K_{3,2} & K_{3,3} & K_{3,4} \\ K_{4,1} & K_{4,2} & K_{4,3} & K_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} wo_1 \\ wo_2 \\ wo_3 \\ wo_4 \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

wobei:

wo_i Setzung im Pfahl i [m]

$K_{i,j}$ zusammengesetzter Koeffizient [kN/m]. Allgemein gilt $K_{i,j} = \sum_{n=n1}^{n2} \sum_{m=m1}^{m2} k_{n,m}$

Ph_i Kraft am Pfahlkopf des Pfahles i [kN]. Sie ergibt sich aus der Summe aller Sohlkräfte in diesem Pfahl. Allgemein gilt $Ph_i = \sum_{n=n1}^{n2} Q_n$

$n1 = 1 + \sum_{l=1}^{i-1} nn(l)$, $n2 = i$, $m1 = 1 + \sum_{l=1}^{j-1} nn(l)$ und $m2 = j$

$nn(l)$ Nummer der Knoten im Pfahl l

2.3.2 Berechnung einer Pfahlgruppe

Im allgemeinen Fall einer vollständig starren Platte ist die lineare Setzung der Platte an irgendeinem Punkt durch die vertikale Verschiebung w_c der Mitte und durch zwei Verdrehungen θ_x um die x -Achse und θ_y um die y -Achse definiert. Die Setzung des Pfahles i mit den Koordinaten x und y , bezogen auf die Mitte, muss kompatibel mit der Setzung der Platte an diesem Punkt sein. Durch Bestimmen der Verschiebung w_c und der Verdrehungen θ_x und θ_y erhält man die unbekanntenen Pfahlkopfkräfte und Setzungen.

2.3.2.1 Fall einer konstanten Setzung ($e_x = 0$ und $e_y = 0$)

Für eine freistehende Platte mit einer mittigen Last ist die Setzung konstant. Deshalb ist die Unbekannte des Problems auf n_p Pfahlkopfkräfte Ph_i und die starre Körperverschiebung w_c auf allen Pfählen reduziert. Folglich kann man die Ableitung der konstanten Setzung für die starre freistehende Platte mit der Umrechnung der Setzung wo_i durch eine konstante Verschiebung w_c an allen Pfählen der Pfahlgruppe erhalten. Nach Expandierung der Gl. (2.38) für alle Pfähle ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned}
 Ph_1 &= K_{1,1}wc + K_{1,2}wc + K_{1,3}wc + \dots + K_{1,n_p}wc \\
 Ph_2 &= K_{2,1}wc + K_{2,2}wc + K_{2,3}wc + \dots + K_{2,n_p}wc \\
 Ph_3 &= K_{3,1}wc + K_{3,2}wc + K_{3,3}wc + \dots + K_{3,n_p}wc \\
 &\dots \\
 Ph_{n_p} &= K_{n_p,1}wc + K_{n_p,2}wc + K_{n_p,3}wc + \dots + K_{n_p,n_p}wc
 \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

Durch Summierung aller Kräfte auf den Pfahlköpfen ergibt sich folgende Beziehung:

$$\sum_{i=1}^{n_p} Ph_i = wc \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{n_p} K_{i,j} \quad (2.40)$$

Gleichung (2.40) kann in einer einfachen Form wie folgt neu geschrieben werden:

$$N = Ks wc \quad (2.41)$$

wobei die resultierende Kraft N die Summe aller Kräfte Ph_i auf den Pfahlköpfen ist:

$$N = \sum_{i=1}^{n_p} Ph_i \quad (2.42)$$

während der Modul Ks die Summe aller Ausdrücke $K_{i,j}$ ist.

$$Ks = \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{n_p} K_{i,j} \quad (2.43)$$

Die Gleichung (2.41) gibt die lineare Beziehung zwischen der einwirkenden resultierenden Kraft N der Pfahlgruppe und die konstante Setzung wc an, welche analog zum *Hookeschen* Gesetz ist. Der Modul Ks ist die gesamte Bodensteifigkeit der Pfahlgruppe.

Durch Einsetzen der Verschiebung wc in Gl. (2.39) erhält man die Gl. (2.44) mit n_p unbekanntem Pfahlkopfkräften Ph_i .

$$Ph_i = wc \sum_{j=1}^{n_p} K_{i,j} \quad (2.44)$$

Die Gleichung (2.44) stellt die lineare Beziehung zwischen der Kraft am Pfahlkopf und die dazu gehörige Setzung in der Pfahlgruppe dar. Sie kann in vereinfachter Form wie folgt neu geschrieben werden:

$$Ph_i = ks_i wc \quad (2.45)$$

wobei ks_i [kN/m] der Modul der Bodensteifigkeit um den Pfahl i in der Pfahlgruppe ist. Er wird angegeben durch:

$$ks_i = \sum_{j=1}^{n_p} K_{i,j} \quad (2.46)$$

2.3.2.2 Fall einer einzelnen exzentrischen Last ($e_x \neq 0$)

Bei der starren Platte bestehen zwischen den Setzungen w_{O_i} im Pfahl i mit dem Abstand x_i vom Geometrie­flächenschwerpunkt im Fall einer einzelnen exzentrischen Last in x -Richtung die folgenden geometrischen Beziehungen:

$$w_{O_i} = wc + x_i \tan \theta_y \quad (2.47)$$

wobei θ_y [Grad] der Verdrehungswinkel der Platte um die y -Achse ist.

Analog zur Ableitung von wc werden die Kräfte auf den Pfahlköpfen in der Gl. (2.39) erweitert:

$$\left. \begin{aligned} Ph_1 &= K_{1,1} w_{O1} + K_{1,2} w_{O2} + K_{1,3} w_{O3} + \dots + K_{1,n_p} w_{O_{n_p}} \\ Ph_2 &= K_{2,1} w_{O1} + K_{2,2} w_{O2} + K_{2,3} w_{O3} + \dots + K_{2,n_p} w_{O_{n_p}} \\ Ph_3 &= K_{3,1} w_{O1} + K_{3,2} w_{O2} + K_{3,3} w_{O3} + \dots + K_{3,n_p} w_{O_{n_p}} \\ &\dots \\ Ph_{n_p} &= K_{n_p,1} w_{O1} + K_{n_p,2} w_{O2} + K_{n_p,3} w_{O3} + \dots + K_{n_p,n_p} w_{O_{n_p}} \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

Multipliziert man beide Seiten einer Reihe i in der Gl. (2.48) mit x_i , erhält man das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} Ph_1 x_1 &= x_1 K_{1,1} w_{O1} + x_1 K_{1,2} w_{O2} + x_1 K_{1,3} w_{O3} + \dots + x_1 K_{1,n_p} w_{O_{n_p}} \\ Ph_2 x_2 &= x_2 K_{2,1} w_{O1} + x_2 K_{2,2} w_{O2} + x_2 K_{2,3} w_{O3} + \dots + x_2 K_{2,n_p} w_{O_{n_p}} \\ Ph_3 x_3 &= x_3 K_{3,1} w_{O1} + x_3 K_{3,2} w_{O2} + x_3 K_{3,3} w_{O3} + \dots + x_3 K_{3,n_p} w_{O_{n_p}} \\ &\dots \\ Ph_{n_p} x_{n_p} &= x_{n_p} K_{n_p,1} w_{O1} + x_{n_p} K_{n_p,2} w_{O2} + x_{n_p} K_{n_p,3} w_{O3} + \dots + x_{n_p} K_{n_p,n_p} w_{O_{n_p}} \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

Um die Sohlkräfte aus der Gl. (2.49) zu eliminieren, bildet man die Summe aller $Ph_i x_i$ wie folgt:

$$\sum_{i=1}^{n_p} Ph_i x_i = \sum_{i=1}^{n_p} x_i \sum_{j=1}^{n_p} K_{i,j} w_{O_j} \quad (2.50)$$

Setzt man die Gl. (2.47) in Gl. (2.50) ein, ergibt sich:

$$\sum_{i=1}^{n_p} Ph_i x_i = \sum_{i=1}^{n_p} x_i \sum_{j=1}^{n_p} K_{i,j} (wc + x_j \tan \theta_y) \quad (2.51)$$

Allerdings muss das Moment infolge der resultierenden N um die y -Achse gleich der Summe der Momente infolge aller Kräfte auf den Pfahlköpfen Ph_i um diese Achse sein:

$$N e_x = Ph_1 x_1 + Ph_2 x_2 + Ph_3 x_3 + \dots + Ph_{n_p} x_{n_p} = \sum_{i=1}^{n_p} Ph_i x_i \quad (2.52)$$

Durch Einsetzen der Gl. (2.51) in die Gl. (2.52) werden die Kräfte auf den Pfahlköpfen aus der Gl. (2.52) eliminiert. Die starre Verdrehung θ_y um die y -Achse wird angegeben durch:

$$\tan \theta_y = \frac{N e_x - wc \sum_{i=1}^{n_p} x_i \sum_{j=1}^{n_p} K_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n_p} x_i \sum_{j=1}^{n_p} K_{i,j} x_j} \quad (2.53)$$

Durch Einsetzen des Wertes von $\tan \theta_y$ in Gl. (2.47) erhält man n_p unbekannte Setzungen w_{o_i} . Dann werden die Setzungen w_{o_i} in der Gl. (2.48) substituiert und man erhält n_p unbekannte Kräfte auf den Pfahlköpfen Ph_i :

$$Ph_i = wc \sum_{j=1}^{n_p} K_{i,j} + \tan \theta_y \sum_{j=1}^{n_p} x_i K_{i,j} \quad (2.54)$$

Die Steifigkeit ks_i des benachbarten Bodens am Pfahl i in der Pfahlgruppe ergibt sich aus:

$$ks_i = \frac{Ph_i}{wc + x_i \tan \theta_y} \quad (2.55)$$

2.3.2.3 Fall einer einzelnen exzentrischen Last ($e_y \neq 0$)

Die Setzung w_{o_i} am Pfahl i , der einen Abstand y_i vom Geometrieflächenschwerpunkt im Fall einer exzentrischen Einzellast um die y -Achse hat, ist gegeben durch:

$$w_{o_i} = wc + y_i \tan \theta_x \quad (2.56)$$

Die Ableitung einer freistehenden starren Platte im Fall einer exzentrischen Last um die y -Achse kann in ähnlicher Weise wie beim oben genannten Verfahren durchgeführt werden, was zu der folgenden Gl. (2.57) der Verdrehung θ_x um die x -Achse führt:

$$\tan \theta_x = \frac{N e_y - wc \sum_{i=1}^{n_p} y_i \sum_{j=1}^{n_p} K_{i,j}}{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{j=1}^{n_p} K_{i,j} y_j} \quad (2.57)$$

während die Kraft am Pfahl folgendermaßen berechnet wird:

$$Ph_i = wc \sum_{j=1}^{n_p} K_{i,j} + \tan \theta_x \sum_{j=1}^{n_p} y_j K_{i,j} \quad (2.58)$$

Die Steifigkeit ks_i des benachbarten Bodens am Pfahl i in der Pfahlgruppe erhält man durch:

$$ks_i = \frac{Ph_i}{wc + y_i \tan \theta_x} \quad (2.59)$$

Allgemeiner Fall einer doppelten exzentrischen Last ($e_x \neq 0$ und $e_y \neq 0$)

Die Setzung w_{o_i} im allgemeinen Fall einer exzentrischen Last an jedem möglichen Pfahl i mit den Koordinaten x_i und y_i vom Geometrieflächenschwerpunkt wird berechnet durch:

$$w_{o_i} = wc + x_i \tan \theta_y + y_i \tan \theta_x \quad (2.60)$$

während die Kraft am Pfahlkopf gegeben ist durch:

$$Ph_i = wc \sum_{j=1}^{n_p} K_{i,j} + \tan \theta_y \sum_{j=1}^{n_p} x_j K_{i,j} + \tan \theta_x \sum_{j=1}^{n_p} y_j K_{i,j} \quad (2.61)$$

Die Steifigkeit ks_i des benachbarten Bodens am Pfahl i in der Pfahlgruppe wird gegeben durch:

$$ks_i = \frac{Ph_i}{wc + x_i \tan \theta_y + y_i \tan \theta_x} \quad (2.62)$$

Sobald die Setzungen w_{o_i} an den Pfählen festgestellt sind, können die Sohlkräfte entlang des Pfahlschaftes und an der Pfahlspitze durch die Gl. (2.35) errechnet werden.

2.4 Modellierung einer Pfahl-Plattengründung

2.4.1 Bodensteifigkeit einer Pfahl-Plattengründung

Für die komplette Berechnung einer Pfahl-Plattengründung muss die Interaktion Pfahl-Boden-Platte und Platte-Boden-Platte zusätzlich zu der Interaktion Pfahl-Boden-Pfahl in Betracht gezogen werden. Um die Formulierung der zusammengesetzten Koeffiziententechnik für Pfahl-Plattengründungen zu veranschaulichen, wird die einfache Pfahl-Plattengründung im Bild 2-7 betrachtet. Sie besteht aus $n_p = 4$ Pfählen und hat eine Gesamtkontaktknotenanzahl von $n_{pr} = 33$ der Platte und der Pfähle mit dem Boden. Wenn die Platte alleine ohne Pfähle berechnet wird, reduziert sich die Anzahl ihrer Knoten auf $n_r = 14$. In der Berechnung wird die Kontaktfläche in dreieckige und/ oder rechteckige Elemente unterteilt, während der Pfahlschaft in zylinderförmige Elemente und der Pfahlfuß in kreisförmige Elemente unterteilt werden. Der Sohldruck unter der Platte, auf den Pfahlschäften oder auf den Pfahlfüßen wird durch eine Reihe von Sohlkräften an den Knoten dargestellt. Für die Gruppe der 33 Knoten der Pfahl-Plattengründung wird die Beziehung zwischen den Bodensetzungen und den Sohlkräften wie folgt ausgedrückt:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \left. \begin{matrix} w_3 \\ \dots \\ w_8 \end{matrix} \right\} p_1 \\ w_9 \\ w_{10} \\ \left. \begin{matrix} w_{11} \\ \dots \\ w_{16} \end{matrix} \right\} p_2 \\ \dots \\ w_{33} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_{1,1} & I_{1,2} & I_{1,3} & \dots & I_{1,8} & I_{1,9} & I_{1,10} & I_{1,11} & \dots & I_{1,16} & \dots & I_{1,33} \\ I_{2,1} & I_{2,2} & I_{2,3} & \dots & I_{2,8} & I_{2,9} & I_{2,10} & I_{2,11} & \dots & I_{2,16} & \dots & I_{2,33} \\ I_{3,1} & I_{3,2} & I_{3,3} & \dots & I_{3,8} & I_{3,9} & I_{3,10} & I_{3,11} & \dots & I_{3,16} & \dots & I_{3,33} \\ \dots & \dots \\ I_{8,1} & I_{8,2} & I_{8,3} & \dots & I_{8,8} & I_{8,9} & I_{8,10} & I_{8,11} & \dots & I_{8,16} & \dots & I_{8,33} \\ I_{9,1} & I_{9,2} & I_{9,3} & \dots & I_{9,8} & I_{9,9} & I_{9,10} & I_{9,11} & \dots & I_{9,16} & \dots & I_{9,33} \\ I_{10,1} & I_{10,2} & I_{10,3} & \dots & I_{10,8} & I_{10,9} & I_{10,10} & I_{10,11} & \dots & I_{10,16} & \dots & I_{10,33} \\ I_{11,1} & I_{11,2} & I_{11,3} & \dots & I_{11,8} & I_{11,9} & I_{11,10} & I_{11,11} & \dots & I_{11,16} & \dots & I_{11,33} \\ \dots & \dots \\ I_{16,1} & I_{16,2} & I_{16,3} & \dots & I_{16,8} & I_{16,9} & I_{16,10} & I_{16,11} & \dots & I_{16,16} & \dots & I_{16,33} \\ \dots & \dots \\ I_{33,1} & I_{33,2} & I_{33,3} & \dots & I_{33,8} & I_{33,9} & I_{33,10} & I_{33,11} & \dots & I_{33,16} & \dots & I_{33,33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \left. \begin{matrix} Q_3 \\ \dots \\ Q_8 \end{matrix} \right\} p_1 \\ Q_9 \\ Q_{10} \\ \left. \begin{matrix} Q_{11} \\ \dots \\ Q_{16} \end{matrix} \right\} p_2 \\ \dots \\ Q_{33} \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

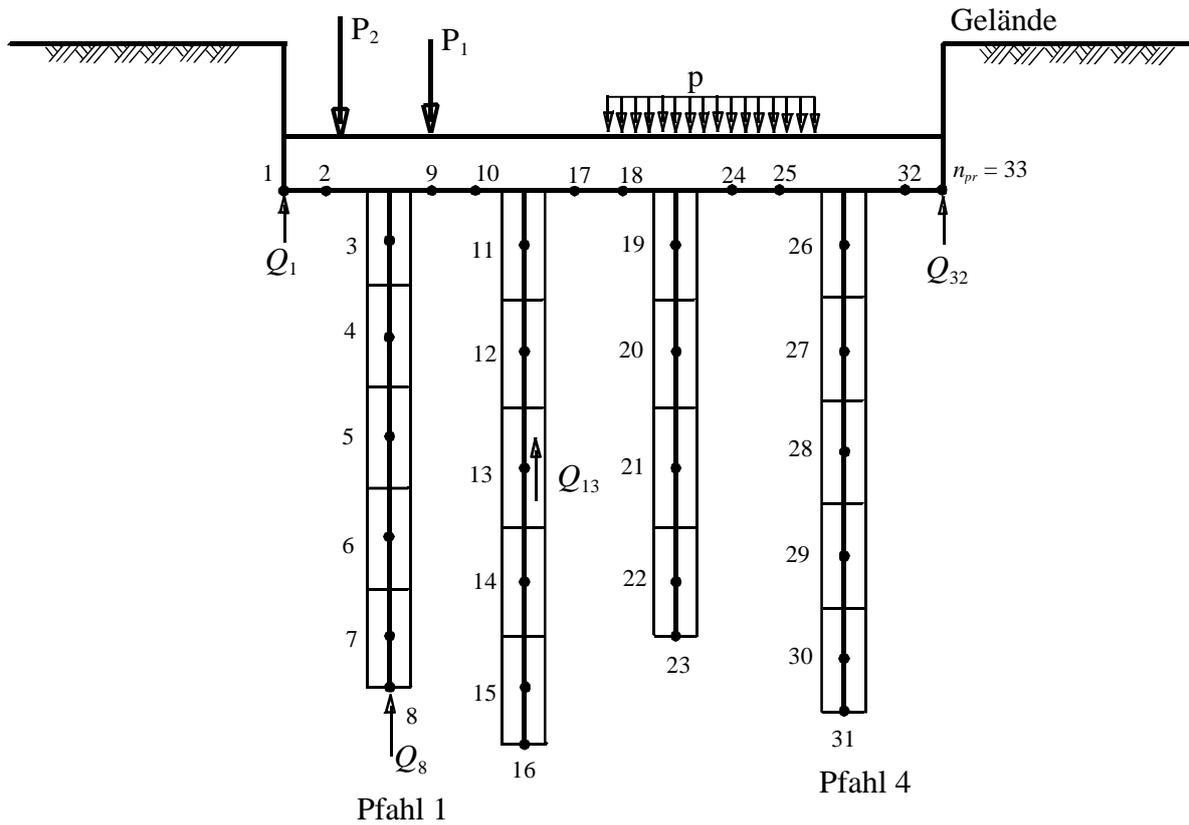
dabei sind p_1, p_2, \dots Nummern der Pfähle

Die gesamte Flexibilitätsmatrix in der Gl. (2.63) kann invertiert werden, um die Beziehung zwischen den Sohlkräften und den Knotensetzungen wie folgt anzugeben:

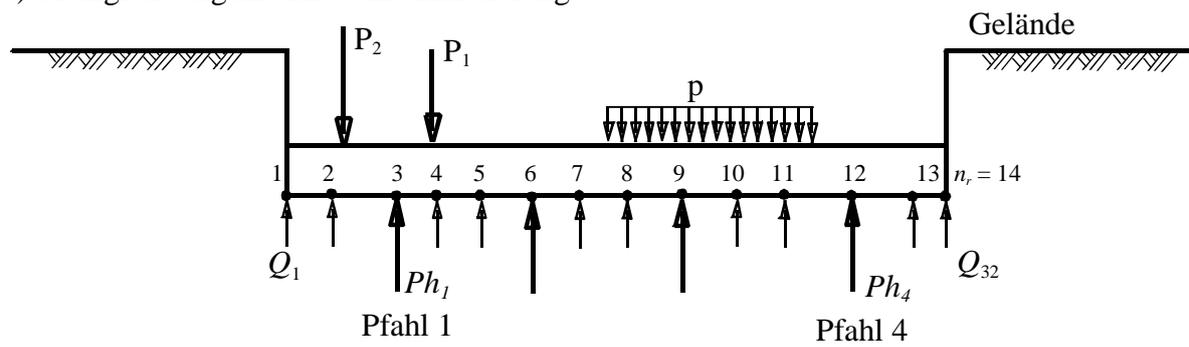
$$\left(\begin{array}{c} Q_1 \\ Q_2 \\ \left\{ \begin{array}{c} Q_3 \\ \dots \\ Q_8 \end{array} \right\}_{p1} \\ Q_9 \\ Q_{10} \\ \left\{ \begin{array}{c} Q_{11} \\ \dots \\ Q_{16} \end{array} \right\}_{p2} \\ \dots \\ Q_{33} \end{array} \right) = \left[\begin{array}{cccccccccccc} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & \dots & k_{1,8} & k_{1,9} & k_{1,10} & k_{1,11} & \dots & k_{1,16} & \dots & k_{1,33} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & \dots & k_{2,8} & k_{2,9} & k_{2,10} & k_{2,11} & \dots & k_{2,16} & \dots & k_{2,33} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & \dots & k_{3,8} & k_{3,9} & k_{3,10} & k_{3,11} & \dots & k_{3,16} & \dots & k_{3,33} \\ \dots & \dots \\ k_{8,1} & k_{8,2} & k_{8,3} & \dots & k_{8,8} & k_{8,9} & k_{8,10} & k_{8,11} & \dots & k_{8,16} & \dots & k_{8,33} \\ k_{9,1} & k_{9,2} & k_{9,3} & \dots & k_{9,8} & k_{9,9} & k_{9,10} & k_{9,11} & \dots & k_{9,16} & \dots & k_{9,33} \\ k_{10,1} & k_{10,2} & k_{10,3} & \dots & k_{10,8} & k_{10,9} & k_{10,10} & k_{10,11} & \dots & k_{10,16} & \dots & k_{10,33} \\ k_{11,1} & k_{11,2} & k_{11,3} & \dots & k_{11,8} & k_{11,9} & k_{11,10} & k_{11,11} & \dots & k_{11,16} & \dots & k_{11,33} \\ \dots & \dots \\ k_{16,1} & k_{16,2} & k_{16,3} & \dots & k_{16,8} & k_{16,9} & k_{16,10} & k_{16,11} & \dots & k_{16,16} & \dots & k_{16,33} \\ \dots & \dots \\ k_{33,1} & k_{33,2} & k_{33,3} & \dots & k_{33,8} & k_{33,9} & k_{33,10} & k_{33,11} & \dots & k_{33,16} & \dots & k_{33,33} \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ \left\{ \begin{array}{c} w_3 \\ \dots \\ w_8 \end{array} \right\}_{p1} \\ w_9 \\ w_{10} \\ \left\{ \begin{array}{c} w_{11} \\ \dots \\ w_{16} \end{array} \right\}_{p2} \\ \dots \\ w_{33} \end{array} \right) \quad (2.64)$$

Wie oben angedeutet, setzt man die Setzungen aller Knoten an jedem Pfahl mit einer konstanten Setzung gleich. Bildet man die Summe der Reihen und Spalten an diesem Pfahl in der Gl. (2.64), erhält man die zusammengesetzten Koeffizienten mit der Kraft am Pfahlkopf Ph_i und die dazugehörige Setzung w_{oi} wie folgt:

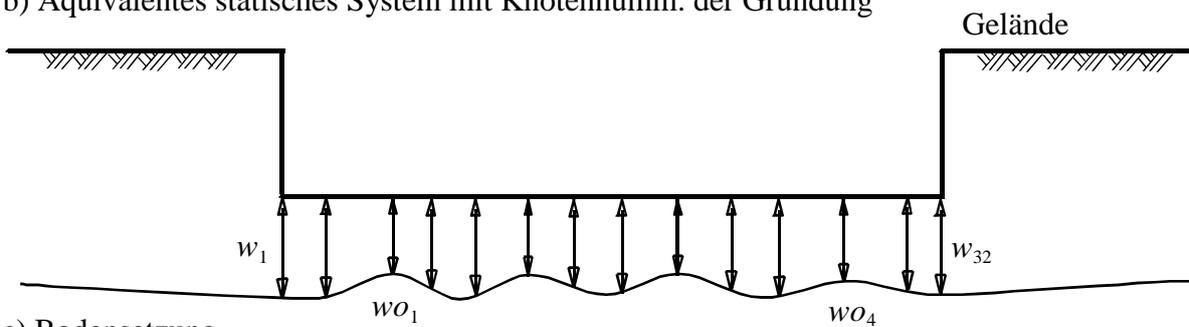
$$\left(\begin{array}{c} Q_1 \\ Q_2 \\ \left\{ \begin{array}{c} \sum_{i=3}^8 Q_i \end{array} \right\}_{p1} \\ Q_9 \\ Q_{10} \\ \left\{ \begin{array}{c} \sum_{i=11}^{16} Q_i \end{array} \right\}_{p2} \\ \dots \\ Q_{33} \end{array} \right) = \left[\begin{array}{cccccccc} k_{1,1} & k_{1,2} & \sum_{j=3}^8 k_{1,j} & k_{1,9} & k_{1,10} & \sum_{j=11}^{16} k_{1,j} & \dots & k_{1,33} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & \sum_{j=3}^8 k_{2,j} & k_{2,9} & k_{2,10} & \sum_{j=11}^{16} k_{2,j} & \dots & k_{2,33} \\ \sum_{i=3}^8 k_{i,1} & \sum_{i=3}^8 k_{i,2} & \sum_{i=3}^8 \sum_{j=3}^8 k_{i,j} & \sum_{i=3}^8 k_{i,9} & \sum_{i=3}^8 k_{i,10} & \sum_{i=3}^8 \sum_{j=11}^{16} k_{i,j} & \dots & \sum_{i=3}^8 k_{i,33} \\ k_{9,1} & k_{9,2} & \sum_{j=3}^8 k_{9,j} & k_{9,9} & k_{9,10} & \sum_{j=11}^{16} k_{9,j} & \dots & k_{9,33} \\ k_{10,1} & k_{10,2} & \sum_{j=3}^8 k_{10,j} & k_{10,9} & k_{10,10} & \sum_{j=11}^{16} k_{10,j} & \dots & k_{10,33} \\ \sum_{i=11}^{16} k_{i,1} & \sum_{i=11}^{16} k_{i,2} & \sum_{i=11}^{16} \sum_{j=3}^8 k_{i,j} & \sum_{i=11}^{16} k_{i,9} & \sum_{i=11}^{16} k_{i,10} & \sum_{i=11}^{16} \sum_{j=11}^{16} k_{i,j} & \dots & \sum_{i=11}^{16} k_{i,33} \\ \dots & \dots \\ k_{33,1} & k_{33,2} & \sum_{j=3}^8 k_{33,j} & k_{33,9} & k_{33,10} & \sum_{j=11}^{16} k_{33,j} & \dots & k_{33,33} \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ \left\{ w_{oi} \right\}_{p1} \\ w_9 \\ w_{10} \\ \left\{ w_{oi} \right\}_{p2} \\ \dots \\ w_{33} \end{array} \right) \quad (2.65)$$



a) Pfahlgründung mit Knotennummerierung



b) Äquivalentes statisches System mit Knotennumm. der Gründung



c) Bodensetzung

Bild 2-7 Modellierung einer Pfahl-Plattengründung

Dementsprechend wird die Gesamtsteifigkeitsmatrix der Pfahl-Plattengründung von der Größe $[n_{pr} * n_{pr}]$ auf die Größe $[n_r * n_r]$ reduziert. Das bedeutet, dass bei der zusammengesetzten Koeffiziententechnik die Bodensteifigkeitsmatrix bei dem Pfahlplattenproblem die gleiche Größe wie bei dem Plattenproblem ohne Pfähle hat.

Nun kann die Gl. (2.65) mit den zusammengesetzten Koeffizienten wie folgt neu geschrieben werden:

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Ph_1 \\ Q_9 \\ Q_{10} \\ Ph_2 \\ \dots \\ Q_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & K_{1,p1} & k_{1,9} & k_{1,10} & K_{1,p2} & \dots & k_{1,33} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & K_{2,p1} & k_{2,9} & k_{2,10} & K_{2,p2} & \dots & k_{2,33} \\ K_{p1,1} & K_{p1,2} & K_{p1,p1} & K_{p1,9} & K_{p1,10} & K_{p1,p2} & \dots & K_{p2,33} \\ k_{9,1} & k_{9,2} & K_{9,p1} & k_{9,9} & k_{9,10} & K_{9,p2} & \dots & k_{9,33} \\ k_{10,1} & k_{10,2} & K_{10,p1} & k_{10,9} & k_{10,10} & K_{10,p2} & \dots & k_{10,33} \\ K_{p2,1} & K_{p2,2} & K_{p2,p1} & K_{p2,9} & K_{p2,10} & K_{p2,p2} & \dots & K_{p2,33} \\ \dots & \dots \\ k_{33,1} & k_{33,2} & K_{33,p1} & k_{33,9} & k_{33,10} & K_{33,p2} & \dots & k_{33,33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_{O1} \\ w_9 \\ w_{10} \\ w_{O2} \\ \dots \\ w_{33} \end{Bmatrix} \quad (2.66)$$

wobei $K_{pi, pj}$, $K_{i, pj}$ and $K_{pi, j}$ [kN/m] die zusammengesetzten Koeffizienten der Pfahl-Plattengründung sind.

Basierend auf der Gl. (2.66) kann die Beziehung zwischen den Setzungen und den Sohlkräften der Pfahl-Plattengründung in komprimierter Matrixform wie folgt neu geschrieben werden:

$$\{Q\} = [kb] \{w\} \quad (2.67)$$

wobei:

- $\{w\}$ n_r Setzungsvektor
- $\{Q\}$ n_r Sohlkraftvektor
- $[kb]$ $n_r * n_r$ Bodensteifigkeitsmatrix der Pfahl-Plattengründung

Um die Formulierung zu vereinfachen, wird in den nächsten Abschnitten die Setzung der Plattenknoten oder des Pfahlkopfes mit w_i bezeichnet, während die Sohlkraft der Plattenknoten oder des Pfahlkopfes mit Q_i bezeichnet wird.

2.4.2 Berechnung einer Pfahl-Plattengründung für die schlaffe Platte

Im Fall der Berechnung einer völlig schlaffen Platte ist der Sohlkraftvektor $\{Q\}$ der Plattenknoten bekannt. Nur die Setzungen sind unbekannt. Der Vorteil der zusammengesetzten Koeffiziententechnik ist, dass die zusammengesetzte Bodensteifigkeitsmatrix invertiert werden kann, um eine zusammengesetzte Flexibilitätsmatrix zu erhalten.

Dementsprechend wird die Beziehung zwischen den Sohlkräften unter der schlaffen Platte, der Kräfte auf den Pfahlköpfen und den Knotensetzungen wie folgt formuliert:

$$\{w\} = [Cb] \{Q\} \quad (2.68)$$

wobei $[Cb] = n_r * n_r$ die Flexibilitätsmatrix der Pfahl-Plattengründung ist, $[Cb] = [kb]^{-1}$.

2.4.3 Berechnung einer Pfahl-Plattengründung für die starre Platte

Für eine Pfahl-Plattengründung mit einer starren Platte sind die Unbekannten des Interaktionsproblems n_r die Sohlkräfte Q_i , die starre Körperverschiebung der Pfahl-Plattengründung w_c und die starren Körperverdrehungen θ_x und θ_y der Pfahl-Plattengründung um die Achsen des Geometrieschwerpunkts. Diese erhält man, indem man die n_r kompatiblen Gleichungen der Verschiebung der starren Pfahl-Plattengründungen und die Setzung des Bodens in n_r Knotenpunkten zusätzlich mit den drei Gleichungen des gesamten Gleichgewichts betrachtet.

Wegen der Starrheit der Pfahl-Plattengründung drückt die folgende lineare Beziehung (ebene Verschiebung) die Setzung w_i entweder an einem Knoten in der Platte oder an einem Pfahl mit den Koordinaten (x_i, y_i) vom Geometrieschwerpunkt so aus:

$$w_i = w_c + x_i \tan \theta_y + y_i \tan \theta_x \quad (2.69)$$

Gleichung (2.69) in Matrizenform für die gesamte Platte wird wie folgt geschrieben:

$$\{w\} = [X]^T \{\Delta\} \quad (2.70)$$

wobei:

$\{\Delta\}$ 3 Vektor der Verschiebung w_c des Plattenmittelpunkts und die Verdrehungen $\tan \theta_y$ und $\tan \theta_x$

$[X]^T$ $3 * n$ Vektor der Matrix $\{1, x_i, y_i\}$, x_i, y_i sind die Koordinaten des Knotens i

Für das Gleichgewicht müssen die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

- Die Resultierende der externen vertikalen Kräfte, die auf die Platte wirken, muss mit der Summe der Sohlkräfte und der Pfahllasten gleich sein
- Das Moment infolge dieser Resultierenden, entweder um die x - oder um die y -Achse, muss gleich der Summe der Momente infolge der Sohlkräfte und der Pfahllasten um diese Achsen sein

Nimmt man Q_i als ein Symbol, um entweder Pfahllast Ph_i oder Sohlkraft Q_i im Netz darzustellen, ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} N &= Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n \\ N \cdot e_x &= Q_1 \cdot x_1 + Q_2 \cdot x_2 + Q_3 \cdot x_3 + \dots + Q_n \cdot x_n \\ N \cdot e_y &= Q_1 \cdot y_1 + Q_2 \cdot y_2 + Q_3 \cdot y_3 + \dots + Q_n \cdot y_n \end{aligned} \right\} \quad (2.71)$$

wobei:

- N Resultierende der Lasten, die auf die Platte einwirken [kN]
- $N e_x$ Momente infolge der Resultierenden um die x -Achse, $M_x = N e_x$ [kN.m]
- $N e_y$ Momente infolge der Resultierenden um die y -Achse, $M_y = N e_y$ [kN.m]
- e_x, e_y Exzentrizitäten der Resultierenden um die x - und y -Achse [m]
- x_i, y_i Koordinaten der Last Q_i [m]

Gleichung (2.71) in Matrizenform für die gesamte Kombinierte Pfahl-Plattengründung wird wie folgt neu geschrieben:

$$\{N\} = [X]\{Q\} \quad (2.72)$$

Dabei ist $\{N\}$ der Vektor der resultierenden Kräfte und Momente auf der Platte.

Setzt man die Gln. (2.67) und (2.70) in Gl. (2.72) ein, so erhält man folgendes lineare Gleichungssystem für die Pfahl-Plattengründung mit einer starren Platte:

$$\{N\} = [X][kb][X]^T \{\Delta\} \quad (2.73)$$

Durch Lösung dieser Gl. (2.70) ergeben sich w_c , $\tan \theta_x$ und $\tan \theta_y$. Mit diesen Werten ergibt sich aus den Gln. (2.70) und (2.67) folgende Gleichung zur Bestimmung der n unbekanntenen Pfahllasten und Sohlkräfte.

$$\{Q\} = [kb][X]^T \{\Delta\} \quad (2.74)$$

2.4.4 Berechnung einer Pfahl-Plattengründung für die elastische Platte

Es ist möglich, die Gründungsplatte als eine elastische Platte auf starren Pfählen zu behandeln. Nach der FE-Methode kann die Grundformulierung der Gleichgewichtsgleichung für die Platte in allgemeiner Form durch die folgende Gleichung beschrieben werden:

$$[kr]\{\delta\} = \{P\} - \{Q\} \quad (2.75)$$

wobei:

- $\{p\}$ $3 \cdot n_r$ Vektor der Kräfte (enthält Wirkung und Rückwirkung auf die Platte)
- $[kr]$ $3 \cdot n_r \cdot 3 \cdot n_r$ Steifigkeitsmatrix für die Platte
- $\{\delta\}$ $3 \cdot n_r$ Verformungsvektor der Platte

Berechnet man eine elastische Gründungsplatte auf einer Pfahlgruppe, wird die elastische Stauchung des Pfahles zu der Pfahlsetzung in der Gl. (2.68) addiert. Die elastische Stauchung des Pfahles i wird wie folgt ausgedrückt:

$$\Delta_i = \frac{P_i l_i}{E p_i A p_i} \quad (2.76)$$

wobei:

- Δ_i Elastische Stauchung des Pfahles i [m]

- l_i Länge des Pfahles i [m]
 A_{p_i} Querschnittsfläche des Pfahles i [m²]
 E_{p_i} Elastizitätsmodul des Pfahles i [kN/m²]

Die Gl. (2.76) wird für die gesamte Pfahl-Plattengründung in Matrixform wie folgt geschrieben:

$$\{w_p\} = [C_p]\{P_h\} \quad (2.77)$$

wobei:

- $\{w_p\}$ Elastischer Stauchungsvektor
 $[C_p]$ Elastische Pfahlmatrix, welche eine diagonale Matrix ist
 $\{P_h\}$ Vektor der Kräfte auf den Pfahlköpfen

Um den Einfluss der Pfahlstauchung zu berücksichtigen, wird der elastische Koeffizient des Pfahles i in der Matrix $[C_p]$ zu den Flexibilitätskoeffizienten dieses Pfahles in der Matrix $[C_b]$ in der Gl. (2.68) wie folgt addiert:

$$\{w\} = [[C_b] + [C_p]]\{Q\} \quad (2.78)$$

Durch Inversion der gesamten Flexibilitätsmatrix $[[C_b] + [C_p]]$ erhält man die gesamte Steifigkeitsmatrix der Pfahl-Plattengründung $[k_p]$ mit dem Einfluss der Pfahlsteifigkeit infolge des elastischen Materials.

$$\{Q\} = [k_p]\{w\} \quad (2.79)$$

wobei $[k_p]$ $n_r \cdot n_r$ die Steifigkeitsmatrix der Pfahl-Plattengründung mit dem Einfluss des elastischen Pfahlmaterials ist, $[k_p] = [[C_b] + [C_p]]^{-1}$.

Setzt man die Gl. (2.79) in Gl. (2.75) ein, ergibt sich:

$$[k_r]\{\delta\} = \{P\} - [k_p]\{w\} \quad (2.80)$$

Betrachtet man die Kompatibilität zwischen der Verschiebung der Pfahl-Plattengründung δ_i und der Setzung des Bodens s_i , erhält man das folgende lineare Gleichungssystem der Pfahl-Plattengründung mit einer elastischen Platte:

$$[[k_p] + [k_r]]\{\delta\} = \{P\} \quad (2.81)$$

Durch Lösung des oben genannten linearen Gleichungssystems erhält man die Verschiebung an jedem Knoten der Gründungsplatte, welche gleich der Bodensetzung an diesem Knoten ist. Setzt man die Setzung des Bodens aus Gl. (2.81) in Gl. (2.66) ein, kann man die Sohlkräfte auf der Gründungsplatte und die Kräfte auf den Pfahlköpfen errechnen.

Sofern man die Setzungen auf den Pfählen w_{o_i} in den drei oben genannten Fällen der Pfahl-Plattengründungen ermittelt hat, kann man die einzelnen Kräfte entlang des Pfahlschaftes und auf dem Pfahlfuß durch die Gl. (2.64) erhalten.

2.5 Nichtlineare Berechnung mit einer hyperbolischen Funktion (NPRH)

2.5.1 Nichtlineare Berechnung eines starren Einzelpfahles

Die nichtlineare Berechnung ist eine wichtige Betrachtung, weil es sein kann, dass die Pfähle bis an die Grenze ihrer Tragfähigkeit belastet sind. Die nichtlineare Beziehung zwischen der Last und der Setzung des Pfahles wird anhand einer hyperbolischen Last-Setzungsbeziehung beschrieben. Das Bild 2-8 zeigt eine typische nichtlineare Kurve der Last-Setzung für eine umfangreiche Reihe von Böden. Die Kurve kann durch eine hyperbolische Interpolationsformel angenähert werden. Mehrere Gleichungsformen sind verfügbar, um diese Kurve zu überprüfen.

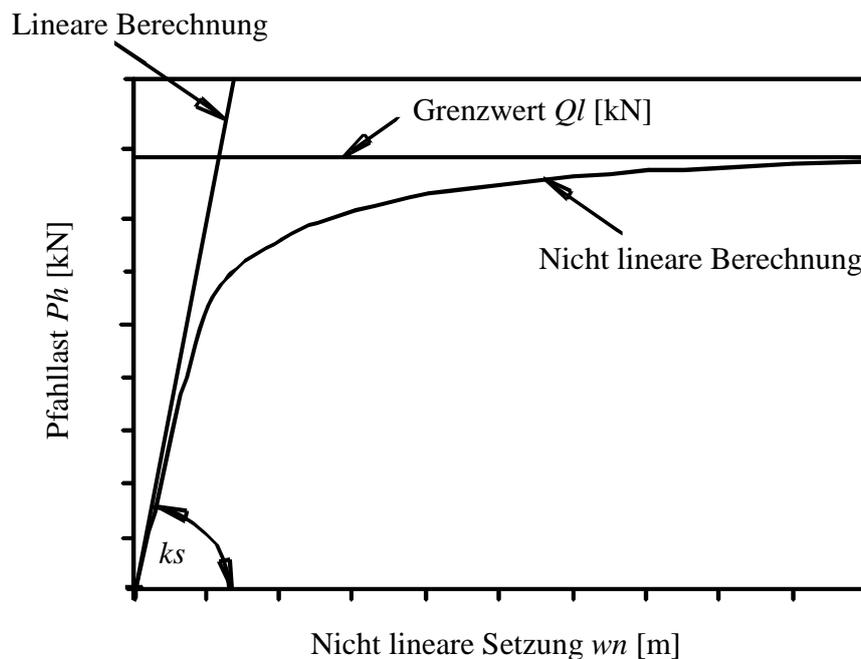


Bild 2-8 Last-Setzungskurve eines Einzelpfahles (hyperbolische Beziehung)

Mehrere Verfahren wurden entwickelt, um das nichtlineare Verhalten im Pfahl-Boden-System anhand einer hyperbolischen Beziehung zwischen Last und Setzung zu beschreiben. *Fleming* (1992) entwickelte ein Verfahren, um das Lastverformungsverhalten eines Einzelpfahles mit Verwendung von zwei getrennten hyperbolischen Funktionen auszuwerten. Das Verhalten von Schaft und Pfahlfuß wird individuell unter der einwirkenden Last beschreiben.

Die Berechnung von nichtlinearem Verhalten durch die hyperbolische Funktion wurde von *Mandolini & Viggiani* (1997) für Pfahlgruppen und von *Russo* (1998) für Pfahl-Plattengründungen benutzt. Die Pfähle wurden als nichtlineare interagierende Federn basierend auf der Methode der Interaktionsfaktoren berechnet. *Basile* (1999) setzt voraus, dass der Elastizitätsmodul des Bodens mit dem Spannungsniveau der Pfahl-Boden-Interaktion unter Verwendung einer hyperbolischen Spannungsdehnungsbeziehung variiert.

Die nichtlineare Berechnung der Gründungen mit dem Bettungsmodulverfahren wurde von *Baz* (1987) für Trägerroste und von *Hasnien* (1993) für Gründungsplatten durchgeführt. *El Gendy* (1999) erweiterte diese Berechnung und ermöglichte damit die Anwendung mit dem Steifemodulverfahren

für Gründungsplatten. Die zusammengesetzte Koeffiziententechnik, die in den vorherigen Abschnitten vorgestellt wurde, ermöglicht die Anwendung dieser Berechnung für die Pfahlprobleme. Das nichtlineare Verhalten der Pfahlkopflast-Setzung an der Pfahl-Plattengründung-Bodengrenzfläche kann wie folgt dargestellt werden:

$$Ph = \frac{wn}{\frac{1}{ks} + \frac{wn}{Ql}} \quad (2.82)$$

wobei:

wn nichtlineare Setzung des Pfahles [m]

Ql Grenzpfahllast [kN]

In dem Bild 2-8 und der Gl. (2.82) wird deutlich, wie leicht man den Anfangstangentenmodul des Einzelpfahles aus der linearen Berechnung des Pfahles erhalten kann, der gleich dem Modul der Bodensteifigkeit ks ist. Die Grenzpfahllast Ql ist ein geometrischer Parameter der hyperbolischen Beziehung. In einigen Fällen ist der Wert von Ql von der tatsächlichen Tragfähigkeitpfahllast unterschiedlich. Für einen Einzelpfahl ist die Kraft auf dem Pfahlkopf ph bekannt. Folglich ergibt die Gl. (2.82) direkt die nichtlineare Setzung des Pfahles wn .

2.5.2 Nichtlineare Berechnung einer Pfahlgruppe, einer Pfahl-Plattengründung für die elastische Platte und einer Pfahl-Plattengründung für die starre Platte

Die nichtlineare Berechnung der Pfahl-Plattengründung basiert auch auf der in Abschnitt 2.5.1 gezeigten hyperbolischen Beziehung. Der Anfangstangentenmodul der hyperbolischen Beziehung kann aus der linearen Berechnung der Pfahl-Plattengründung wie folgt erhalten werden:

$$ks_i = \frac{Ph_i^o}{wo_i^o} \quad (2.83)$$

wobei:

Ph_i^o Last auf dem Pfahlkopf aus der linearen Berechnung [kN]

wo_i^o Pfahlsetzung aus der linearen Berechnung [m]

i Pfahlnummer

o Index, bezeichnet die erste Berechnung in der Iteration (lineare Berechnung)

2.5.3 Iterationsverfahren

Ein Iterationsverfahren wird vorgeschlagen, um das System von linearen Gleichungen der Kombinierten Pfahl-Plattengründung zu lösen. Der Leitgedanke dieses Verfahrens ist, dass die Steifigkeitsmatrix $[kb]$ der starren Gründungsplatte oder $[kp]$ der elastischen Gründungsplatte in eine diagonale Steifigkeitsmatrix $[ke]$ umgewandelt wird. Steifigkeitskoeffizienten dieser Matrix, die Knotenplattesteifigkeit und Pfahlsteifigkeit darstellen, sind durch die Sohlkraft und ihre entsprechende Setzung bestimmt. Allein die Steifigkeit des Pfahles wird nach jedem Ablauf des Iterationsprozesses modifiziert. Mit Hilfe der äquivalenten diagonalen Matrix werden die Gleichungen der Pfahl-Plattengründung für jeden Iterationsschritt gelöst, bis die Kompatibilität zwischen Platte, Pfählen und Boden erreicht ist.

Bild 2-9 zeigt Iterationsschritte und Ablaufdiagramm des Iterationsprozesses zu diesem Verfahren. Der Iterationsprozess des Verfahrens kann nach den folgenden Schritten beschrieben werden:

- 1- Durchführung der linearen Berechnung der Pfahl-Plattengründung, indem man eine der linearen Gleichungen (2.73) oder (2.81) löst, um die Setzungen $\{w\}$ zu erhalten
- 2- Ermitteln der Sohlkräfte an den Knoten $\{Q\}$ infolge der berechneten Setzungen mit der Gl. (2.74) für die starre Platte und mit der Gl. (2.79) für die elastische Platte
- 3- Ermitteln der Knotensteifigkeit an der Platte und an den Pfahlköpfen mit den berechneten Setzungen und Sohlkräften

$$ke_i = \frac{Q_i}{w_i} \quad (2.84)$$

- 4- Modifizierung der Pfahlsteifigkeit durch:

$$ke_i = \frac{1}{\frac{1}{ks_i} + \frac{w_i}{Q_i}} \quad (2.85)$$

- 5- Konvertieren der Bodensteifigkeitsmatrix (Matrix $[kb]$ oder Matrix $[kp]$) in eine äquivalente diagonale Steifigkeitsmatrix $[ke]$. Diese Matrix kann mit der Knotensteifigkeit der Platte, die im 3. Schritt errechnet wurde, und mit der Pfahlsteifigkeit, die im 4. Schritt ermittelt wurde, generiert werden
- 6- Ersetzen der vollständigen Matrix durch die diagonale Matrix $[ke]$. Durchführung der nichtlinearen Berechnung der Pfahl-Plattengründung, um die Setzungen $\{w\}$ zu erhalten
- 7- Berechnung der Sohlkraft unter der Platte und der Kraft auf dem Pfahlkopf durch:

$$Q_i = ke_i w_i \quad (2.86)$$

- 8- Vergleich zwischen der Setzung aus Schritt i und der aus Schritt $i+1$, um die Genauigkeit der Lösung zu finden

Die Schritte 3 bis 8 sind so lange zu wiederholen, bis die gewünschte Genauigkeit ε erreicht ist, was bedeutet, dass eine ausreichende Kompatibilität zwischen den Setzungen der Pfähle, Platte und Boden in der Pfahl-Platten-Boden-Schnittstelle erreicht ist. Allerdings wird in der Berechnung das nichtlineare Verhalten nur auf die Pfähle angewendet. Das nichtlineare Verhalten der Platte kann leicht für die Pfahl-Plattengründung hinzugefügt werden, wie *El Gendy* (1999) angedeutet hat.

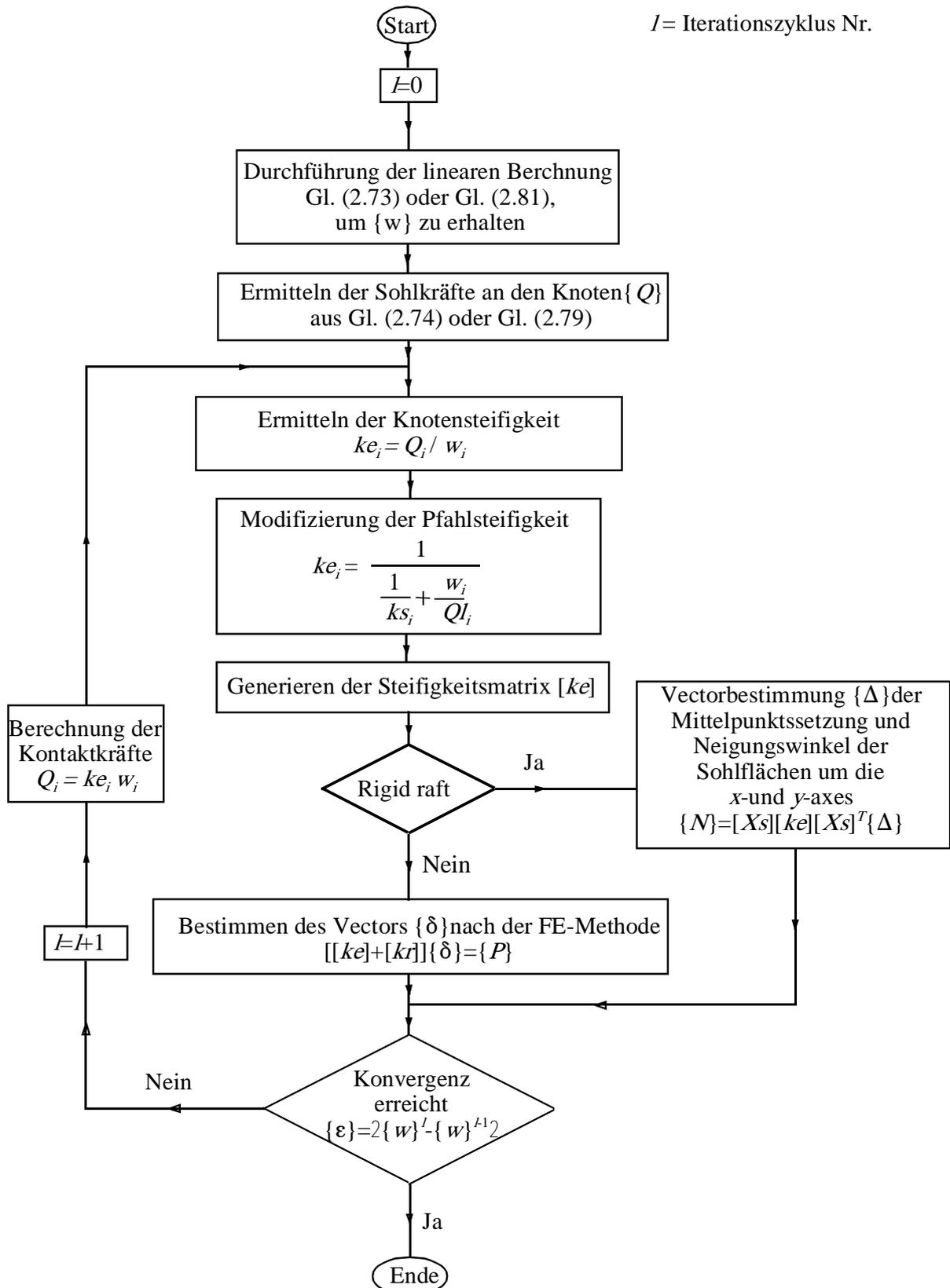


Bild 2-9

Ablaufdiagramm des Iterationsprozesses im Programm *ELPLA*

2.6 Zahlenbeispiele

Die numerischen Modelle für Einzelpfahl, Pfahlgruppe und Pfahl-Plattengründung, die in diesem Abschnitt beschrieben sind, wurden im Programm *ELPLA* eingesetzt. Um die numerischen Modelle zu überprüfen und auszuwerten, wurde eine Vergleichsserie durchgeführt, wobei die Ergebnisse von *ELPLA* mit denen von vorhandenen Verfahren verglichen wurden.

2.6.1 Testbeispiel: Auswertung des Setzungseinflussfaktors I_1 für einen Einzelpfahl

Die meisten Berechnungen von Pfahl-Plattengründungen wenden eine numerische Integration mit Hilfe der *Mindlinschen* Lösung an, um Flexibilitätskoeffizienten der Pfähle zu bestimmen. Die Anwendung einer numerischen Integration in der Berechnung von Pfahl-Plattengründung führt zu erheblichen Berechnungen, besonders bei großen Pfahl-Plattengründungsproblemen. Im nächsten Untersuchungsfall werden von *Mindlinschen* Lösungen abgeleitete geschlossene Formgleichungen bei allen Berechnungen verwendet. Um diese Gleichungen für das Bestimmen von Flexibilitätskoeffizienten zu überprüfen, werden die Setzungseinflussfaktoren I_1 für einen Einzelpfahl, die von *Poulos* (1968) und *Poulos/ Davis* (1968) erhalten werden, mit denen aus den geschlossenen Formgleichungen im Abschnitt 1 verglichen.

Bei der Berechnung des Einzelpfahles nach *Poulos/ Davis* (1968) wird die Setzung eines Einzelpfahles wie folgt ausgedrückt:

$$s_1 = \frac{P}{L E_s} I_1 \quad (2.87)$$

wobei:

- P Last auf dem Pfahlkopf [kN]
- L Pfahllänge [m]
- E_s Elastizitätsmodul des Bodens [kN/m²]
- I_1 Setzungseinflussfaktor für einen Einzelpfahl [-]

Ein Pfahl der Länge $L = 12.5$ [m] wird gewählt. Der Pfahl wird in 10 Elemente unterteilt, jede Elementgröße beträgt 1.25 [m]. Last auf dem Pfahlkopf P und Elastizitätsmodul des Bodens E_s werden gewählt, um dem Ausdruck P/E_s der Gl. (2.87) zu gleichen. Die Last auf dem Pfahlkopf wird mit $P = 5000$ [kN] angesetzt, während der Elastizitätsmodul mit $E_s = 5000$ [kN/m²] angesetzt wird. Der Setzungseinflussfaktor I_1 wird an verschiedenen Werten von h/L und L/d bestimmt mit h [m] als Dicke der Bodenschicht und d [m] als Pfahldurchmesser.

Die Setzungseinflussfaktoren I_1 für einen Einzelpfahl, wie von *Poulos* (1968) in der Tabelle 1 in seinem Beitrag veröffentlicht, werden mit denen, die von den geschlossenen Formgleichungen erhalten werden, verglichen. Die Faktoren werden in Tabelle 2-1 und Tabelle 2-2 für zwei verschiedene Werte der *Poissonzahl* des Bodens ν_s gelistet. Aus diesen Tabellen ist ersichtlich, dass die Setzungseinflussfaktoren an verschiedenen Bodenschichten und am Pfahldurchmesser, die von geschlossenen Formgleichungen im Abschnitt 1 erhaltenen werden, denen von *Poulos* (1968) fast gleichen. Der Maximalunterschied beträgt $\Delta = 2.78$ [%].

Die Flexibilitätskoeffizienten, die aus numerischer Integration bestimmt werden, sind auch in *ELPLA* verfügbar. Tabelle 2-3 und Tabelle 2-4 listen die Setzungseinflussfaktoren I_1 , wenn die numerische

Integration verwendet wird. Die Tabellen zeigen, dass die Setzungseinflussfaktoren, die nach geschlossenen Formgleichungen bestimmt werden, mit denen nach numerischer Integration fast gleich sind.

Tabelle 2-1 Setzungseinflussfaktor I_f für einen Einzelpfahl
Verwendung geschlossener Formgleichungen,
Poissonzahl des Bodens $\nu_s = 0.5$ [-]

h/L	<i>Poulos (1968)</i>			<i>ELPLA</i>			Max. Diff. Δ [%]
	L/d			L/d			
	10	25	100	10	25	100	
4	1.41	1.86	2.54	1.44	1.88	2.56	2.13
5	1.31	1.76	2.44	1.34	1.77	2.47	1.23
2.5	1.20	1.64	2.31	1.22	1.65	2.33	1.67
1.5	0.98	1.42	2.11	0.99	1.43	2.12	1.02
1.2	0.72	1.18	1.89	0.74	1.19	1.90	2.78

Tabelle 2-2 Setzungseinflussfaktor I_f für einen Einzelpfahl
Verwendung geschlossener Formgleichungen,
Poissonzahl des Bodens $\nu_s = 0.0$ [-]

h/L	<i>Poulos (1968)</i>			<i>ELPLA</i>			Max. Diff. Δ [%]
	L/d			L/d			
	10	25	100	10	25	100	
4	1.16	1.47	1.95	1.17	1.48	1.94	0.86
5	1.07	1.37	1.86	1.08	1.38	1.86	0.93
2.5	0.96	1.27	1.75	0.98	1.28	1.74	2.08
1.5	0.80	1.11	1.58	0.81	1.12	1.59	1.25
1.2	0.62	0.94	1.44	0.62	0.94	1.42	1.39

Tabelle 2-3 Setzungseinflussfaktor I_1 für einen Einzelpfahl
Verwendung numerischer Integration, *Poissonzahl* des Bodens $\nu_s = 0.5$ [-]

h/L	<i>Poulos (1968)</i>			<i>ELPLA</i>			Max. Diff. Δ [%]
	L/d			L/d			
	10	25	100	10	25	100	
4	1.41	1.86	2.54	1.42	1.84	2.51	1.18
5	1.31	1.76	2.44	1.31	1.74	2.42	0.82
2.5	1.20	1.64	2.31	1.19	1.62	2.30	1.22
1.5	0.98	1.42	2.11	0.97	1.40	2.08	1.42
1.2	0.72	1.18	1.89	0.72	1.16	1.86	1.59

Tabelle 2-4 Setzungseinflussfaktor I_1 für einen Einzelpfahl
Verwendung numerischer Integration, *Poissonzahl* des Bodens $\nu_s = 0.0$ [-]

h/L	<i>Poulos (1968)</i>			<i>ELPLA</i>			Max. Diff. Δ [%]
	L/d			L/d			
	10	25	100	10	25	100	
4	1.16	1.47	1.95	1.15	1.45	1.91	2.09
5	1.07	1.37	1.86	1.06	1.36	1.82	2.15
2.5	0.96	1.27	1.75	0.96	1.26	1.72	1.71
1.5	0.80	1.11	1.58	0.79	1.09	1.55	1.90
1.2	0.62	0.94	1.44	0.61	0.92	1.40	2.78

2.6.2 Untersuchungsfall: Pfahl-Plattengründung beim *Messe-Torhaus* in Frankfurt

Das *Torhaus* befindet sich in Frankfurt/ Main in Deutschland und teilt das Messegelände in einen östlichen und einen westlichen Geländeteil, Bild 2-10. Das Haus wurde zwischen 1983 und 1986 gebaut und stellt das erste Gebäude in Deutschland dar, das mit einer Pfahl-Plattengründung ausgestattet ist. Das Gebäude hat eine Höhe von 130 [m]. Mit Benutzung der installierten Instrumente in diesem Fundament wurde ein Messprogramm etabliert, um das Verhalten des Gebäudes zu überwachen. Weil diese Instrumente die Setzungen der Platte, Sohldrücke auf der Platte und Lasten auf den Pfählen notieren, war das Gebäude eine gute Chance für viele Autoren, um ihre Berechnungsverfahren zu überprüfen. Seitdem das *Torhaus* gebaut wurde, haben viele Autoren sein Verhalten untersucht. Einige von ihnen sind *Sommer et al.* (1985), *Sommer* (1989) und *Reul & Randolf* (2003).



Bild 2-10 *Torhaus* nach http://www.fussballportal.de/images/wm/fra_torhaus.jpg

Bild 2-12 zeigt eine Abbildung des *Torhauses* mit der Pfahlplatte. Das Gebäude hat keine Untergeschosse. Die Gründung besteht aus zwei getrennten rechteckigen Pfahl-Plattengründungen, jeweils mit den Abmessungen 17.5 [m] und 24.5 [m]. Der Abstand zwischen den beiden Platten beträgt 10 [m]. Die Gründungstiefe beträgt 3 [m] unter Geländeoberfläche. Die Gesamtlast je Platte beträgt 200 [MN]. Die Dicke der Platten beträgt 2.5 [m]. Insgesamt wurden unter jeder Platte 42 Bohrpfähle mit einer Länge von $l=20$ [m] und einem Durchmesser von $D=0.9$ [m] verwendet. Der Abstand zwischen den einzelnen Pfählen variiert zwischen $3.5 D$ und $3.0 D$ (D = Durchmesser des Pfahles). Der Baugrund besteht aus Kies und Sand bis zu einer Tiefe von 5.5 [m] unter der Oberfläche, darunter befindet sich der Frankfurter Ton bis in große Tiefe. Das Grundwasser steht bei einer Tiefe von 3 [m].

Das Haus wurde in der Zeit von 1983 bis 1986 gebaut. Im Jahr 1988 betrug die gemessene max. Setzung in der Mitte der Platte 12 [cm] nach *Sommer* (1989). Wenn das *Torhaus* auf nur einer Platte stehen würde, wäre die zu erwartende Setzung 26 [cm], basierend auf einer geotechnischen Untersuchung nach *Sommer et al.* (1985). Deshalb wurde eine Kombinierte Pfahl-Plattengründung geplant, um die Setzung zu reduzieren. Mit Verwendung der verfügbaren Daten und Ergebnisse des *Torhauses*, die in Details in der vorliegenden Literatur diskutiert werden, wird die gegenwärtige Berechnung von Kombinierten Pfahl-Plattengründungen (KPP) untersucht und überprüft.

2.6.2.1 Bodenkennwerte

Die verwendeten Eigenschaften des Tons bei der Berechnung des *Torhauses* können wie folgt beschrieben werden:

Steifemodul:

Der Elastizitätsmodul der Sand- mit Kiesschicht unter der Platte nach *Reul & Randolph* (2003) ist $E = 75000$ [kN/m²]. Der Elastizitätsmodul für Wiederbelastung wurde mit $W = 3 E$ angesetzt. Auf Grundlage der früheren Berechnung nach *Amann et al.* (1975) wurde gezeigt, dass die Verteilung des Steifemoduls für Erstbelastung des Frankfurter Tons in der Tiefe durch die folgende empirische Formel definiert wird:

$$E_s = E_{so} (1 + 0.35 z) \quad (2.88)$$

während für die Wiederbelastung gilt:

$$W_s = 70 \text{ [MN/ m}^2\text{]} \quad (2.89)$$

wobei:

- E_s Steifemodul für Erstbelastung [MN/m²]
- E_{so} Anfangs-Steifemodul, $E_{so}=7$ [MN/m²]
- z Tiefe ab Oberkante Ton [m]
- W_s Steifemodul für Wiederbelastung [MN/m²]

Undrained Kohäsion und Grenzpfahllast:

Die undrained Kohäsion c_u des Frankfurter Tons steigt in der Tiefe von $c_u=100$ [kN/m²] bis $c_u=400$ [kN/m²] in 70 [m] Tiefe ab Oberkante Ton nach *Sommer & Katzenbach* (1990). *Russo* (1998) schlug eine Grenzmantelreibung bei der Berechnung mit einer hyperbolischen Funktion nicht weniger als $\tau = 180$ [kN/m²] vor, die einer undrained Kohäsion von $c_u=200$ [kN/m²] entspricht. Um die Berechnung durchzuführen, wird eine Grenzmantelreibung von $ql = 180$ [kN/m²] berücksichtigt. Somit ergibt sich eine Grenzpfahllast von $Ql = 10$ [MN], wie folgt:

$$Ql = \tau * \pi * D * l = 180 * \pi * 0.9 * 20 = 10179 \text{ [kN]} = 10 \text{ [MN]} \quad (2.90)$$

Poissonzahl:

Die *Poissonzahl* des Frankfurter Tons wird mit $v_s=0.25$ [-] angesetzt.

Für die Berechnung wurde der Baugrund, wie im Bohrprofil in Bild 2-11 gezeigt, mit 13 Schichten angenommen. Die gesamte Tiefe beträgt 113 [m] unter Gelände.

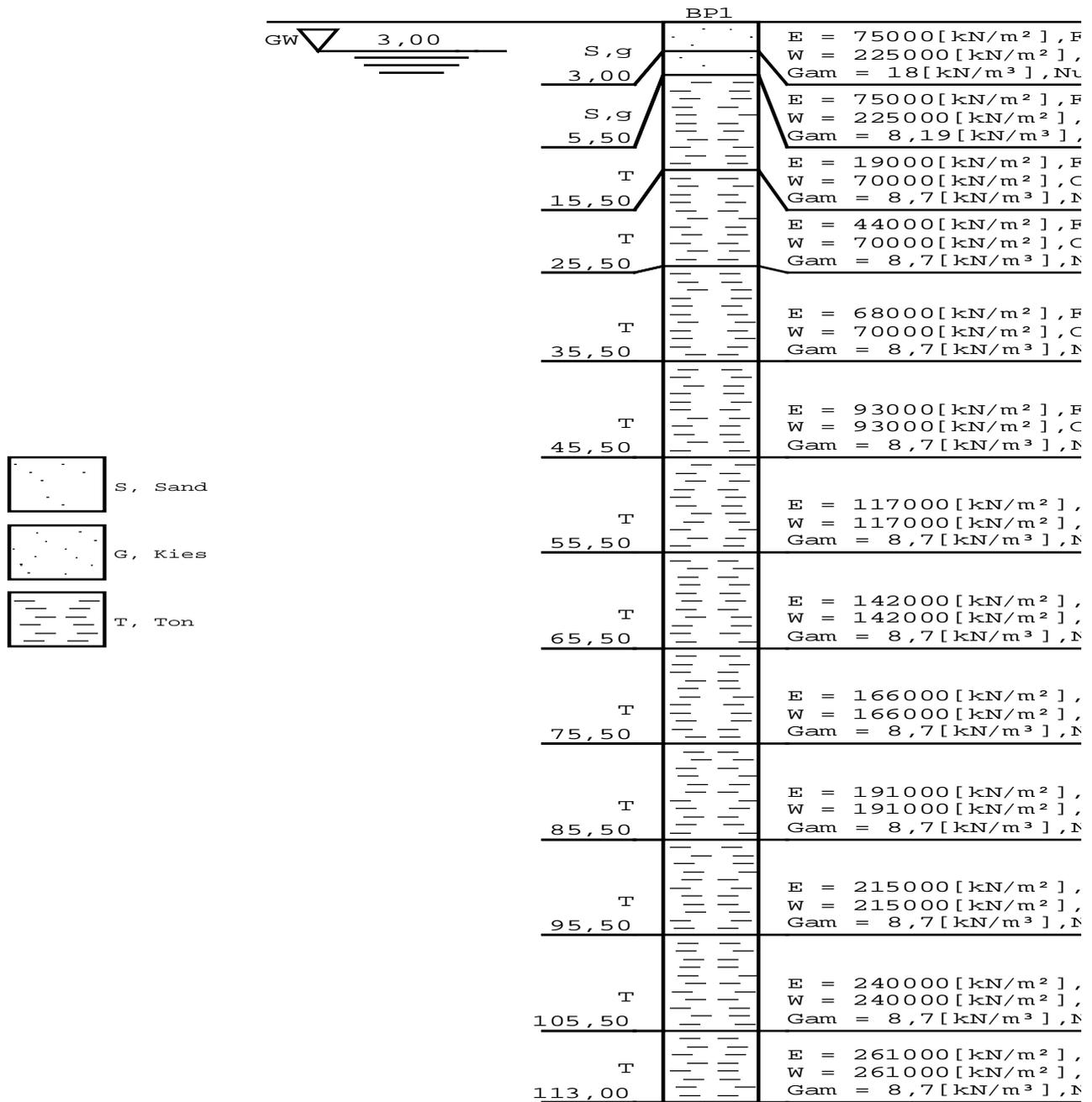


Bild 2-11 Darstellung des Bohrprofils

2.6.2.2 Pfahl- und Plattenmaterial

Als Pfahl- und Plattenmaterial wurden folgende Werte angesetzt:

Für die Platte:

Elastizitätsmodul	$E_b = 3.4 * 10^7$	[kN/m ²]
Poissonzahl	$\nu_p = 0.2$	[-]
Wichte	$\gamma_b = 25$	[kN/m ³]

Für die Pfähle:

Elastizitätsmodul	$E_b = 2.35 * 10^7$	[kN/m ²]
Wichte	$\gamma_b = 25$	[kN/m ³]

2.6.2.3 Berechnung der Pfahlplatte

Eine Reihe von Vergleichen wird durchgeführt, um die beiliegende nichtlineare Berechnung der Kombinierten Pfahl-Plattengründung (KPP) mit Hilfe der zusammengesetzten Koeffiziententechnik abzuschätzen. In den Vergleichen wird die gegenwärtige Berechnung (Nichtlineare Berechnung mit einer hyperbolischen Funktion) als *NPRH* bezeichnet.

Um *NPRH* für die Kombinierte Pfahl-Plattengründung der elastischen Platte des *Torhauses* zu überprüfen, werden die Ergebnisse mit denen aus der dreidimensionalen finiten Element-Berechnung und mit Feldmessungen verglichen. Die Platte wird in rechteckige Elemente unterteilt, wie im Bild 2-13 gezeigt. Elementgrößen in *x*-Richtung für die Einzelplatte sind $1.75+10*1.4+1.75 = 17.5$ [m], während die Elementgrößen in *y*-Richtung $14*1.75 = 24.5$ [m] sind. Die Pfähle werden in Linienelemente mit 2.0 [m] unterteilt. Das Fundament wird als elastische Platte angenommen, die auf starren Pfählen steht. Eine Bodenschicht von $H=110$ [m] Mächtigkeit wie bei der dreidimensionalen finiten Element-Berechnung ist berücksichtigt.

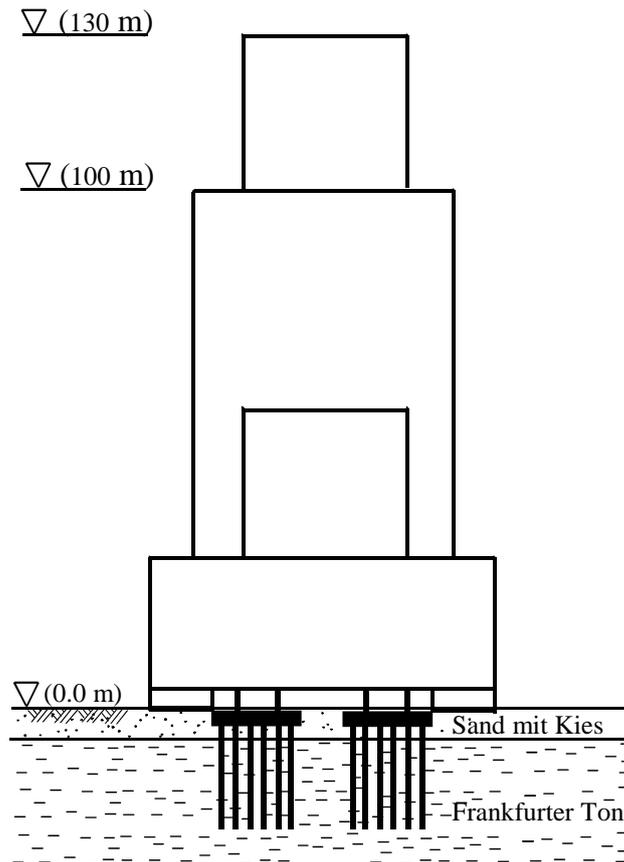


Bild 2-12 Abbildung des *Torhauses* mit der Pfahlplatte

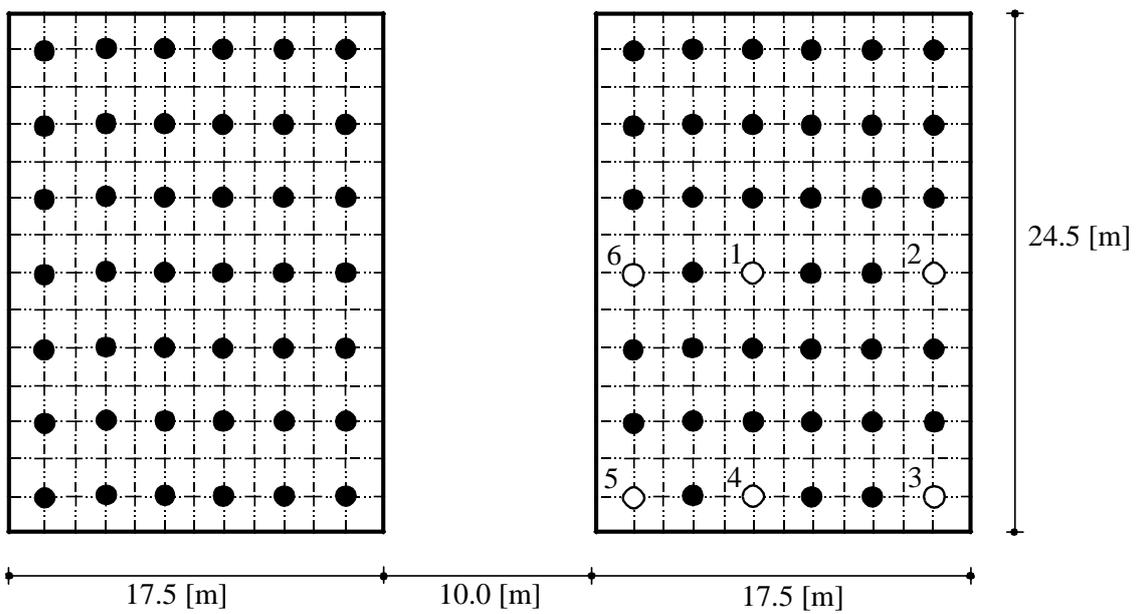


Bild 2-13 Netz der Pfahlplatte des *Torhauses* mit Pfählen

2.6.2.4 Vergleich mit der dreidimensionalen finiten Element-Berechnung und Feldmessungen

Reul & Randolph (2003) haben die Pfahl-Plattengründung des *Torhauses* mit der dreidimensionalen finiten Element-Methode berechnet und haben ihre Ergebnisse mit denen von Feldmessungen nach *Sommer* (1989) verglichen. Wegen der Symmetrie um die x - und y -Achse in Form, Größe, Lasten und Baugrund genügt es, nur ein Viertel der Kombinierten Pfahl-Plattengründung (KPP) zu berechnen. In *NPRH* werden die zwei Pfahl-Plattengründungen zusammen berechnet, um die Interaktion zwischen allen Elementen der zwei Pfahl-Plattengründungen zu berücksichtigen. Eine lineare Berechnung wird zuerst ausgeführt, um den Anfangstangentenmodul zu erhalten. In dieser Primärberechnung wird die Wirkung der Wiederbelastung betrachtet. Für die nichtlineare Berechnung wurde die Genauigkeit mit $\epsilon=0.0002$ [m] gewählt. Sieben Iterationsschritte in wenigen Minuten werden benötigt, um die nichtlineare Berechnung der Pfahl-Plattengründungen zusammen zu erhalten. Dies bezieht sich darauf, dass die Verwendung der zusammengesetzten Koeffiziententechnik in der Berechnung die Größe der Bodensteifigkeitsmatrix von [1314*1314] auf [390*390] reduzierte. Dementsprechend wurde die Gesamtanzahl von Gleichungen auf 1170 reduziert, wobei $n_{pr}=1314$, $n_r=390$ und Anzahl der Unbekannten pro Knoten 3 ($3 n_r = 1170$) ist.

Tabelle 2-5 listet die Ergebnisse der zentralen Setzung und Tragwirkungskoeffizienten der Pfahl-Plattengründung, die von *NPRH* erhaltenen werden, mit denen von *Reul & Randolph* (2003) nach der dreidimensionalen finite Element-Berechnung. Die Tabelle enthält auch die gemessenen Ergebnisse nach *Sommer* (1989). Bild 2-14 und Bild 2-15 vergleichen Lasten auf den Pfählen 1 bis 6 (Bild 2-13), die von *NPRH* erhalten werden, mit denen von *Reul & Randolph* (2003) nach der dreidimensionalen finite Element-Berechnung und mit den gemessenen Pfahllasten von *Sommer* (1989).

Tabelle 2-5 Vergleich zwischen den Ergebnissen der dreidimensionalen finiten Element-Berechnung, Feldmessungen und *NPRH*

Berechnung	Feldmessungen	3D FE-Berechnung	<i>NPRH</i>
zentrale Setzung s_{center} [cm]	12.4	9.6	11.2
Tragwirkungskoeffizienten α_{kpp} [%]	67	76	64

Tabelle 2-5 zeigt, dass die Setzung und Tragwirkungskoeffizienten der Pfahl-Plattengründung für *NPRH* in guter Übereinstimmung mit Feldmessungen sind. Die Ergebnisse der Pfahllasten im Bild 2-14 und im Bild 2-15 sind in guter Übereinstimmung mit denen sowohl der dreidimensionalen finiten Element-Berechnung als auch der Feldmessungen. Die dreidimensionale finite Element-Berechnung hat einen relativ großen Unterschied bei den Tragwirkungskoeffizienten verglichenen mit denen der Feldmessungen und *NPRH*.

Diese Falluntersuchung zeigt, dass *NPRH* nicht nur ein akzeptables Verfahren ist, um die Kombinierte Pfahl-Plattengründung zu berechnen, sondern auch ein praktisches Verfahren für die Berechnung eines großen Kombinierten Pfahl-Plattengründungproblems darstellt. Daneben gibt *NPRH* eine gute Übereinstimmung mit Feldmessungen und braucht weniger Rechenzeit, verglichen mit anderen komplizierten Modellen, die bei der dreidimensionalen finiten Element-Berechnung verwendet werden.

2.6.2.5 Vergleich mit verschiedenen Berechnungen

Um den Unterschied zwischen den Ergebnissen der Pfahl-Plattengründung des *Torhauses* bei linearer und nichtlinearer Berechnung für elastische oder starre Platten zu zeigen, wird die Pfahl-Plattengründung des *Torhauses* viermal wie folgt berechnet:

- Lineare Pfahl-Plattengründung für die starre Platte
- Nichtlineare Pfahl-Plattengründung für die starre Platte
- Lineare Pfahl-Plattengründung für die elastische Platte
- Nichtlineare Pfahl-Plattengründung für die elastische Platte

Tabelle 2-6 zeigt die zentralen Setzungen und Tragwirkungskoeffizienten der Pfahl-Plattengründung für die vier Berechnungen, während Bild 2-16 und Bild 2-17 die Lasten auf die Pfähle 1 bis 6 zeigen. Allgemein kann man aus der Tabelle 2-6 und diesen Bildern folgende Schlussfolgerungen ziehen:

a) *Setzung*

- Die Setzungen der nichtlinearen Berechnungen der Pfahl-Plattengründung für die starre oder die elastische Platte sind größer als die Setzungen der linearen Berechnung.
- Die nichtlineare Setzung überschreitet die lineare Setzung bei 48% für die Pfahl-Plattengründung der starren Platte und bei 29% für die Pfahl-Plattengründung der elastischen Platte.
- Für eine einzelne Berechnung für die Pfahl-Plattengründung einer starren oder elastischen Platte (linear oder nichtlinear) ist der Unterschied in der Setzung klein. Dies bedeutet, dass jede Berechnung zum Schätzen der Setzung verwendet werden kann.

b) *Tragwirkungskoeffizient der Pfahl-Plattengründung*

- Die Tragwirkungskoeffizienten der Pfahl-Plattengründung aus der nichtlinearen Berechnung sind kleiner als aus der linearen Berechnung.
- Die Tragwirkungskoeffizienten der Pfahl-Plattengründung aus der nichtlinearen Berechnung mindern bei 13% für die starre Platte und bei 15% für die elastische Platte.

c) *Lasten auf dem Pfahlkopf*

- Durch die Umverteilung der Pfahllasten sind bei der nichtlinearen Berechnung die Pfahllasten auf den inneren Pfählen (Pfähle 1 und 6) größer geworden, während die Pfahllasten auf den äußeren Pfählen kleiner (Pfähle 2, 3, 4 und 5) geworden sind.
- Gesamtpfahllasten auf die Pfahl-Plattengründung für die starre Platte sind größer als bei der Pfahl-Plattengründung für die elastische Platte.
- Die Pfahllasten der äußeren Pfähle nach der Berechnung von Pfahl-Plattengründungen für die starre Platte sind größer als bei Pfahl-Plattengründung für die elastische Platte. Umgekehrtes gilt für die Pfahllasten der inneren Pfähle.

Tabelle 2-6 Vergleich der verschiedenen Berechnungen

Berechnungen	starre Platte		elastische Platte	
	Lineare	Nichtlineare	Lineare	Nichtlineare
zentrale Setzung s_{center} [cm]	7.0	13.4	8.0	11.2
Tragwirkungskoeffizienten α_{kpp} [%]	88	77	75	64

Die Anwendung verschiedener Berechnungen bei der Pfahl-Plattengründung des *Torhauses* zeigt, dass die nichtlineare Berechnung der Pfahl-Plattengründung für die elastische Platte eine akzeptable Berechnung ist, wobei die Ergebnisse mit gemessenen Werten übereinstimmen.

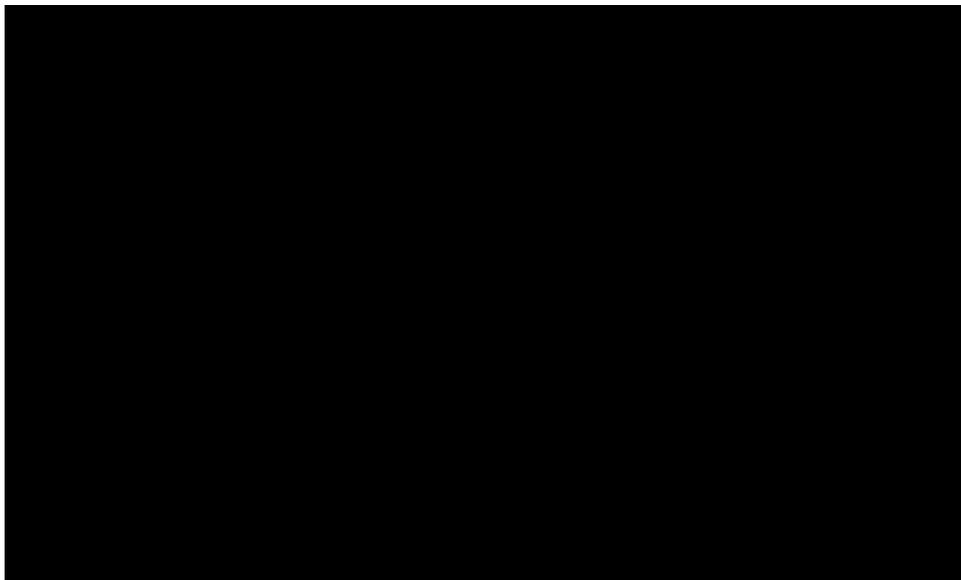


Bild 2-14 Vergleich zwischen Pfahlasten bei der 3D FE-Methode und Feldmessungen mit denen von *NPRH* (Pfahl 3, 4 und 5)



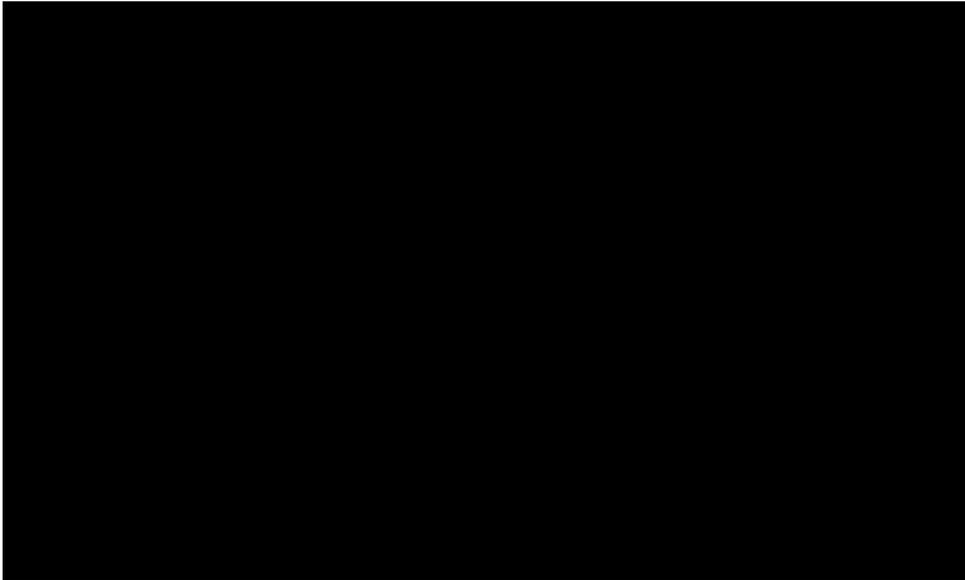


Bild 2-15 Vergleich zwischen Pfahlasten bei der 3D FE-Methode und Feldmessungen mit denen von *NPRH* (Pfahl 1, 2 und 6)

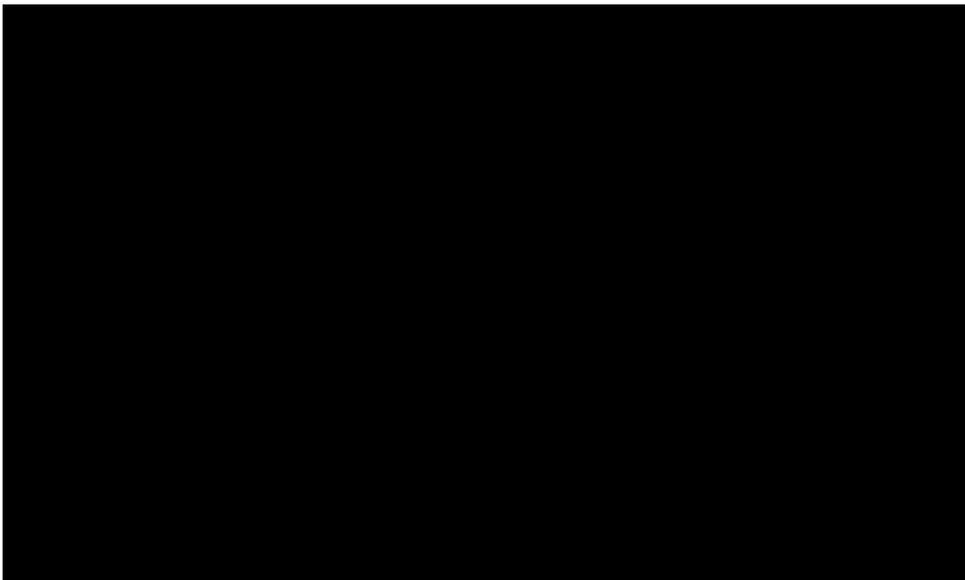


Bild 2-16 Vergleich der Pfahllasten nach verschiedenen Berechnungen (Pfahl 3, 4 und 5)



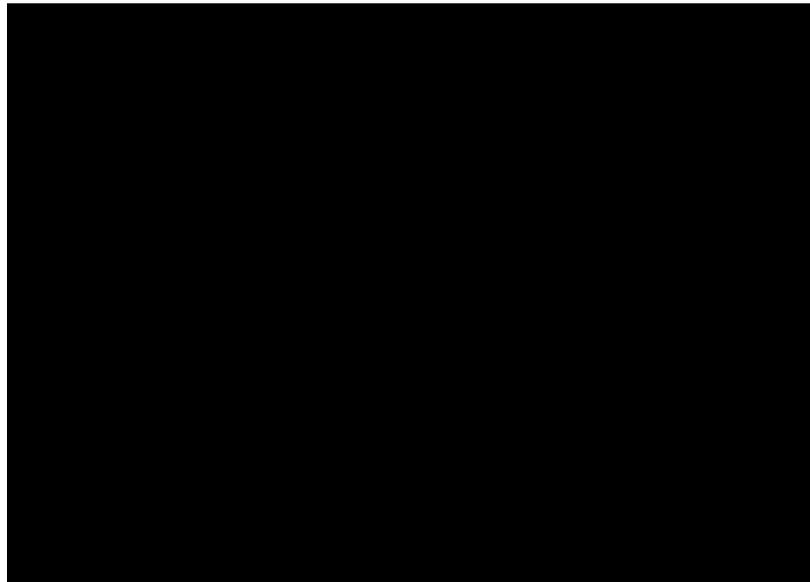


Bild 2-17 Vergleich der Pfahllasten nach verschiedenen Berechnungen (Pfahl 1, 2 und 6)



2.7 Literatur

- [1] *Amann, P./ Breth, H./ Stroh, D.* (1975): Verformungsverhalten des Baugrundes beim Baugrubenaushub und anschließendem Hochhausbau am Beispiel des Frankfurter Ton. Mitteilungen der Versuchsanstalt für Bodenmechanik und Grundbau der Technischen Hochschule Darmstadt, Heft 15.
- [2] *Basile, F.* (1999): Non-linear analysis of pile groups. Proc. Instn Civ. Engrs Geotech. Engng, 137, 105-115.
- [3] *Baz, O.* (1987): Plates on nonlinear subgrade. Master Thesis, Mansoura University, Egypt.
- [4] *Butterfield, R./ Banerjee, K.* (1971): The elastic analysis of compressible piles and pile group. Géotechnique, 21, No. 1, 43-60.
- [5] *Clancy, P./ Randolph, M.* (1993): An approximate analysis procedure for piled raft foundation. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 17 (12), 849-869.
- [6] *Clancy, P./ Randolph, M.* (1994): Simple design tools for piled raft foundation. Géotechnique, Vol. 46, No. 2, pp. 313-328.
- [7] *El Gendy, M.* (1999): An iterative procedure for foundation-superstructure interaction problem. Port-Said Engineering Research journal, Vol. 3, No. I, pp. 1-19, Egypt.
- [8] *El Gendy, M.* (2007): Formulation of a composed coefficient technique for analyzing large piled raft. Scientific Bulletin, Faculty of Engineering, Ain Shams University, Cairo, Egypt. Vol. 42, No. 1, March 2007, pp. 29-56.
- [9] *Fleming, W.* (1992): A new method for single pile settlement predication and analysis. *Géotechnique*, Vol. 42, No. 3, 411-425.
- [10] *Hasnien, M.* (1993): Finite element analysis of mat resting on nonlinear elastic medium. M. Sc. Thesis, Ain Shams University, Faculty of Engineering, Egypt.
- [11] *Jeong, S./ Won, J./ Lee, J.* (2003): Simplified 3D analysis of laterally loaded Pile Groups. TRB Annual Meeting.
- [12] *Kany, M./ El Gendy, M./ El Gendy, A.:* Analysis and design of foundations by the Program ELPLA. GEOTEC Software, Zirndorf (2007)
- [13] *Kitiyodom, P./ Matsumoto, T.* (2002): A simplified analysis method for piled raft and pile group foundation with batter Piles. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 26, 1349-1369.
- [14] *Kitiyodom, P./ Matsumoto, T.* (2003): A simplified analysis method for piled raft foundations in non-homogeneous soils. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 27, 85-109.
- [15] *Lee, K./ Xiao, Z.* (2001): A simplified nonlinear approach for pile group settlement analysis in multilayered soils. *Can. Geotech. J.*, 38, 1063-1080.
- [16] *Liang, F./ Chen, L.* (2004): A modified variational approach for the analysis of piled raft foundation. *Mechanics Research Communications* 31, 593-604.
- [17] *Lutz, B./ El-Mossallamy, Y./ Richter, Th.* (2006): Ein einfaches, für die Handberechnung geeignetes Berechnungsverfahren zur Abschätzung des globalen Last-Setzungsverhalten von Kombinierten Pfahl-Plattengründungen. *Bauingenieur*, Band 81, 61-66.

- [18] *Mandolini, A./ Viggiani, C. (1997): Settlement of piled foundations. Géotechnique, Vol. 47, No. 4, 791-816.*
- [19] *Mendonça, A./ Paiva, J. (2003): An elasostatic FEM/BEM analysis of vertically loaded raft and piled raft foundation. Engineering Analysis with Boundary Elements, 27, 919-933.*
- [20] *Mindlin, R. D. (1936): Force at a Point in the interior of a semi-infinite solid. Physic 8, 195.*
- [21] *Poulos, H./ Davis, E. (1968): The settlement behaviour of single axially loaded incompressible piles and piers. Géotechnique, Vol. 18, 351-371.*
- [22] *Poulos, H. (1968): Analysis of the settlement of pile groups. Géotechnique, Vol. 18, 449-471.*
- [23] *Poulos, H. (1999): Approximate computer analysis of pile groups subjected to loads and ground movements. Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 23, 1021-1041.*
- [24] *Reul, O./ Randolph, M. (2003): Piled rafts in overconsolidated clay: comparison of in situ measurements and numerical analyses. Géotechnique Vol. 53, No. 3, 301-315*
- [25] *Russo, G. (1998): Numerical analysis of piled rafts. Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 22, 477-493.*
- [26] *Sommer, H./ Wittmann, P./ Ripper, P. (1985): Piled raft foundation of a tall building in Frankfurt clay. Proc. 11th Int. Conf. Soil Mech. Found. Engng, San Francisco 4, 2253-2257.*
- [27] *Sommer, H. (1989): Entwicklung der Hochhausgründungen in Frankfurt/ Main. Festkolloquium 20 Jahre Grundbauinstitut, 47-62, Darmstadt.*
- [28] *Sommer, H./ Katzenbach, R. (1990): Last-Verformungsverhalten des Messeturmes Frankfurt/ Main. Vorträge der Baugrundtagung 1990 in Karlsruhe, Seite 371-380.*
- [29] *Ta, L./ Small, J. (1997): An approximation for analysis of raft and piled raft foundation. Computer and Geotechnics, Vol. 20, No. 2, pp. 105-123.*
- [30] *Wong, S./ Poulos, H. (2005): Approximate pile-to-pile interaction factors between two dissimilar piles. Computer and Geotechnics 32, 613-618.*
- [31] *Winkler, E. (1867): Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit. Dominicus, Prag.*

Abschnitt 3

Empirische mit Numerische Berechnung von Pfahlgruppen und KPP

Inhalt	Seite
3 Empirische mit Numerische Berechnung von Pfahlgruppen und KPP.....	4
3.1 Einleitung.....	4
3.2 Numerische Modellierung	5
3.2.1 Pfahl-Pfahl-Interaktion	5
3.2.2 Pfahl-Platte-Interaktion.....	13
3.2.3 Platte-Pfahl-Interaktion.....	15
3.2.4 Platte-Boden-Interaktion.....	17
3.2.5 Formulierung der Bodengleichungen	19
3.2.6 Berechnung einer starren Kombinierten Pfahl-Plattengründung.....	22
3.2.7 Berechnung einer starren Pfahlgruppe oder schlaffen Platte auf starrer Pfahlgruppe	25
3.2.8 Berechnung einer elastischen Kombinierten Pfahl-Plattengründung	25
3.2.9 Iterationsverfahren	26
3.3 Untersuchungsfall: Kombinierte Pfahl-Plattengründung (KPP) des Messeturmes als höchstes Gebäude in Europa.....	29
3.3.1 Beschreiben des Problems	29
3.3.2 Berechnung der Pfahlplatte.....	31
3.3.3 Bodenkennwerte	33
3.4 Literatur.....	39

Abschnitt 3

3 Empirische mit Numerische Berechnung von Pfahlgruppen und KPP

3.1 Einleitung

Viele Autoren haben das nichtlineare Verhältnis des Pfahl-Baugrundsystems mit Verwendung von theoretischen Beziehungen zwischen Last und Setzung untersucht. *Mandolini & Viggiani* (1997), (1998) und *Russo* (1998) haben die Pfähle als nichtlineare interagierende Federn betrachtet, die auf der Interaktionsfaktoren-Methode basieren. In ihren Berechnungen wird die Nichtlinearität im Wesentlichen an der Pfahl-Bodenschnittstelle konzentriert, während die Wechselwirkung zwischen anderen Elementen (Pfahl-Pfahl, Pfahl-Platten und Boden-Pfahl-Interaktionen) mit einem linearen Modell dargestellt wird. Das nichtlineare Boden-Pfahlverhältnis wird mit einem Ausdruck dargestellt, der einer hyperbolischen Last-Setzungsbeziehung für den einzelnen Pfahl entspricht. Die hyperbolische Beziehung basiert auf einer Funktion, die einen Maximalwert für die Pfahlkapazität hat. Der Maximalwert wird nur als geometrischer Parameter der Hyperbel berücksichtigt, die die Last-Setzungslinie in den interessierenden Lastbereich einpasst. In einigen Fällen kann sich dieser Wert erheblich von der eigentlichen Versagenslast unterscheiden (*Mandolini & Viggiani* (1997)).

Basile (1999), (2003) hat ein nichtlineares Modell verwendet, das der bewährten hyperbolischen Beziehung zwischen Bodenspannung und Dehnung folgt. Dieses Modell wurde von *Duncan & Chang* (1970) vorgeschlagen in der Annahme, dass der Elastizitätsmodul des Bodens mit der Spannungsebene an der Pfahl-Bodenschnittstelle variiert. Die für dieses Modell passende hyperbolische Kurve hängt von einigen Konstanten ab, die schwierig abzuschätzen sind. Am besten werden diese Konstanten durch Anpassen der Last-Verformungskurve an die Daten eines Pfahllasttests bestimmt.

Witzel & Kempfert (2005) stellten empirische Beziehungen dar zum Aufzeigen des Last-Setzungsverhaltens für Bohrpfähle mit Benutzung von Feldtestdaten. Auch enthalten die meisten nationalen Normen wie z.B. die deutsche Norm DIN 4014 [6] und die ägyptische Norm ECP [8] empirische Beziehungen für Last-Setzung der Pfähle, die auf statistischen Feldergebnissen basieren. Deshalb hat *El Gendy et al.* (2006) gemischtes Verfahren von empirischen und mathematischen Modellen für die Berechnung von Pfahlgruppen und Pfahlplatten entwickelt. Abhängig von der Last-Setzungs-Linie, die man aus Feldmessungen oder empirischen Beziehungen erhält, wird eine nichtlineare Berechnung von Kombinierten Pfahl-Plattengründungen dargestellt, mit der das wirkliche Baugrundverhalten berücksichtigt werden kann. In der Berechnung wird jeder Pfahl wie zwei Einheiten behandelt -Pfahlmantel und Pfahlfuß - mit einer gleichförmigen Setzung entlang des Pfahlmantels und im Pfahlfuß. Diese Annahme ermöglicht die Modellierung des nichtlinearen Verhaltens von Kombinierten Pfahl-Plattengründungen. Dieses beruht auf der empirischen Beziehung der Last-Setzungs-Linie nach DIN 4014. Als Verbindung zwischen empirischen und theoretischen Vorgehensweisen wurde für die nichtlineare Berechnung von Kombinierten Pfahl-Plattengründungen mit Verwendung der DIN 4014 ein Verfahren - genannt *NPRD* (nach der englischen Bezeichnung: **n**onlinear analysis of combined **p**iled-**r**aft using **DIN** 4014) - entwickelt.

Das Verfahren erfüllt die Anforderungen der KPP-Richtlinie (2000), Abschnitt 6, an ein Rechenmodell. Das Verfahren *NPRD* wurde in das Programm *ELPLA* [10] eingefügt.

3.2 Numerische Modellierung

In dem vorgeschlagenen numerischen Modell für die Berechnung wird die Eigensetzung des Pfahles aus der Last-Setzungs-Beziehung nach DIN 4014 [6] bestimmt, während die Setzung infolge Pfahl-Pfahl, Pfahl-Platten und Platte-Boden-Interaktionen numerisch mit Verwendung der Flexibilitätskoeffizienten bestimmt wird. Eine volle Kompatibilität zwischen Setzungen der Pfähle, Platte und Boden wird in der Pfahl-Platten-Bodenschnittstelle erreicht.

3.2.1 Pfahl-Pfahl-Interaktion

DIN 4014 [6] stellt die Pfahllast in zwei Komponenten dar: Spitzenkraft auf dem Pfahlfuß und Mantelreibungskraft entlang des Pfahlmantels. Deshalb werden zwei Flexibilitätsmatrizen für die Pfahl-Pfahl-Interaktion ohne die Interaktion des Pfahles selbst bestimmt. Die erste Matrix stellt den Einfluss der Einheitsspitzenkräfte dar, während die andere den Einfluss der Einheitsmantelkräfte darstellt.

Setzung entlang des Pfahlmantels $Sbs_{i,j}$ [m] infolge einer Spitzenkraft Qb_j [kN]

Um die Gleichungen des vorgeschlagenen Verfahrens zu formulieren, wird, wie im Bild 1 gezeigt, ein System von zwei Pfählen mit verschiedenen Längen betrachtet. Der tatsächliche Spitzendruck qb_j [kN/m²] auf dem Fuß des Pfahles j wird durch eine äquivalente Spitzenkraft Qb_j [kN] ersetzt. Der Pfahl i mit einer Länge l_i [m] wird in m Elemente mit gleicher Länge Δl [m] unterteilt. Zuerst wird die Setzung eines Mantelelementes k des Pfahles i bestimmt, das von einer Spitzenkraft Qb_j beeinflusst wird, die auf den Fuß des Pfahles j einwirkt. Dann kann eine gleichförmige Setzung entlang des Pfahlmantels infolge dieser Spitzenkraft durch Integration der Setzungen für die einzelnen Elemente numerisch bestimmt werden.

Nach der *Mindlinschen* Lösung (1936) wird die Setzung $Sbs_{k,j}$ im Punkt k in einer Tiefe z des Geländes infolge einer Spitzenkraft Qb_j auf dem Fuß des Pfahles j gegeben durch:

$$Sbs_{k,j} = f_{k,j} Qb_j \quad (3.1)$$

wobei $f_{k,j}$ mit *Mindlin* (1936) gegeben ist durch:

3 Empirische mit Numerische Berechnung von Pfahlgruppen und KPP

$$f_{k,j} = \frac{1}{16 \pi G_s (1 - v_s)} \left(\frac{3 - 4 v_s}{R_1} + \frac{8(1 - v_s)^2 - (3 - 4 v_s)}{R_2} \right) + \frac{(z - c)^2}{R_1^3} + \frac{(3 - 4 v_s)(z + c)^2 - 2cz}{R_2^3} + \frac{6 c z (z + c)^2}{R_2^5} \quad (3.2)$$

wobei:

$$R_1 = \sqrt{r^2 + (z - c)^2}, R_2 = \sqrt{r^2 + (z + c)^2} \text{ und}$$

- c Tiefe der Punktlast Qb_j von der Geländeoberfläche [m]
- z Tiefe des untersuchten Punktes k von der Geländeoberfläche [m]
- r Radialabstand zwischen den Punkten k und j [m]
- $f_{k,j}$ Flexibilitätskoeffizient des Punktes k infolge einer Einheitslast am Punkt j [m/kN]
- G_s Schubmodul des Bodens [kN/m²]. $G_s = 0.5 E_s / (1 + v_s)$
- E_s Elastizitätsmodul des Bodens [kN/m²]
- v_s Poissonzahl des Bodens [-]

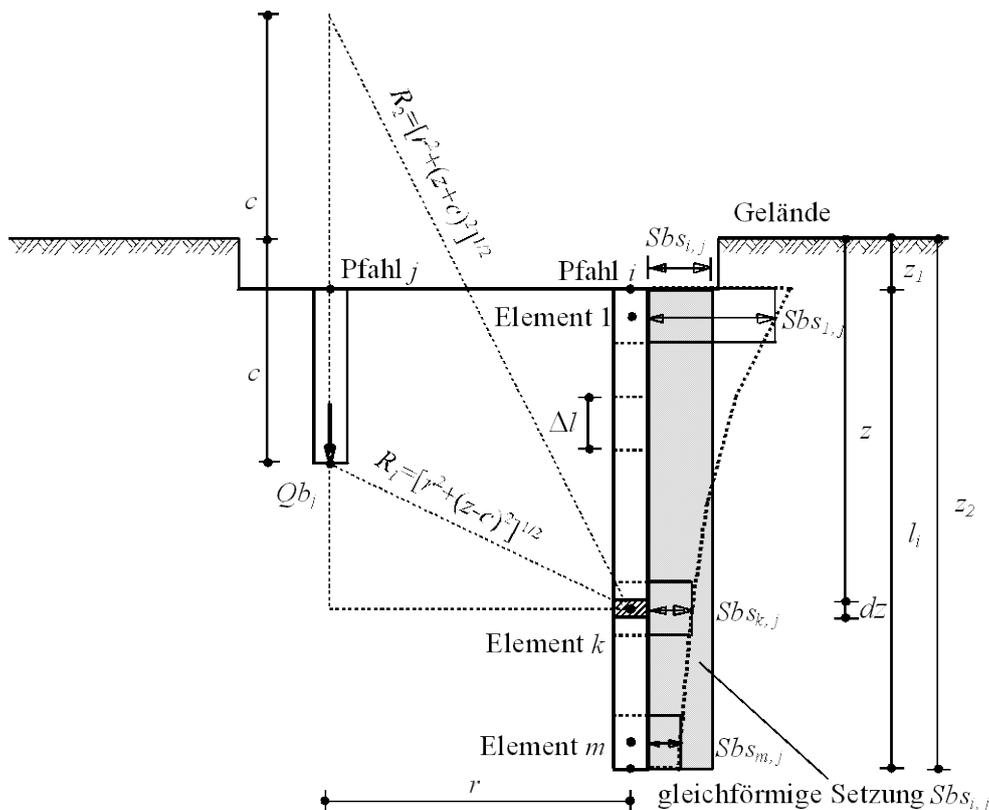


Bild 3-1 Setzung $Sbs_{k,j}$ im Pfahlelement k infolge einer Spitzkraft Qb_j auf dem Fuß des Pfahles j

Damit kann die gleichförmige Setzung $Sbs_{i,j}$ entlang des Mantels des Pfahles i infolge einer Spitzenkraft Qb_j auf dem Fuß des Pfahles j berechnet werden aus:

$$Sbs_{i,j} = \frac{I}{l_i} \int_{z_1}^{z_2} Sbs_{k,j} dz \quad (3.3)$$

Obwohl Gl. (3) für z analytisch integriert werden kann, wird aber eine numerische Integration verwendet, um die Berechnung des Pfahles zu erlauben, der durch einen mehrschichtigen Baugrund geht, wie es später beschrieben wird. Setzt man die Gl. (1) in Gl. (3) ein, und verwendet die numerische Integration mit Hilfe der rechteckigen Regel, erhält man folgende Gleichung:

$$Sbs_{i,j} = \frac{Qb_j \Delta l}{l_i} (f_{1,j} + f_{2,j} + f_{3,j} + f_{4,j} + \dots + f_{m,j}) \quad (3.4)$$

Gleichung (4) ist vereinfacht:

$$Sbs_{i,j} = F_{i,j} Qb_j \quad (3.5)$$

wobei $F_{i,j}$ [m/kN] der Mantelflexibilitätskoeffizient des Pfahles i infolge einer Spitzenkraft Qb_j auf dem Fuß j ist. Der Mantelflexibilitätskoeffizient $F_{i,j}$ ist ausgedrückt als:

$$F_{i,j} = \frac{\Delta l}{l_i} (f_{1,j} + f_{2,j} + f_{3,j} + f_{4,j} + \dots + f_{m,j}) \quad (3.6)$$

Setzung im Pfahlfuß $Sbb_{i,j}$ [m] infolge einer Spitzenkraft Qb_j [kN]

Die Setzung $Sbb_{i,j}$ im Fuß des Pfahles i infolge einer Spitzenkraft Qb_j auf den Fuß des Pfahles j wird ausgedrückt als:

$$Sbb_{i,j} = F_{b,j} Qb_j \quad (3.7)$$

wobei $F_{b,j}$ [m/kN] der Fußflexibilitätskoeffizient des Pfahles i infolge einer Spitzenkraft Qb_j auf dem Fuß des Pfahles j ist. Der Flexibilitätskoeffizient des Fußes wird aus Gl. (2) mit $z = z_2$ bestimmt, wobei z_2 [m] die Tiefe des Fußes des Pfahles i von der Geländeoberkante ist.

Setzung im Pfahl $Sb_{i,j}$ [m] infolge einer Spitzenkraft Qb_j [kN]

Mit der Annahme, dass der Pfahl eine gleichförmige Setzung in all seinen Knoten hat, ist die Setzung entlang des Mantels gleich der im Fuß. Nun kann die Setzung im Pfahl i mit einem Wert $Sb_{i,j}$ dargestellt werden, der ein Durchschnitt der Mantel- und Fußsetzungen des Pfahles infolge der Spitzenkraft Qb_j auf dem Fuß des Pfahles j ist. Nimmt man den Durchschnitt der Setzungen in den Gln. (5) und (7) an, erhält man die Setzung im Pfahl mit:

$$Sb_{i,j} = Fb_{i,j} Qb_j \quad (3.8)$$

wobei $Fb_{i,j} = 0.5 (F_{i,j} + F_{b,j})$ der Flexibilitätskoeffizient des Pfahles i infolge einer Spitzenkraft Qb_j auf dem Fuß des Pfahles j ist [m/kN].

Setzung im Pfahl Sb_i [m] infolge aller Spitzenkräfte

Für eine Gruppe von n_p Pfählen wird die Setzung Sb_i im Pfahl i auf die Setzungen zurückgeführt, die von allen Spitzenkräften auf die Pfähle n_p außer Pfahl i einwirken. Dann wird die Setzung Sb_i gegeben mit:

$$Sb_i = Sb_{i,1} + Sb_{i,2} + Sb_{i,3} + \dots + Sb_{i,n} = \sum_{j=1}^n Fb_{i,j} Qb_j, i \neq j \quad (3.9)$$

Für eine Pfahlgruppe von n_p Pfählen kann Gl. (9) in Matrixform wie folgt geschrieben werden:

$$\{Sb\} = [Fb] \{Qb\} \quad (3.10)$$

wobei:

$\{Sb\}$ n_p Vektor der Setzungen in den Pfählen infolge der Spitzenkräfte auf den Pfahlfüßen

$\{Qb\}$ n_p Vektor der Spitzenkräfte auf den Pfahlfüßen

$[Fb]$ $n_p * n_p$ Matrix der Pfahlflexibilitätskoeffizienten infolge der Einheitsspitzenkräfte auf den Pfählen, $Fb_{i,i} = 0$

Setzung entlang des Pfahlmantels $Sss_{k,j}$ [m] infolge einer Mantelkraft Qs_j [kN]

Bild 2 zeigt ein System zweier Pfähle, in dem ein Mantelelement k eines Pfahles i durch eine Mantelreibung τ_{s_j} [kN/m²] beeinflusst wird, die am Umfang eines Pfahles j mit einem Durchmesser d_j [m] und eine Länge l_j [m] einwirkt. Mit Benutzung der DIN 4014 [6] wird die Mantelreibung entlang des Mantelumfanges des Pfahles j von einer Gesamtmantelreibungskraft Qs_j [kN] = $\pi d_j l_j \tau_{s_j}$ dargestellt. Um umfangreiche Berechnungen beim Anwenden der *Mindlinschen* Lösung (1936) für die Berechnung der Flexibilitätskoeffizienten infolge einer Mantelspannung entlang des Pfahlmantels zu vermeiden, wird die Mantelspannung durch eine äquivalente Linienlast T [kN/m] = Qs_j / l_j ersetzt, die auf die Achse des Pfahles einwirkt. Die Setzung $Sss_{k,j}$ in einem Punkt k in einer Tiefe z unter Gelände infolge einer Gesamtmantelkraft Qs_j auf einem Pfahl j wird folgendermaßen ausgedrückt:

$$Sss_{k,j} = I_{k,j} Qs_j \quad (3.11)$$

wobei $I_{k,j}$ [m/kN] der Flexibilitätskoeffizient des Punktes k infolge der Mantelreibungskraft Qs_j auf dem Pfahl j ist. Dieser Flexibilitätskoeffizient wird aus Gl. (2) durch Integration des Koeffizienten der Einzellast $dQs_j = T dc$ über der Länge des Pfahles j bestimmt. Der Flexibilitätskoeffizient $I_{k,j}$ des Punktes k infolge einer Einheitsmantelkraft auf dem Pfahl j kann bestimmt werden aus:

$$I_{k,j} = \frac{I}{l_j} \int_{c_1}^{c_2} f_{k,j} dc \quad (3.12)$$

Durch die Integration ergibt sich:

$$I_{k,j} = \frac{1}{16 \pi l_j G_s (1 - v_s)} (I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5) \quad (3.13)$$

wobei die Ausdrücke I_1 zu I_5 angegeben werden durch:

$$I_1 = (3 - 4 v_s) \ln \left[\frac{\sqrt{r^2 + (z - c_2)^2} - (z - c_2)}{\sqrt{r^2 + (z - c_1)^2} - (z - c_1)} \right] \quad (3.14)$$

$$I_2 = [8(1 - v_s)^2 - (3 - 4 v_s)] \ln \left[\frac{\sqrt{r^2 + (z + c_2)^2} + (z + c_2)}{\sqrt{r^2 + (z + c_1)^2} + (z + c_1)} \right] \quad (3.15)$$

$$I_3 = \ln \left[\frac{\sqrt{r^2 + (z - c_2)^2} - (z - c_2)}{\sqrt{r^2 + (z - c_1)^2} - (z - c_1)} \right] + \frac{z - c_2}{\sqrt{r^2 + (z - c_2)^2}} - \frac{z - c_1}{\sqrt{r^2 + (z - c_1)^2}} \quad (3.16)$$

$$I_4 = (3 - 4 v_s) \left(\ln \left[\frac{\sqrt{r^2 + (z + c_2)^2} + (z + c_2)}{\sqrt{r^2 + (z + c_1)^2} + (z + c_1)} \right] - \frac{(z + c_2)}{\sqrt{r^2 + (z + c_2)^2}} \right. \\ \left. + \frac{(z + c_1)}{\sqrt{r^2 + (z + c_1)^2}} \right) - 2z \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + c_1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + c_2)^2}} \right) \quad (3.17)$$

$$+ \frac{z(z + c_1)}{r^2 \sqrt{r^2 + (z + c_1)^2}} - \frac{z(z + c_2)}{r^2 \sqrt{r^2 + (z + c_2)^2}} \Bigg)$$

3 Empirische mit Numerische Berechnung von Pfahlgruppen und KPP

$$I_s = \frac{6z \left[r^4 - z(z+c_2)^3 \right]}{3r^2 \left[r^2 + (z+c_2)^2 \right]^{3/2}} - \frac{6z \left[r^4 + z(z+c_1)^3 \right]}{3r^2 \left[r^2 + (z+c_2)^2 \right]^{3/2}} \quad (3.18)$$

$$- \frac{6z}{\sqrt{r^2 + (z+c_2)^2}} + \frac{6z}{\sqrt{r^2 + (z+c_1)^2}}$$

wobei:

- c_1 Starttiefe der Linienlast T von der Geländeoberkante [m]
- c_2 Endtiefe der Linienlast T von der Geländeoberkante [m]
- l_j Länge der Linienlast T [m]
- r Radialer Abstand zwischen dem Punkt k und j [m]

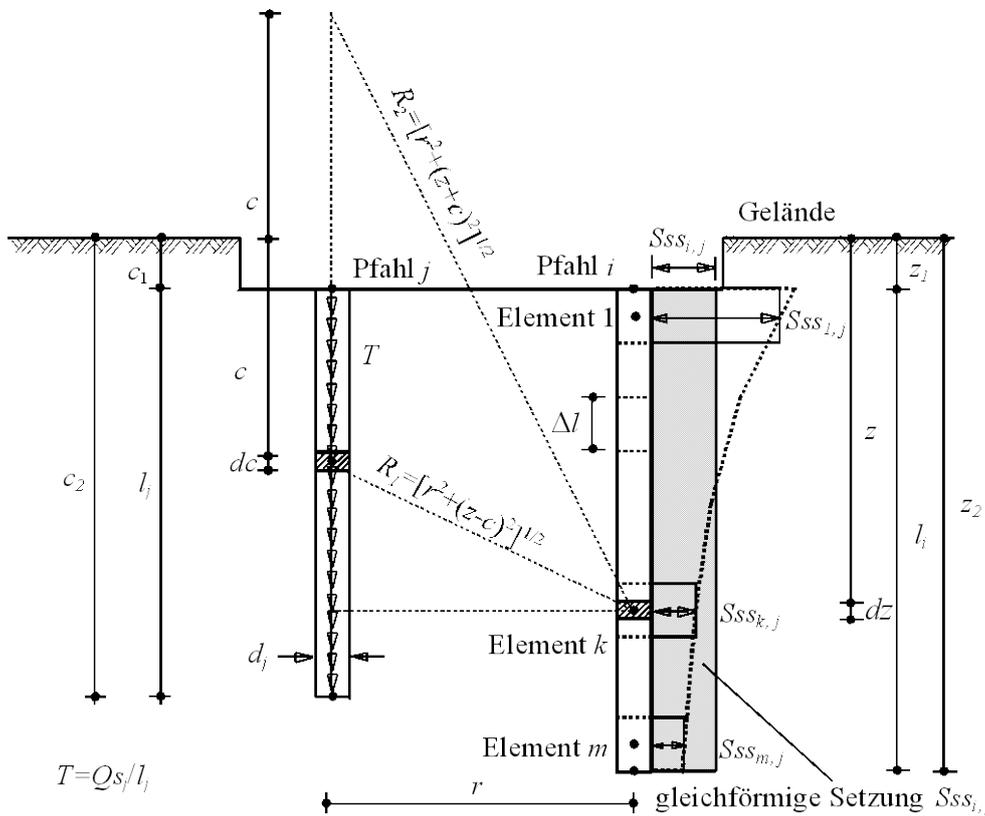


Bild 3-2 Setzung $Sss_{k,j}$ im Pfahlelement k infolge einer Mantelkraft $Q_{Sj} = T_j l_j$ auf dem Pfahl j

Die gleichförmige Setzung $Sss_{i,j}$ entlang des Mantels des Pfahles i infolge einer Mantelkraft Q_{Sj} auf dem Pfahl j kann durch Verwenden desselben Ansatzes erhalten werden, der zum Bestimmen der gleichförmigen Setzung infolge einer Spitzenkraft auf dem Fuß verwendet wird. Wie in Gl. (5) ist die gleichförmige Setzung $Sss_{i,j}$:

$$Sss_{i,j} = L_{i,j} Q_{Sj} \quad (3.19)$$

wobei $L_{i,j}$ [m/kN] der Flexibilitätskoeffizient des Pfahles i infolge einer Mantelkraft Q_{Sj} auf dem Pfahl j ist. Der Mantelflexibilitätskoeffizient $L_{i,j}$ wird ausgedrückt durch:

$$L_{i,j} = \frac{\Delta l}{l_i} (I_{1,j} + I_{2,j} + I_{3,j} + I_{4,j} + \dots + I_{m,j}) \quad (3.20)$$

Setzung des Pfahlfußes $Ssb_{i,j}$ [m] infolge einer Mantelkraft Q_{Sj} [kN]

Die Setzung $Ssb_{i,j}$ im Fuß des Pfahles i infolge einer Mantelkraft Q_{Sj} auf dem Pfahl j wird ausgedrückt als:

$$Ssb_{i,j} = L_{b,j} Q_{Sj} \quad (3.21)$$

wobei $L_{b,j}$ [m/kN] der Fußflexibilitätskoeffizient des Pfahles i infolge einer Mantelkraft Q_{Sj} auf dem Pfahl j ist. Der Fußflexibilitätskoeffizient wird aus Gl. (11) bestimmt durch Ersatz von z mit z_2 :

Setzung im Pfahl $Ss_{i,j}$ [m] infolge einer Mantelkraft Q_{Sj} [kN]

Wie in Gl. (8) wird die Setzung im Pfahl erhalten aus:

$$Ss_{i,j} = Is_{i,j} Q_{Sj} \quad (3.22)$$

wobei

$Is_{i,j} = 0.5 (L_{i,j} + L_{b,j})$ [m/kN] der Flexibilitätskoeffizient des Pfahles i infolge einer Mantelkraft Q_{Sj} auf dem Pfahl j ist.

Setzung im Pfahl Ss_i [m] infolge aller Mantelkräfte

Wie in Gl. (10) wird die Setzung einer Pfahlgruppe von n_p Pfählen wird in Matrixform gegeben durch:

$$\{Ss\} = [Is] \{Qs\} \quad (3.23)$$

wobei:

$\{Ss\}$ n_p Vektor der Setzungen der Pfähle infolge der Mantelkräfte auf den Pfählen

$[Is]$ $n_p * n_p$ Matrix der Pfahlflexibilitätskoeffizienten infolge der Einheitsmantelkräfte,
 $Is_{i,i} = 0$

$\{Qs\}$ n_p Vektor der Mantelkräfte auf den Pfählen

Eigensetzung des Pfahles S_{v_i} [m]

Gemäß DIN 4014 [6] wird die Eigensetzung des Pfahles aus der empirischen nichtlinearen Beziehung zwischen der Last und Setzung eines einzelnen Pfahles bestimmt, wie im Bild 3 gezeigt.

Demnach kann die Beziehung zwischen der Eigensetzung im Pfahl und seiner Last ausgedrückt werden mit:

$$S_{v_i} = \frac{1}{\tan k_i} Q_{p_i} = C_{p_i} Q_{p_i} \tag{3.24}$$

wobei:

S_{v_i} Eigensetzung des Pfahles i [m]

Q_{p_i} Last auf dem Pfahl i , $Q_{p_i} = Q_{b_i} + Q_{s_i}$ [kN]

$\tan k_i$ Verhältnis zwischen der Last auf dem Pfahl und der Setzung [kN/m]

C_{p_i} Flexibilitätskoeffizient des Pfahles i infolge einer Einheitslast darauf, $C_{p_i} = 1/\tan k_i$ [m/kN]

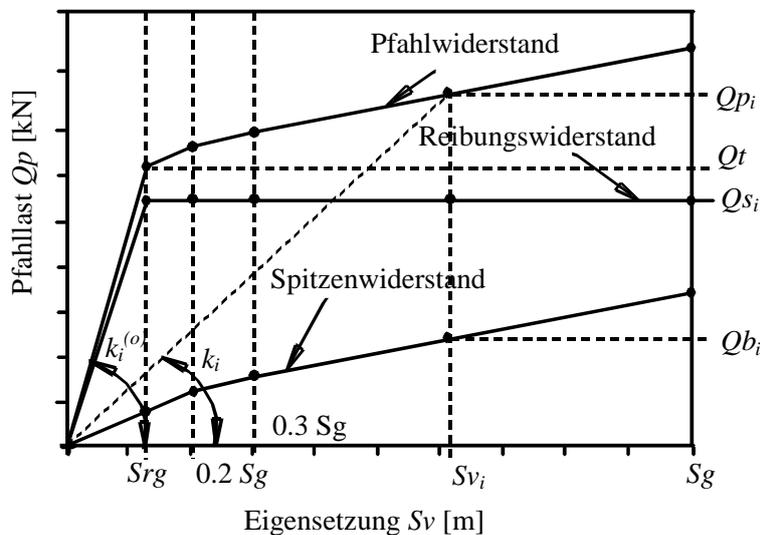


Bild 3-3 Last-Setzungs-Linie eines einzelnen Pfahles nach DIN 4014 [6]

Für eine Pfahlgruppe von n_p Pfählen kann Gl. (24) in Matrixform wie folgt geschrieben werden:

$$\{S_v\} = [C_p] \{Q_p\} \tag{3.25}$$

wobei:

$\{S_v\}$ n_p Vektor der Eigensetzungen in den Pfählen

$[C_p]$ $n_p * n_p$ diagonale Matrix der Flexibilitätskoeffizienten infolge der Einheitspfahllasten

$\{Q_p\}$ n_p Vektor der Pfahllasten

Gleichung (25) kann auch in anderer Form wie folgt geschrieben werden:

$$\{Q_p\} = [K_p]\{S_v\} \quad (3.26)$$

wobei $[K_p] = [C_p]^{-1}$ eine diagonale Matrix mit der Dimension $[n_p * n_p]$ ist, die die Bodensteifigkeit infolge der Eigensetzungen darstellt. Die Matrixkoeffizienten werden aus $(\tan k_i)$ erhalten.

Es ist notwendig, einen Anfangswert für den Flexibilitätskoeffizient C_{p_i} bei der nichtlinearen Berechnung der Pfahlgruppe oder der Pfahlplattengründung abzuschätzen, um die Berechnung zu beginnen. Dieser Wert kann aus dem Verhältnis zwischen Pfahllast Q_t und Setzung S_{rg} abgeschätzt werden, wie im Bild 3 und Gl. (27) gezeigt. Aus Bild 3 ist ersichtlich, dass für eine relative leichte angewandte Last auf die Platte d.h. $Q_p \leq Q_t$ die Berechnung mit diesem Anfangswert ohne Änderung durchgeführt werden kann.

$$C_{p_i}^{(o)} = \frac{1}{\tan k_i^{(o)}} \quad (3.27)$$

wobei:

$\tan k_i^{(o)}$	Verhältnis zwischen Q_t und S_{rg} [kN/m]
$C_{p_i}^{(o)}$	Anfänglicher Flexibilitätskoeffizient des Pfahles i infolge einer Einheitslast darauf [m/kN]
S_{rg}	Setzung beim Mantelreibungsbruch [m]
Q_t	Pfahllast entsprechend zu S_{rg} [kN]

3.2.2 Pfahl-Platte-Interaktion

In der Berechnung werden sowohl die Platte als auch die Kontaktfläche des unterstützenden Mediums in Elemente unterteilt. Bei jedem Knoten in den Elementen kann die Sohl Druckfläche um diesen Knoten verschiedene Formen entsprechend der natürlichen Geometrie der Elemente um den Knoten annehmen. Der Sohl Druck q_{r_j} [kN/m²] an der Fläche um einen Knoten j auf der Platte wird durch eine äquivalente Sohlkraft Q_{r_j} [kN] ersetzt. Bild 4 zeigt ein Mantelelement k des Pfahles i , das von einer Sohlkraft Q_{r_j} beeinflusst wird, die auf die Platte am Knoten j angreift.

Jetzt wird die Gesamtsetzung in einem Pfahl i infolge aller Kräfte im System der Pfahlplattengründung berechnet aus:

$$\{Sp\} = \{Sb\} + \{Ss\} + \{Sv\} + \{Sr\} \quad (3.30)$$

Setzt man die Gln. (10), (23), (25) und (29) in Gl. (30) ein, ergibt sich:

$$\{Sp\} = [Fb]\{Qb\} + [Is]\{Qs\} + [Cp]\{Qp\} + [Jr]\{Qr\} \quad (3.31)$$

wobei:

$\{Sp\}$ n_p Vektor der Gesamtsetzungen in den Pfählen infolge aller Kräfte im System der Pfahlplattengründung.

3.2.3 Platte-Pfahl-Interaktion

Die Bilder 5 und 6 zeigen die Platte-Pfahl-Interaktion für sowohl den Pfahlfuß als auch den Pfahlmantel. Nach Bild 5 wird die Setzung $Wb_{i,j}$ [m] in einem Knoten i auf der Platte infolge einer Spitzenkraft Qb_j auf dem Fuß des Pfahles j gegeben durch:

$$Wb_{i,j} = Cb_{i,j} Qb_j \quad (3.32)$$

während die Setzung $Ws_{i,j}$ [m] in einem Knoten i auf der Platte infolge einer Mantelkraft Qs_j auf dem Pfahl j , wie im Bild 6 gezeigt, errechnet wird mit:

$$Ws_{i,j} = Cs_{i,j} Qs_j \quad (3.33)$$

wobei $Cb_{i,j}$ [m/kN] der Flexibilitätskoeffizient im Knoten i infolge einer Spitzenkraft Qb_j auf dem Fuß des Pfahles j und $Cs_{i,j}$ [m/kN] der Flexibilitätskoeffizient im Knoten i infolge einer Mantelkraft Qs_j auf dem Pfahl j ist. Die Flexibilitätskoeffizienten $Cb_{i,j}$ und $Cs_{i,j}$ werden direkt aus Gl. (2) und Gl. (13) errechnet.

Für eine Platte von n_r Knoten wird Gl. (32) in Matrixform wie folgt geschrieben:

$$\{Wb\} = [Cb]\{Qb\} \quad (3.34)$$

wobei:

$\{Wb\}$ n_r Vektor der Setzungen in den Plattenknoten infolge der Spitzenkräfte

$[Cb]$ $n_r * n_p$ Matrix der Plattenflexibilitätskoeffizienten infolge der Einheitsspitzenkräfte auf den Pfählen

3 Empirische mit Numerische Berechnung von Pfahlgruppen und KPP

Ebenso wird Gl. (33) für die Platte wie folgt geschrieben:

$$\{W_s\} = [C_s]\{Q_s\} \quad (3.35)$$

wobei:

$\{W_s\}$ n_r Vektor der Setzungen in der Platte infolge der Mantelkräfte

$[C_s]$ $n_r * n_p$ Matrix der Plattenflexibilitätskoeffizienten infolge der Einheitsmantelkräfte an den Pfählen

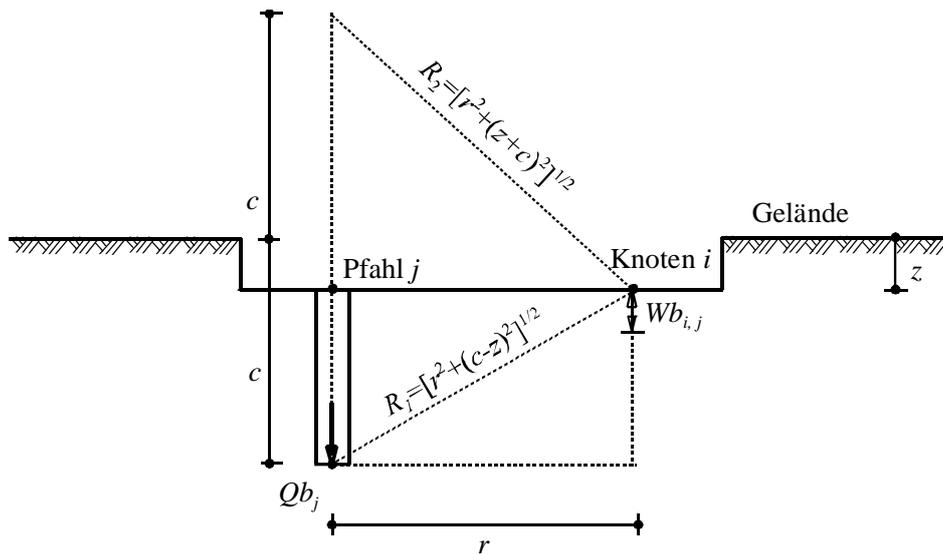


Bild 3-5 Setzung $W_{b_{i,j}}$ in einem Knoten i infolge einer Spitzenkraft Q_{b_j} auf dem Fuß des Pfahles j

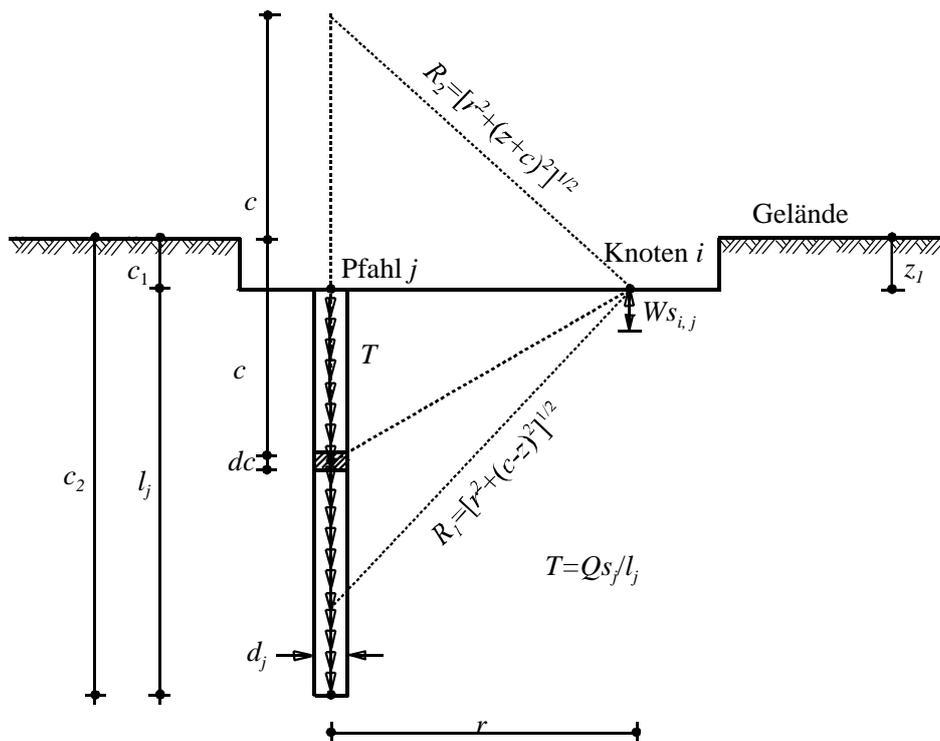


Bild 3-6 Setzung $W_{s_{i,j}}$ in einem Knoten i infolge einer Mantelkraft $Q_{s_j} = T_j l_j$ auf dem Pfahl j

3.2.4 Platte-Boden-Interaktion

Die *Mindlinsche* Lösung (1936) wird verwendet, um die Setzung in einem Punkt innerhalb der Bodenmasse infolge einer Last unter Gelände abzuschätzen. Deshalb wird die Lösung für die Pfahlprobleme angewendet. Die *Mindlinsche* Lösung (1936) ist auch besonders für die Berechnung der Platte bei Pfahlplattengründungsproblemen geeignet, wobei die Gründungstiefe in den meisten Fällen relativ tief ist, so dass die Sohlrücke Tiefeneinwirkung unter Gelände erzeugen. In der gegenwärtigen Berechnung können die Setzungen in den Plattenknoten infolge der Sohlkräfte auf der Platte aus der *Mindlinschen* Lösung bestimmt werden, in welcher die Flexibilitätskoeffizienten für eine Sohlkraft auf der Platte aus Gl. (2) erhalten werden. Dies kann direkt für alle Knoten außer dem belasteten Knoten durchgeführt werden. Der Grund ist, dass am belasteten Knoten $c = z$ ist. Folglich wird der erste Ausdruck in der Gl. (2) singulär, wenn $r = 0$ ist. In diesem Fall kann Gl. (2) benutzt werden, aber nur mit Ersatz des ersten Ausdruckes durch einen anderen, anwendbar für den belasteten Knoten. Der Ersatzausdruck in Gl. (2) wird durch Konvertierung der Punktlast zu einer äquivalenten gleichförmigen Last und Durchführung der Integration über der belasteten Fläche abgeleitet. Der Ersatzausdruck in Gl. (2) an der Ecke einer rechteckigen belasteten Fläche wird nach der Integration, wenn $z = c \neq 0$ ist:

$$C_1 = \frac{3-4\nu_s}{2} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{(m+a)}{(m-a)} + \frac{1}{b} \ln \frac{(m+b)}{(m-b)} \right) \quad (3.36)$$

wobei:

a, b Seiten der belasteten Fläche [m]

und $m = \sqrt{a^2 + b^2}$

Da die *Mindlinsche* Lösung (1936) mit $c = 0$ äquivalent zur *Boussinsqschen* Lösung (1885) ist, wird der Flexibilitätskoeffizient $C_{i,i}$ infolge einer rechteckigen gleichförmigen belasteten Fläche, wenn $z = c = 0$ aus der *Boussinsqschen* Lösung erhalten wurde, wie folgt:

$$C_{i,i} = \frac{1 - \nu_s^2}{2 \pi E_s} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{(m+a)}{(m-a)} + \frac{1}{b} \ln \frac{(m+b)}{(m-b)} \right) \quad (3.37)$$

Für die Berechnung von Platte-Boden-Flexibilitätskoeffizienten wird Gl. (37), Gl. (2) oder Gl. (2) mit dem modifizierten Ausdruck in Gl. (36) benutzt. Die Setzung $Wr_{i,j}$ [m] im Knoten i auf der Platte infolge einer Sohlkraft Qr_j im Knoten j wird gegeben durch:

$$Wr_{i,j} = Cr_{i,j} Qr_j \quad (3.38)$$

wobei:

$Cr_{i,j}$ Plattenflexibilitätskoeffizienten des Knotens i infolge einer Sohlkraft Qr_j im Knoten j , [m/kN]

$Cr_{i,j} = f_{i,j}$ für $i \neq j$

$Cr_{i,j} = C_{i,i}$ für $i = j$ and $z = c = 0$

$Cr_{i,j} = f_{i,j}$ mit modifiziertem Ausdruck C_I für $i = j$ und $z = c \neq 0$

Für eine Platte von n_r Knoten kann die Setzung in Matrixform ausgedrückt werden durch:

$$\{Wr\} = [Cr] \{Qr\} \quad (3.39)$$

wobei:

$\{Wr\}$ n_r Vektor der Setzungen in den Plattenknoten infolge der Sohlkräfte auf der Platte

$[Cr]$ $n_r * n_r$ Quadratmatrix der Plattenflexibilitätskoeffizienten infolge der Einheitssohlkräfte auf der Platte

$\{Qr\}$ n_r Vektor der Sohlkräfte auf der Platte

Gleichung (39) wird neu geschrieben, wie folgt:

$$\{Qr\} = [Ks] \{Wr\} \quad (3.40)$$

wobei:

$[Ks]$ Bodensteifigkeitsmatrix der Platte $[Ks] = [Cr]^{-1}$

Die Gesamtsetzung in der Platte infolge aller Kräfte im System der Pfahlplattengründung wird gegeben durch:

$$\{W_t\} = \{W_b\} + \{W_s\} + \{W_r\} \quad (3.41)$$

Setzt man die Gln (34) , (35) und (39) in Gl. (41) ein, erhält man:

$$\{W_t\} = [Cb]\{Q_b\} + [Cs]\{Q_s\} + [Cr]\{Q_r\} \quad (3.42)$$

wobei:

$\{W_t\}$ n_r Vektor der Gesamtsetzung in der Platte infolge aller Kräfte im System der Pfahlplattengründung

3.2.5 Formulierung der Bodengleichungen

Nachfolgend stellt der Vektor $\{S\}$ die Gesamtsetzungen im Plattennetz infolge aller Kräfte im System der Kombinierten Pfahl-Plattengründung dar. Dieser Vektor muss die Dimension $n=n_p+n_r$ haben, um die Setzungen in den Plattenknoten und Pfählen zusammen zu erfassen. Der Vektor der Gesamtsetzungen kann erhalten werden durch:

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} \{S_p\} \\ \{W_t\} \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

Setzt man die Gln. (31) und (42) in Gl. (43) ein, erhält man:

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} [Fb]\{Q_b\} + [Is]\{Q_s\} + [Cp]\{Q_p\} + [Jr]\{Q_r\} \\ [Cb]\{Q_b\} + [Cs]\{Q_s\} + [Cr]\{Q_r\} \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

oder

$$\{S\} = \begin{bmatrix} [Cp] & [0] \\ [0] & [Cr] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{Q_p\} \\ \{Q_r\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} [Fb]\{Q_b\} + [Is]\{Q_s\} + [Jr]\{Q_r\} \\ [Cb]\{Q_b\} + [Cs]\{Q_s\} \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

Gleichung (45) wird vereinfacht zu:

$$\{S\} = [C]\{Q\} + \{Pr\} \quad (3.46)$$

während $\{Pr\}$ gegeben wird mit:

$$\{Pr\} = \begin{cases} [Fb]\{Qb\} + [Is]\{Qs\} + [Jr]\{Qr\} \\ [Cb]\{Qb\} + [Cs]\{Qs\} \end{cases} \quad (3.47)$$

und der Ausdruck $[C] \{Q\}$ wird gegeben mit:

$$[C]\{Q\} = \begin{bmatrix} [Cp] & [0] \\ [0] & [Cr] \end{bmatrix} \begin{cases} \{Qp\} \\ \{Qr\} \end{cases} \quad (3.48)$$

wobei:

$\{Q\}$ n Vektor der Pfahllasten und Sohlkräfte

$[C]$ $n*n$ Matrix der Flexibilitätskoeffizienten der Pfähle und Platte

Durch Inversion der Flexibilitätskoeffizientenmatrix der Pfähle wird Gl. (45):

$$\{Q\} = [Ks]\{S\} - [Ks]\{Pr\} \quad (3.49)$$

oder

$$\{Q\} = [Ks]\{S\} - \{Pe\} \quad (3.50)$$

wobei $[Ks]=[C]^{-1}$ die Bodensteifigkeitsmatrix der Pfähle und Platte ist und gegeben wird mit:

$$[Ks] = \begin{bmatrix} [Kp] & [0] \\ [0] & [Kr] \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

während der Vektor $\{Pe\}$ gegeben wird mit:

$$\{Pe\} = [Ks]\{Pr\} \quad (3.52)$$

Wobei $[Kr]$ stellt Steifigkeit des Bodens für die Platte allein dar.

3.2.5.1 Mehrschichtenboden

Die vorherigen beschriebenen Flexibilitätskoeffizienten können nur für das isotrope elastische Halbraumbodenmedium angewandt werden. Für eine begrenzte Schicht können die Flexibilitätskoeffizienten erhalten werden, wie von *Poulos/ Davis* (1980) beschrieben wird. Als Beispiel ist der Flexibilitätskoeffizient für einen Punkt k in einer Schicht mit der Tiefe h dann:

$$f_{k,j}(h) = f_{k,j}(\infty) - f_{h,j}(\infty) \quad (3.53)$$

wobei:

- $f_{k,j}(h)$ Flexibilitätskoeffizient für einen Punkt k in einer Schicht mit der Tiefe h infolge einer Einheitslast im Punkt j [m/kN]
 $f_{k,j}(\infty)$ Flexibilitätskoeffizient für einen Punkt k für den Halbraum infolge einer Einheitslast im Punkt j [m/kN]
 $f_{h,j}(\infty)$ Flexibilitätskoeffizient für einen Punkt innerhalb dem Halbraum direkt unter k an einer Tiefe h unter Gelände infolge einer Einheitslast im Punkt j [m/kN]

3.2.5.2 Einfluss der Wiederbelastung

Um das Verformungsverhalten des Baugrundes zu verbessern, ist die Gesamtsetzung der Kombinierten Pfahl-Plattengründung in zwei Teile eingeteilt. Im ersten Teil verformt sich der Baugrund entsprechend dem Steifemodul für Wiederbelastung W_s [kN/m²], bis der Sohldruck die Vorbelastung des Baugrundes in der Fundamentsohle q_v [kN/m²] erreicht. Im zweiten Teil nach Erreichen der in der Fundamentsohle vor Baugrubenaushub vorhandenen Belastung q_v [kN/m²] verformt sich der Baugrund bei gleichem Druck q_e stärker entsprechend dem Steifemodul für Erstbelastung E_s [kN/m²], bis der Sohldruck den mittleren angewandten Sohldruck q_o [kN/m²] erreicht. Deshalb wird die Drucksetzungslinie (Bild 7) in 2 lineare Bereiche eingeteilt und die Setzung aus 2 Anteilen bestimmt:

$$f_{k,j} = \frac{q_v}{q_o} f_{k,j}(W_s) + \frac{q_e}{q_o} f_{k,j}(E_s) \quad (3.54)$$

wobei:

- $f_{k,j}(W_s)$ Flexibilitätskoeffizient für einen Punkt k infolge einer Einheitslast im Punkt j , der mit W_s berechnet wird [m/kN]
 $f_{k,j}(E_s)$ Flexibilitätskoeffizient für einen Punkt k infolge einer Einheitslast im Punkt j , der mit E_s berechnet wird [m/kN]

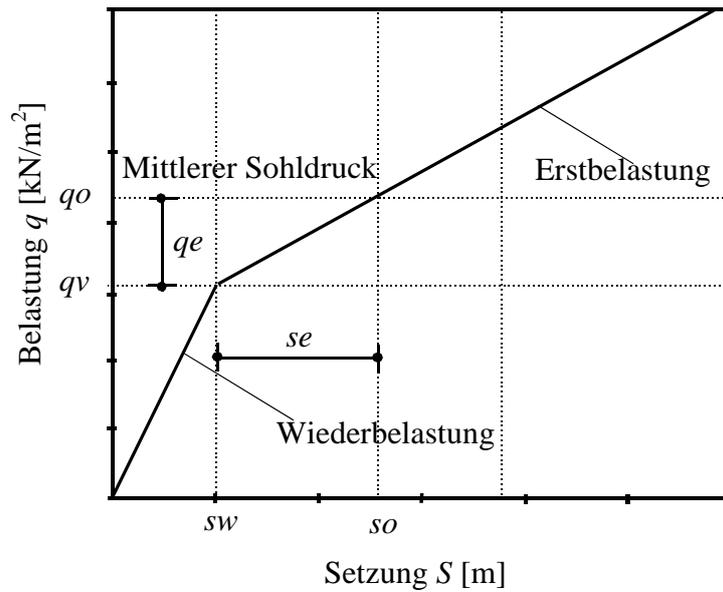
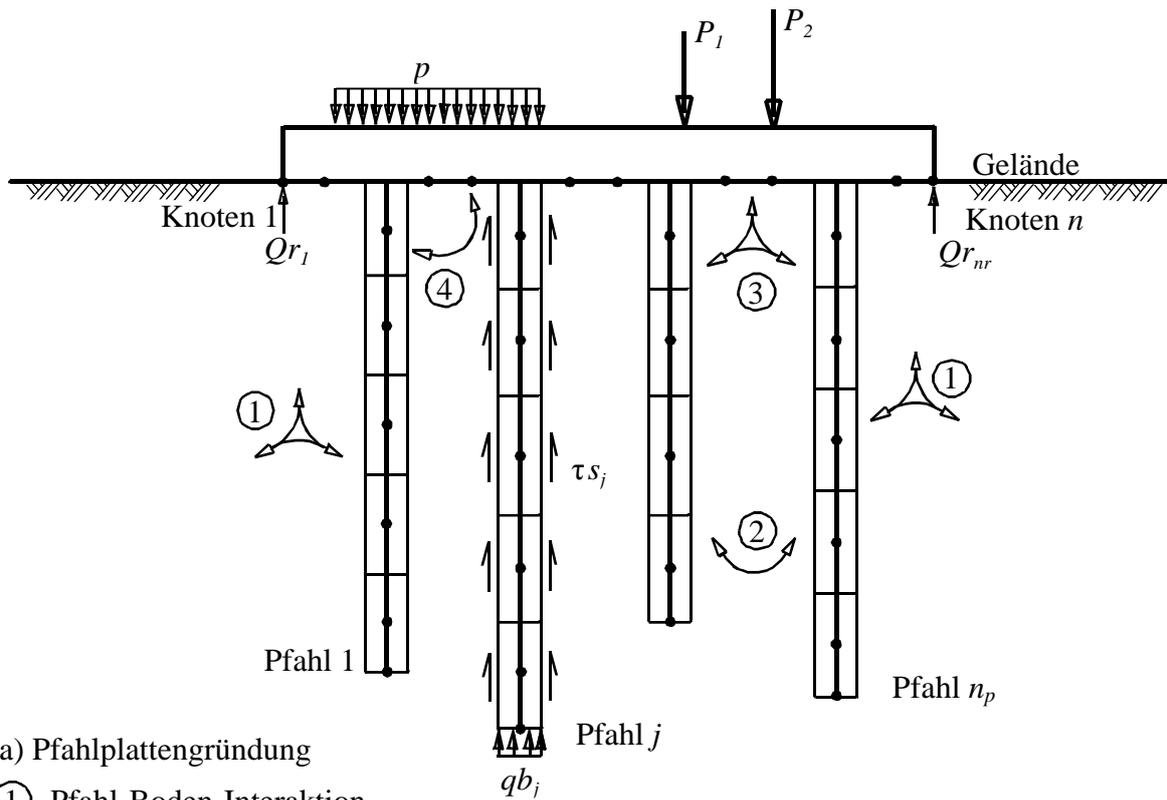


Bild 3-7 Last-Setzungs-Diagramm

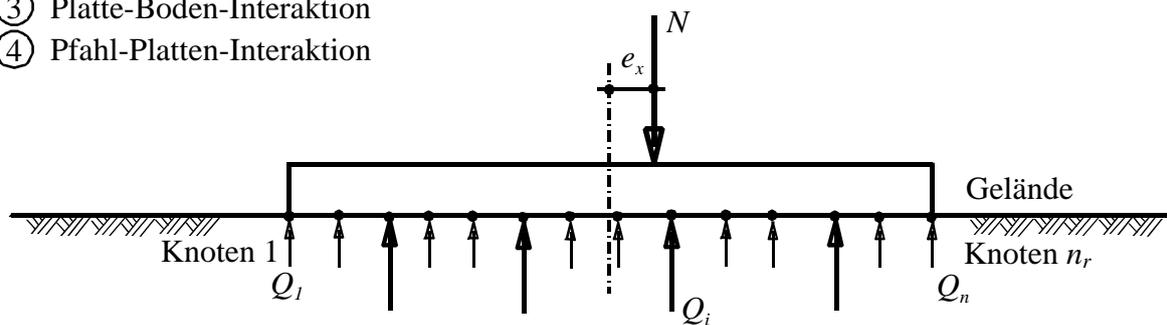
3.2.6 Berechnung einer starren Kombinierten Pfahl-Plattengründung

Bild 8 zeigt eine starre Kombinierten Pfahl-Plattengründung, wobei in diesem Fall die Setzung durch starre Körperverschiebung w_o am Plattenmittelpunkt und durch zwei Verdrehungen θ_x und θ_y um die x - und y -Achsen definiert wird.

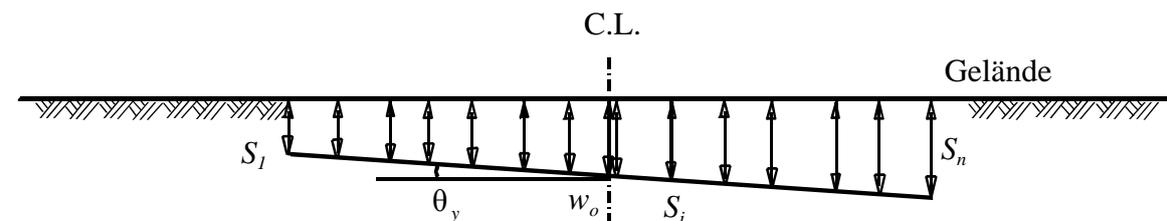


a) Pfahlplattengründung

- ① Pfahl-Boden-Interaktion
- ② Pfahl-Pfahl-Interaktion
- ③ Platte-Boden-Interaktion
- ④ Pfahl-Platten-Interaktion



b) Äquivalentes statisches System



c) Bodensetzung

Bild 3-8 Modellierung einer starren Kombinierten Pfahl-Plattengründung

3 Empirische mit Numerische Berechnung von Pfahlgruppen und KPP

Bei der starren Platte bestehen zwischen den Setzungen S_i der Knoten i mit den Koordinaten (x_i, y_i) vom Geometrie-flächenschwerpunkt folgende geometrische Beziehungen:

$$S_i = w_o + x_i \tan \theta_y + y_i \tan \theta_x \quad (3.55)$$

Gleichung (3.56) in Matrizenform für die gesamte Platte wird wie folgt geschrieben:

$$\{S\} = [X]^T \{\Delta\} \quad (3.56)$$

wobei:

$\{\Delta\}$ 3 Vektor der Verschiebung w_o des Plattenmittelpunkts und die Verdrehungen $\tan \theta_y$ und $\tan \theta_x$

$[X]^T$ 3*n Vektor der Koordinaten x und y

Nimmt man ferner an, dass die Resultierende N aller Sohlkräfte gemäß Bild 7 die Exzentrizitäten e_x, e_y hat, so ergeben sich folgende Gleichgewichtsbedingungen für die lotrechten Kräfte und Momente:

- Die Summe der lotrechten Kräfte Q muss null sein
- Die Summe der Momente um die x - oder y -Achse muss null sein

Nimmt man Q_i als ein Symbol, um entweder Pfahllast Q_p oder Sohlkraft Q_r im Netz darzustellen, ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} N &= Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n \\ N \cdot e_x &= Q_1 \cdot x_1 + Q_2 \cdot x_2 + Q_3 \cdot x_3 + \dots + Q_n \cdot x_n \\ N \cdot e_y &= Q_1 \cdot y_1 + Q_2 \cdot y_2 + Q_3 \cdot y_3 + \dots + Q_n \cdot y_n \end{aligned} \right\} \quad (3.57)$$

wobei:

N Resultierende der Lasten, die auf die Platte einwirken [kN]

$N e_x$ Momente infolge der Resultierenden um die x -Achse, $M_x = N e_x$ [kN.m]

$N e_y$ Momente infolge der Resultierenden um die y -Achse, $M_y = N e_y$ [kN.m]

e_x, e_y Exzentrizitäten der Resultierenden um die x - und y -Achse [m]

x_i, y_i Koordinaten der Last Q_i [m]

Gleichung (57) in Matrizenform für die gesamte Kombinierten Pfahl-Plattengründung wird wie folgt neu geschrieben:

$$\{N\} = [X]\{Q\} \quad (3.58)$$

Dabei ist $\{N\}$ der Vektor der resultierenden Kräfte und Momente auf der Platte.

Setzt man die Gln. (50) und (56) in Gl. (58) ein, so erhält man folgendes lineare Gleichungssystem:

$$\{N\} = [X][Ks][X]^T \{\Delta\} - [X]\{Pe\} \quad (3.59)$$

Durch Lösung dieser Gl. (59) ergeben sich w_o , $\tan \theta_x$ und $\tan \theta_y$. Mit diesen Werten ergibt sich aus den Gln. (56) und (60) folgende Gleichung zur Bestimmung der n unbekanntes Pfahllasten und Sohlkräfte.

$$\{Q\} = [Ks][X]^T \{\Delta\} - \{Pe\} \quad (3.60)$$

Setzt man auch die Werte w_o , $\tan \theta_x$ und $\tan \theta_y$ in Gl. (56) ein, so erhält man die n Setzungen.

3.2.7 Berechnung einer starren Pfahlgruppe oder schlaffen Platte auf starrer Pfahlgruppe

Die Berechnung von starren Pfahlgruppen von n_p Pfählen mit Verwendung der beschriebenen nichtlinearen Beziehung ist einfacher als die Berechnung einer starren Kombinierten Pfahl-Plattengründung. In diesem Fall werden die Sohlkräfte $\{Qr\}$ und die Setzungen $\{Wt\}$ auf den Plattenknoten aus oben genannten Gleichungen weggelassen. Dann wird der Vektor $\{Pr\}$ von Gl. (47) gegeben durch:

$$\{Pr\} = \{[Fb]\{Qb\} + [Is]\{Qs\}\} \quad (3.61)$$

und der Ausdruck $[C]\{Q\}$ in Gl. (48) wird gegeben durch:

$$[C]\{Q\} = [Cp]\{Qp\} \quad (3.62)$$

Im Falle einer schlaffen Platte, bei der die Pfahlgruppen mit den bekannten Lasten $\{Qp\}$ und $\{Qr\}$ beeinflusst werden, kann Gl. (45) direkt verwendet werden, um die Setzung jedes Pfahles in der Gruppe zu bestimmen.

3.2.8 Berechnung einer elastischen Kombinierten Pfahl-Plattengründung

Es ist möglich, die Gründungsplatte als eine elastische Platte auf starren Pfählen zu behandeln. Nach FE-Methode die Grundformulierung der Gleichgewichtsgleichung für die Platte kann in allgemeiner Form durch die folgende Gleichung beschrieben werden:

$$[Kg]\{\delta\} = \{P\} - \{Q\} \quad (3.63)$$

wobei:

$\{p\}$ $3 \cdot n_r$ Vektor der Kräfte enthält die Wirkung und Rückwirkung auf die Platte.

$[Kg]$ $3 \cdot n_r \cdot 3 \cdot n_r$ Steifigkeitsmatrix für die Platte.

$\{\delta\}$ $3 \cdot n_r$ Verformungsvektor der Platte.

Setzt man die Gl. (3.50) in Gl. (3.63) ein, ergibt sich:

$$[Kg]\{\delta\} = \{P\} - [Ks]\{S\} + \{Pe\} \quad (3.64)$$

Betrachtet man die Kompatibilität zwischen der Verschiebung der Pfahlplattengründung δ_i und der Setzung des Bodens s_i , erhält man das folgende lineare Gleichungssystem der Pfahlplattengründung mit einer elastische Platte:

$$[[Ks] + [Kg]]\{\delta\} = \{P\} + \{Pe\} \quad (3.65)$$

3.2.9 Iterationsverfahren

Ein Iterationsverfahren wird vorgeschlagen, um das System von linearen Gleichungen, Gl. (3.59), der Kombinierten Pfahl-Plattengründung zu lösen. Die Grundidee dieses Verfahrens ist, dass die Pfahlsteifigkeit aus der Last-Setzungs-Beziehung infolge der Eigensetzung bestimmt wird. Es ist einfacher, die Pfahlsteifigkeit zur Plattensteifigkeit zu addieren. Die Pfahlplatten werden für jeden Iterationsschritt berechnet, bis die Kompatibilität zwischen Setzungen der Platte, Pfähle und Boden erreicht ist. Der Iterationsprozess des Verfahrens kann nach den folgenden Schritten beschrieben werden:

- 1 Generierung der Flexibilitätsmatrizen infolge der Pfahl-Pfahl, Pfahl-Platten und Platte-Boden-Interaktionen, $[Fb]$, $[Is]$, $[Cb]$, $[Cs]$, $[Jr]$ und $[Cr]$.
- 2 Berechnung der Bodensteifigkeitsmatrix der Platte infolge der Platte-Boden-Interaktion, $[Kr] = [Cr]^{-1}$.
- 3 Mit Hilfe angewandter Last auf der Platte kann eine mittlere Spannung auf dem Plattenknoten und den Pfählen angenommen werden. Dann werden die Anfangslasten $\{Qp\}$ auf den Pfählen und der Anfangskräfte $\{Qr\}$ auf den Plattenknoten bestimmt.
- 4 Aus der Last-Setzungs-Linie nach DIN 4014 [6] werden die folgenden Werte berechnet:
 - Pfahlsteifigkeitsmatrix $[Kp]$
 - Spitzenkräfte auf den Pfählen $\{Qb\}$ infolge der Pfahllasten $\{Qp\}$ und
 - Mantelkräfte auf die Pfähle $\{Qs\}$ infolge der Pfahllasten $\{Qp\}$.
- 5 Generierung der Gesamtsteifigkeitsmatrix der Pfähle und Platte $[Ks]$ durch Addition der Pfahlsteifigkeit $[Kp]$, der im Schritt 4 wird berechnet, zur Plattensteifigkeit $[Kr]$.
- 6 Bestimmung des Vektors $\{Pr\}$ in Gl. (3.47) infolge der Sohlkräfte und der errechneten Spitzen- und Mantelkräfte auf den Pfählen im Schritt 4. Dann Bestimmung des Vektors $\{Pe\}$ aus Gl. (3.52).
- 7 Durchführung der Berechnung der Kombinierten Pfahl-Plattengründung, Gl. (3.59) für die starre Platte und Gl. (3.65) für die elastische Platte, um die Pfahlsetzungen $\{Sv\}$ und Sohlkräfte $\{Qr\}$ zu erhalten.

- 8 Vergleich zwischen der Setzung aus dem Schritt i und der aus Schritt $i+1$, um die Genauigkeit der Lösung zu finden.
- 9 Wenn die Genauigkeit im Schritt 8 nicht bis zu einer angegebenen Toleranz ε geht, wird eine neue Gruppe von Pfahllasten infolge der errechneten Setzungen $\{S_v\}$ aus der Last-Setzungslinie nach DIN 4014 [6] erhalten und wird zu Schritt 4 gehen.

Die Schritte 4 bis 9 sind so lange zu wiederholen, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist, was bedeutet, dass eine ausreichende Kompatibilität zwischen den Setzungen der Pfähle, Platte und Boden in der Pfahl-Platten-Boden-Schnittstelle erreicht ist. Bild 9 zeigt die Iterationsschritte zu diesen Verfahren.

3 Empirische mit Numerische Berechnung von Pfahlgruppen und KPP

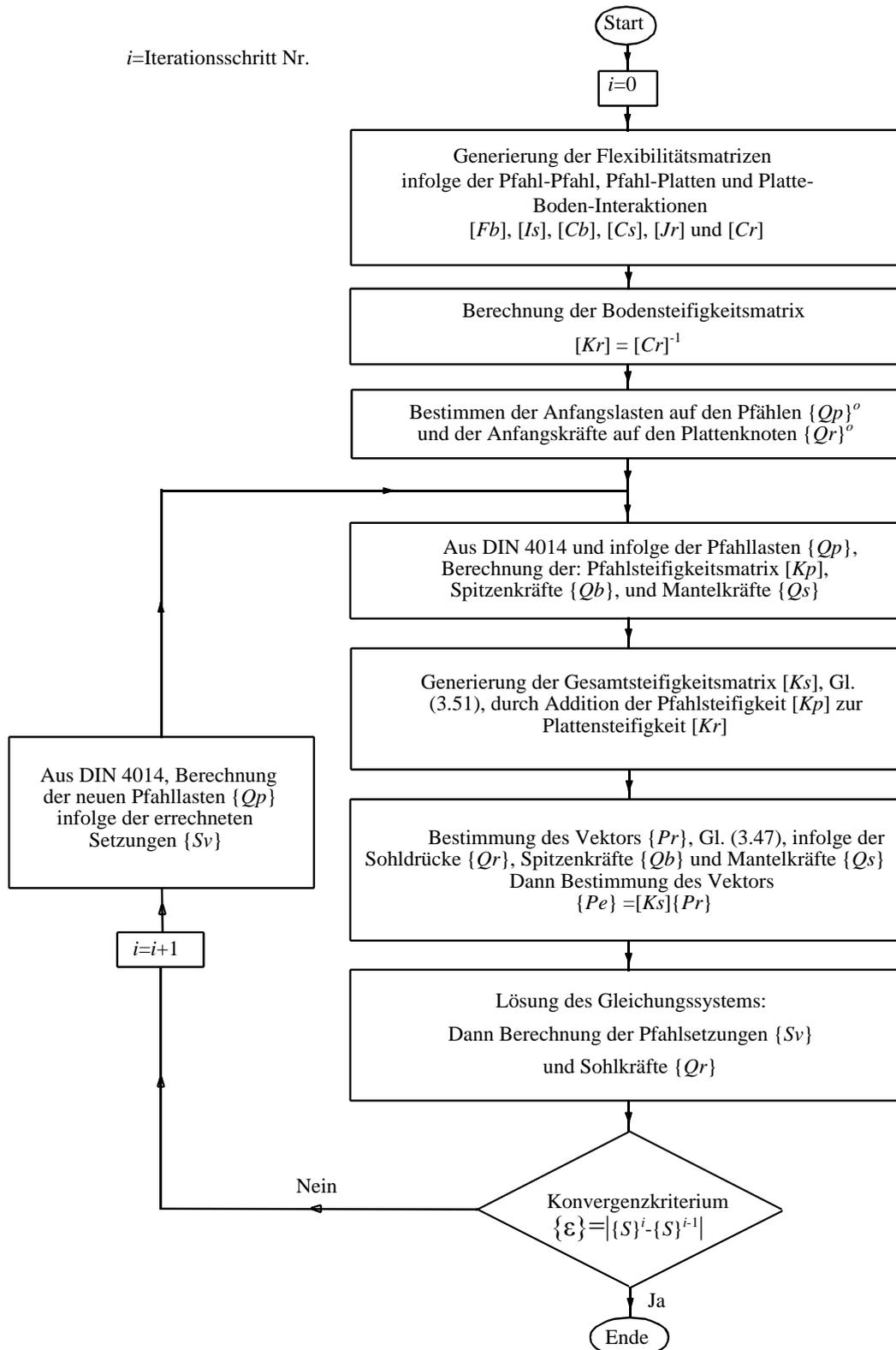


Bild 3-9 Ablaufdiagramm des Iterationsprozesses im Programm ELPLA

3.3 Untersuchungsfall: Kombinierte Pfahl-Plattengründung (KPP) des Messeturmes als höchstes Gebäude in Europa

3.3.1 Beschreiben des Problems

Der *Messturm* war bis 1997 das höchste Hochhaus in Europa, Bild 3-10. Das Gebäude steht in Frankfurt/ Main in Deutschland. Es ist 256 [m] hoch und steht auf einer Kombinierten Pfahl-Plattengründung.



Bild 3-10 *Messturm* nach [http://de.wikipedia.org/wiki/Messturm_\(Frankfurt\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Messturm_(Frankfurt))

Mit Benutzung der installierten Instrumente in diesem Fundament wurde ein umfangreiches Messprogramm etabliert, um das Verhalten des Gebäudes zu überwachen. Weil diese Instrumente die Setzungen der Platte, Sohldrücke auf der Platte und Lasten auf den Pfahlköpfen und entlang der Pfahlmäntel notieren, war das Gebäude eine gute Chance für viele Autoren, um ihre Berechnungsverfahren zu überprüfen. Seitdem der Messeturm gebaut wurde, hatten viele Autoren sein Verhalten untersucht. Einige von ihnen sind *Sommer (1989)*, *Sommer/ Katzenbach (1990)*, *Thaher (1991)*, *Sommer/ Tamaro/ DeBenedittis (1991)*, *EL-Mossallamy (1996)*, *Katzenbach/ Arslan/ Moormann (2000)*, *Reul/ Randolph (2003)* und *Chow/ Small (2005)*.

Bild 10 zeigt eine Abbildung des Messeturmes mit der Pfahlplatte nach *Chow/ Small (2005)*. Das Gebäude hat einen Keller mit zwei Untergeschossen und 60 Stockwerke mit einer geschätzten Gesamtlast von 1880 [MN]. Das Fundament ist eine quadratische Kombinierten Pfahl-Plattengründung (KPP) mit 58.8 [m] Kantenlänge, die auf Frankfurter Ton in einer Tiefe von 14 [m] unter Gelände gegründet ist. Die Plattendicke variiert von 6 [m] an der Mitte bis zu 3 [m] am Rand. Es sind insgesamt 64 Bohrpfähle mit gleichem Durchmesser von 1.3 [m] unter der Platte in 3 Ringen angeordnet. Die Pfahllängen variieren von 26.9 [m] bei den 28 Pfählen im äußeren Ring bis 30.9 [m] Länge bei den 20 Pfählen im mittleren Ring und bis 34.9 [m] Länge bei den 16 Pfählen im inneren Ring. Der Untergrund am Standort des Gebäudes besteht aus Kiesen und Sanden bis in 8 [m] unter Gelände. Darunter liegen Schichten des Frankfurter Tons, der sich über große Tiefe von mehr als 100 [m] unter Gelände erweitert. Die Grundwassertiefe liegt bei 4.75 [m] unter Gelände.

Der Bau des Messeturmes begann im Jahr 1988 und wurde fertig im Jahr 1991. Im März 1990 betrug die gemessene Setzung in der Mitte der Platte 8.5 [cm]. Entsprechend *Katzenbach/ Arslan/ Moormann (2000)* war die zuletzt notierte Setzung im Dezember 1998 14.4 [cm] entsprechend *Reul/ Randolph (2003)*. Der Messeturm steht nur auf einer Platte. Damit ist die erwartete Setzung zwischen 35 [cm] und 40 [cm], basierend auf einer geotechnischen Untersuchung nach *Sommer (1989)*. Deshalb wurde eine Kombinierten Pfahl-Plattengründung geplant, um die Setzung zu reduzieren. Damit war die erwartete Endsetzung in diesem Fall zwischen 15 [cm] und 20 [cm] entsprechend *Sommer/ Katzenbach (1990)*. Mit Verwendung der verfügbaren Daten und Ergebnissen des Messeturmes, die in Details in den vorliegenden Literatur diskutiert werden, wird die gegenwärtige Berechnung von Kombinierten Pfahl-Plattengründungen (KPP) untersucht und überprüft. Die starre Berechnung der Kombinierten Pfahl-Plattengründung (KPP) wird als eine einfache Methode betrachtet, um die Ergebnisse von anderen komplizierten Modellen zu überprüfen. Damit behandelt man die Kombinierten Pfahl-Plattengründung (KPP) in dieser Untersuchung als ein starres Fundament.

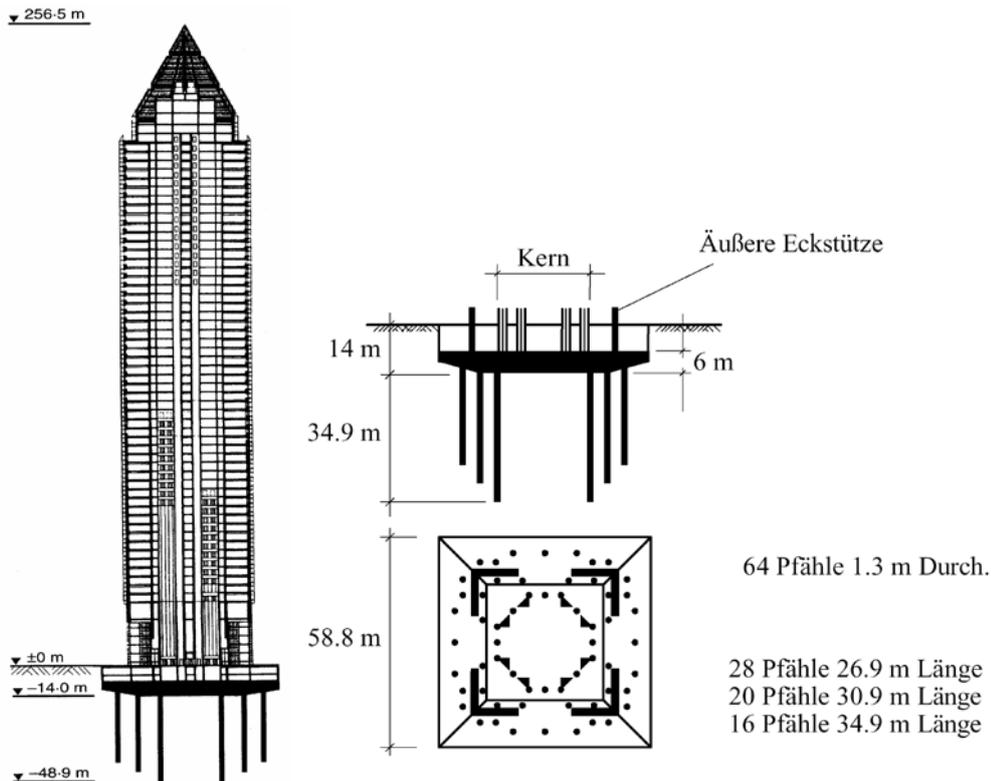


Bild 3-11 Abbildung des Messeturmes mit der Pfahlplatte nach *Chow/ Small* [4]

3.3.2 Berechnung der Pfahlplatte

Eine Reihe von Vergleichen wird durchgeführt, um die beiliegende nichtlineare Berechnung der Kombinierten Pfahl-Plattengründung (KPP) mit Hilfe der Last-Setzungs-Beziehung nach DIN 4014 [6] abzuschätzen. Dann werden die Ergebnisse der anderen analytischen Lösungen und Messungen verglichen mit denen der beiliegenden Berechnung. In den Vergleichen wird die gegenwärtige Berechnung als *NPRD* bezeichnet.

Wegen der Symmetrie um die x - und y -Achse in Form, Größe, Lasten und Baugrund genügt es, nur ein Viertel der Kombinierten Pfahl-Plattengründung (KPP) zu berechnen. Die Platte wird in Elemente unterteilt, wie im Bild 11 gezeigt. Elementgrößen in x - und y -Richtungen der viertel der Platte sind:

$$2 \cdot 2,2 + 2,69 + 2 \cdot 1,74 + 0,89 + 3 \cdot 2,35 + 2,06 + 2,65 + 1,76 + 2 \cdot 2,2 = 29,4 \text{ [m]}.$$

Ebenso werden die Pfähle in Elemente mit 2.0 [m] Maximallänge unterteilt.

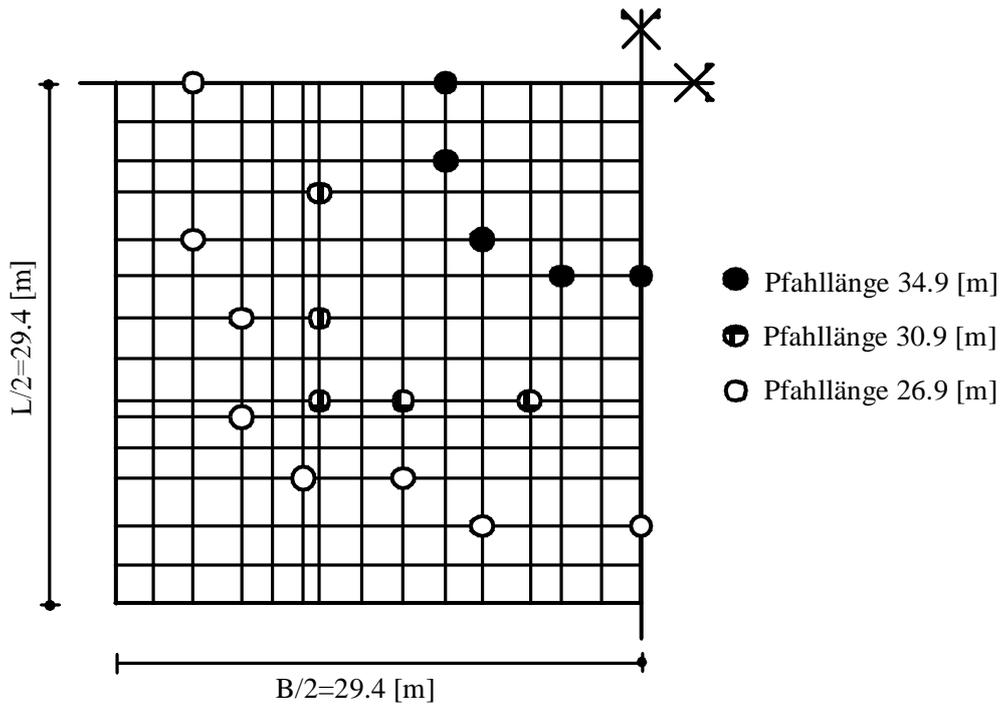


Bild 11: Netz der Pfahlplatte des Messturmes mit Pfählen (Max. Elementlänge = 2.0 [m])

a) Vergleich mit der *Randolphs*chen Berechnung

Um *NPRD* für die Kombinierten Pfahl-Plattengründung (KPP) des Messturmes zu überprüfen, werden die Ergebnisse mit den *Randolphs*chen Berechnungen verglichen, die von *EL-Mossallamy* (1996) durchgeführt wurden. Die Platte wird als starr angenommen, die auf starren Pfählen mit einer mittleren Länge von $30,15 \text{ [m]}$ steht. Eine Bodenschicht von $H=90 \text{ [m]}$ Mächtigkeit mit einer Konstante elastisches Modul ist berücksichtigt. Zwei Fälle der Berechnungen werden mit zwei verschiedenen Bodenparametern durchgeführt, wie in der Tabelle 1 gezeigt. Für *NPRD* wird die Last-Setzungs-Beziehung mit der Benutzung einer mittleren undrännierten Kohäsion von $c_u = 300 \text{ [kN/m}^2\text{]}$ in beiden Fällen berechnet. Der Grundwasserdruck auf der Platte infolge des Grundwassers wird mit $P_w=275 \text{ [kN/m}^2\text{]}$ angenommen. Damit wird die angewandte Gesamteffektivlast auf der Platte einschließlich Eigengewicht der Platte und Pfähle mit $N=1600 \text{ [MN]}$ festgelegt.

In Tabelle 2 sind die Ergebnisse der unmittelbaren Setzungen und Gesamtsetzungen für die *Randolphs*che Berechnung (1994) und *NPRD* zusammengefasst, während die Tabelle 3 die Ergebnisse der Tragwirkungskoeffizienten der Pfahl-Plattengründung für die beiden Berechnungen enthält. Obwohl die Prinzipien beider Berechnungen unterschiedlich sind, zeigen die Ergebnisse eine gute Übereinstimmung in der Setzung und ein Unterschied im Tragwirkungskoeffizient der Pfahl-Plattengründung liegt zwischen $3,4 \text{ [%]}$ und $7,7 \text{ [%]}$.

Tabelle 3-1 Verwendete Eigenschaften des Bodens in der *Randolphs*chen Berechnung und *NRRD*

Fall Nr.	undränierte Bedingungen		dränierte Bedingungen	
	E_s [MN/m ²]	ν_s [-]	E'_s [MN/m ²]	ν'_s [-]
Fall 1	70.4	0.5	62.4	0.33
Fall 2	91.4	0.5	81.0	0.33

Tabelle 3-2 Setzungen s [cm] (*Randolphs*che Berechnung gegen *NPRD*)

Fall Nr.	unmittelbare Setzung		gesamte Setzung	
	<i>Randolphs</i> che Berechnung	<i>NPRD</i>	<i>Randolphs</i> che Berechnung	<i>NPRD</i>
Fall 1	13.0	12.9	17.1	18.1
Fall 2	10.0	10.1	13.7	14.0

Tabelle 3-3 Tragwirkungskoeffizienten der Pfahl-Plattengründung α_{kpp} [%] (*Randolphs*che Berechnung gegen *NPRD*)

Fall Nr.	Unmittelbare Setzung		Gesamt Setzung	
	<i>Randolphs</i> che Berechnung	<i>NPRD</i>	<i>Randolphs</i> che Berechnung	<i>NPRD</i>
Fall 1	35.2	31.8	44	39
Fall 2	35.2	27.5	44	38

b) Vergleich mit der *Thahers*chen Berechnung

Um die Kombinierte Pfahl-Plattengründung (KPP) zu berechnen, hat *Thaher* (1991) ein analytisches Modell mit Hilfe eines äquivalenten Plattenverfahrens gezeigt, das von den Ergebnissen eines Zentrifugenmodells überprüft wurde. Er hat sein Modell zur Kombinierten Pfahl-Plattengründung (KPP) des Messeturmes angewendet, um die starre Setzung abzuschätzen.

3.3.3 Bodenkennwerte

Die verwendeten Eigenschaften des Tons bei der *Thahers*chen Berechnung können wie folgt beschrieben werden:

Steifemodul:

Auf Grundlage von früherer Berechnung *Amann et al.* (1975) wurde gezeigt, dass die Verteilung des Steifemoduls für Erstbelastung des Frankfurter Tons mit Tiefe durch die folgende empirische Formel definiert wird:

3 Empirische mit Numerische Berechnung von Pfahlgruppen und KPP

$$E_s = E_{so} (1 + 0.35 z) \quad (3.66)$$

während für die Wiederbelastung gilt:

$$W_s = 70 \text{ [MN/ m}^2\text{]} \quad (3.67)$$

wobei:

E_s Steifemodul für Erstbelastung [MN/m²]

E_{so} Anfangs Steifemodul, $E_{so}=7$ [MN/m²]

z Tiefe ab Oberkante Ton [m]

W_s Steifemodul für Wiederbelastung [MN/m²]

Undränierete Kohäsion:

Die undränierete Kohäsion c_u des Frankfurter Tons steigt mit Tiefe von $c_u=100$ [kN/m²] bis $c_u=400$ [kN/m²] in 70 [m] Tiefe ab Oberkante Ton nach *Sommer & Katzenbach* (1990). Um die *NPRD* durchzuführen, wird eine mittlere undränierete Kohäsion von $c_u=300$ [kN/m²] berücksichtigt.

Poissonzahl:

Die Poissonzahl des Frankfurter Tons wird mit $\nu_s=0.25$ [-] angesetzt.

Der Baugrund setzt sich entsprechend dem Bild 3-12 aus 10 Schichten zusammen, welches hauptsächlich aus den Frankfurter Ton besteht. Die gesamte Tiefe beträgt 102,83 [m] unter Gelände.

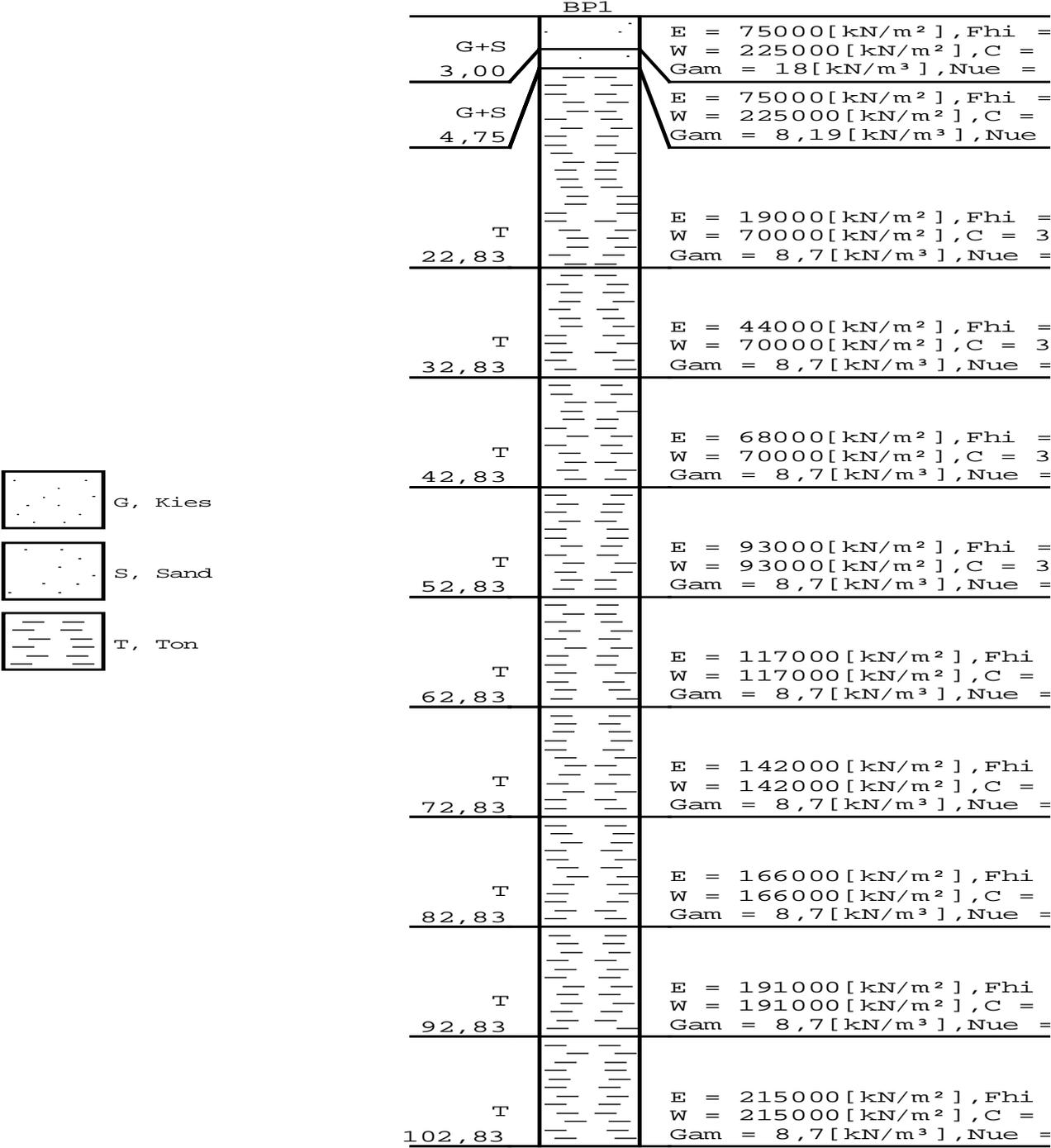


Bild 3-12 Darstellung des Bohrprofils

3 Empirische mit Numerische Berechnung von Pfahlgruppen und KPP

Tabelle 4 zeigt die Ergebnisse der Setzung, Tragwirkungskoeffizienten der Pfahl-Plattengründung und Spitzendruck, die bei *Thaher* (1991) und *NPRD* erhalten werden. Die Tabelle zeigt, dass die Setzung und Tragwirkungskoeffizienten der KPP für die beiden Berechnungen fast gleich sind. Es gibt nur eine Differenz von 0.6 [MN/m²] für den maximalen Spitzendruck.

In der Tabelle 5 werden die Lasten auf jedem Pfahl in den inneren, mittleren und äußeren Ringen gezeigt, die sowohl bei *NPRD* als auch bei dem Zentrifugenmodell von *Thaher* (1991) erhalten werden. Die Tabelle schließt auch die gemessenen Gesamtpfahllasten nach der Fertigstellung des strukturellen Rahmens ein, die nach *Sommer/ Tamaro/ De Benedittis* (1991) gezeigt werden. Die Tabelle zeigt, dass die Ergebnisse gut übereinstimmen.

Weiterhin zeigt Tabelle 5, dass die Pfähle die Lasten zum Boden hauptsächlich durch Mantelreibung übertragen, wie zu den Messungen (*Katzenbach/ Arslan/ Moormann* (2000)) bemerkt wird. Die Messungen zeigten an, dass die Lastverteilung innerhalb der Pfahlgruppe ziemlich homogen ist. Dieses Verhalten wird auch in *NPRD* nicht nur für die Pfahllast, sondern auch für die Pfahlsetzung bemerkt.

Wie in der Tabelle 6 gezeigt, kann *NPRD* die einzelne Setzung im Pfahl infolge der Pfahllast selbst oder infolge Pfahl-Pfahl und Pfahl-Platten-Interaktionen bestimmt werden. Tabelle 6 zeigt, dass die meisten Setzungen aufgrund der Eigensetzung des Pfahles verglichen mit der Setzung infolge Pfahl-Pfahl und Pfahl-Platten Interaktionen für Erstbelastung oder Wiederbelastung anders sind. Die Eigensetzung des Pfahles liegt zwischen 52 [%] und 55 [%] der Gesamtsetzung im Pfahl.

Tabelle 3-4 Vergleich zwischen den Ergebnissen der *Thaherschen* Berechnung und *NPRD*

Berechnung	Setzung s_r [cm]	Tragwirkungs- koeffizienten α_{kpp} [%]	Min. Spitzendruck [MN/m ²]	Max. Spitzendruck [MN/m ²]
<i>Thahersche</i> Berechnung	19.00	40.00	1	1.5
<i>NPRD</i>	18.77	40.44	1	2.1

Tabelle 3-5 Pfahllast für *NPRD*, Zentrifugen-Modell and gemessene Ergebnisse

Pfahlring	<i>NPRD</i>			Gesamt- pfahllast aus Zentrifugen- Modell [MN]	gemessene Gesamt- pfahllast [MN]
	Spitzenkraft [MN]	Mantelkraft [MN]	Gesamt- Pfahllast [MN]		
innerer Ring	2.71	8.55	11.26	14	11
mittlerer Ring	2.74	7.57	10.31	13	13
äußerer Ring	2.72	6.59	9.31	10	10

Tabelle 3-6 Setzung in den Pfählen

Pfährling	Eigensetzung s_p [cm]	Setzung infolge der Pfahl-Pfahl-Platten-Interaktionen		Gesamtsetzung s_r [cm]	Eigen/Gesamt s_p/s_r [%]
		Erstbelastung s_e [cm]	Wiederbelastung s_w [cm]		
innerer Ring	9.75	4.97	4.05	18.77	52
mittlerer Ring	10.29	4.78	3.70	18.77	55
äußerer Ring	9.86	5.10	3.81	18.77	53

Bemerkungen:

Die Maximaldifferenz zwischen der Setzung im Schritt i und der Setzung im nächsten Schritt $i+1$ wird als eine Genauigkeitszahl betrachtet. In dieser Falluntersuchung wurde die Genauigkeitszahl mit 0.0001 [cm] gewählt.

Für eine einzelne Durchführung der Berechnung wurden die Ergebnisse in relativ kurzer Zeit erhalten. Die Rechenzeit mit einem Pentium 4 PC mit 512 MB RAM zur Berechnung a war 17 Sekunden, während die Berechnung b 1.2 Minuten dauerte. Dies bezieht sich auf die folgenden Parameter:

- Flexibilitätskoeffizienten infolge der Pfahl-Pfahl-Interaktion werden nur für zwei Kräfte bestimmt: Mantel- und Spitzenkräfte
- Da die Setzung infolge der Last auf dem Pfahl selbst nach DIN 4014 [6] bestimmt wird, können die Flexibilitätskoeffizienten mit Hilfe geschlossener Formgleichungen ohne numerische Probleme berechnet werden statt Verwendung der Gleichungen, die bei numerischer Integration ausgewertet werden müssen
- Da die Flexibilitätsmatrix bei jedem Iterationsschritt erstellt wird, ist es nicht nötig, für den Boden eine globale Steifigkeitsmatrix zu bestimmen
- Statt die Flexibilitätskoeffizienten infolge der Pfahl-Pfahl-Interaktion aus Setzungsgleichungen zu bestimmen, werden die Koeffizienten aus der Last-Setzungs-Beziehung nach DIN 4014 [6] bestimmt

Diese Falluntersuchung zeigt, dass *NPRD* nicht nur ein akzeptables Verfahren ist, um die Kombinierten Pfahl-Plattengründung zu berechnen, sondern auch ein praktisches Verfahren für die Berechnung eines großen Kombinierten Pfahl-Plattengründungproblems. Daneben gibt *NPRD* eine gute Übereinstimmung mit vorherigen theoretischen und empirischen nichtlinearen Berechnungen

der Kombinierten Pfahl-Plattengründung und braucht weniger Rechenzeit, verglichen mit anderen komplizierten Modellen, die bei der dreidimensionalen finiten Element-Berechnung verwendet werden. Als weiteres vergleichendes Beispiel, um das zu beweisen, ergab eine Berechnung des Messeturmes mit Verwendung der dreidimensionalen finiten Element-Berechnung nach *Randolph* [14] und *Reul/ Randolph* [15] eine Setzung von 17.4 [cm] in der Mitte, während die Setzung mit *NPRD* 18.77 [cm] ergab.

3.4 Literatur

- [1] *Amann, P./ Breth, H./ Stroh, D.*: Verformungsverhalten des Baugrundes beim Baugrubenaushub und anschließendem Hochhausbau am Beispiel des Frankfurter Ton. Mitteilungen der Versuchsanstalt für Bodenmechanik und Grundbau der Technischen Hochschule Darmstadt, Heft 15 (1975)
- [2] *Boussinesq, J.* (1885): Applications des Potentiels a l'Etude de l'Equilibre et du Mouvement des Solides Elastiques
Gauthier Villars, Paris.
- [3] *Basile, F.*: Non-Linear analysis of pile groups
Proc. Instn Civ. Engrs Geotech. Engng, 137, (1999) 105-115
- [4] *Basile, F.*: Analysis and design of pile groups
Numerical Analysis and Modelling in Geomechanics,
Spon press (eds J. W. Bull), London, Chapter 10 (2003), pp 278-315
- [5] *Chow, H./ Small J.*: Behaviour of Piled Rafts with Piles of Different Lengths and Diameters under Vertical Loading
GSP 132 Advanced in Deep Foundations, ASCE (2005)
- [6] DIN 4014: Bohrpfähle Herstellung, Bemessung und Tragverhalten
Ausgabe März 1990
- [7] *Duncan, J./ Chang, C.*: Non-linear analysis of stress and strain in soils
Journal of Soil Mechanics and Foundation Engineering Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, 96, No. SM5 (1970), pp. 1121-1124
- [8] ECP 197: Egyptian Code for Soil Mechanics-Design and Construction of Foundations
Part 4, Deep Foundations (in Arabic) (1995)
- [9] *El Gendy, M./ Hanisch, J./ Kany, M.* (2006): Empirische nichtlineare Berechnung von Kombinierten Pfahl-Plattengründungen.
Bautechnik 9/06
- [10] *Kany, M./ El Gendy, M./ El Gendy, A.*: Benutzerhandbuch für das Programm ELPLA (einige Bunden in das Programmsystem GEOTEC), Zirndorf (2006)
- [11] *Katzenbach, R./ Arslan, U./ Moormann, C.*: Piled raft foundation projects in Germany
Chapter 13 in: Design application of raft foundations, Edited by Hemsley, Thomas Telford (2000)
- [12] *Mandolini, A./ Viggiani, C.*: Settlement of piled foundations
Géotechnique, 47, No. 4 (1997), 791-816
- [13] *Mindlin, R.*: Force at a point in the interior of a semi-infinite-solid
Physics 7 (1936), S. 195-202
- [14] *EL-Mossallamy, Y.*: Ein Berechnungsmodell zum Tragverhalten der Kombinierten Pfahl-Plattengründung
Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt, Darmstadt, D17, (1996)
- [15] *Poulos, H./ Davis, E.*: Pile Foundation Analysis and Design
John Wiley & Sons, Inc., (1980)
- [16] *Randolph, M.F.*: Design methods for pile groups and pile rafts
XXX ICSMFE (1994), New Dehli, India, Rotterdam Balkema Vol. 4, S. 61-82
- [17] *Reul, O./ Randolph, M.*: Piled rafts in overconsolidated clay: comparison of in situ measurements and numerical analyses
Géotechnique 53, No. 3 (2003), 301-315

- [18] *Russo, G.*: Numerical analysis of piled raft
Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 22 (1998), 477-493
- [19] *Sommer, H.*: Entwicklung der Hochhausgründungen in Frankfurt/ Main
Festkolloquium 1989, 20 Jahre Grundbauinstitut, Darmstadt (1989)
- [20] *Sommer, H./ Katzenbach, R.*: Last-Verformungsverhalten des Messeturmes Frankfurt/ Main
Vorträge der Baugrundtagung 1990 in Karlsruhe (1990), Seite 371-380
- [21] *Sommer, H./ Tamaro, G./ DeBenedittis, C.*: Messe Turm, foundation for the tallest building in Europe 4th International Conference on Piling and Deep Foundations, Italy (1991), 139-145
- [22] *Thaher, M.*: Tragverhalten von Pfahl-Platten-Gründungen im bindigen Baugrund, Berechnungsmodelle und Zentrifugen-Modellversuche
Dissertation, Institut für Grundbau der Ruhr-Universität, Bochum, Heft 15 (1991)
- [23] *Viggiani, C.*: Pile groups and pile raft behaviour
Proc. of the 3rd int. Geot. Sem. on Deep Foundations on Bored and Auger Piles
Ghent, Belgien 19.-21- Oct. 1998. Balkema Rotterdam, S. 77-91
- [24] *Witzel, M./ Kempfert, H. G.*: A simple approach to predict the load settlement behavior of precast driven piles with due consideration of the driving process
GSP 132 Advanced in Deep Foundations, Proceeding of Sessions of the Geo-Frontiers 2005 Congress, Austin, Texas, ASCE (2005)
- [25] Richtlinie für den Entwurf, die Bemessung und den Bau von Kombinierten Pfahl-Plattengründungen (KPP) - (KPP-Richtlinie); Hrg. Arbeitskreis "Pfähle" der Deutschen Gesellschaft für Geotechnik e.V. (DGGT), Juli 2001.
Enthalten in: Kombinierte Pfahl-Plattengründungen; Hrg. Hanisch, J, Katzenbach, R., König, G.; Ernst & Sohn (2002).