Computerberechnung und Entwurf von Fundamenten

Berechnung
der Sohlspannungen, Setzungen, Biegemomente,
Querkräfte und Bemessung von Fundamentplatten
mit der Methode der Finiten Elemente

Windows XP/Vista/7/8 - Version 9.3

Teil I	Grundlagen der Theorie zum Programm *ELPLA*
Teil II	Beispiele zur Überprüfung und Erläuterung des Programms *ELPLA*
Teil III	Entwurf von Stahlbeton

Programmautoren: M. El Gendy
A. El Gendy

GEOTEC: GEOTEC Software Inc.
PO Box 14001 Richmond Road PO
Calgary AB, Canada T3E 7Y7

http://www.elpla.com
geotec@elpla.com

Computerberechnung von Fundamenten

Theorie zur Berechnung von Flächengründungen mit *ELPLA*

von
M. El Gendy

2010

Prof. Dr.-Ing. *Mohamed El Gendy*, Port Said, Ägypten

Vorwort

Heute hat fast jedes Ingenieurbüro seine eigenen Computerprogramme zur Berechnung und zum Entwurf von Fundamentplatten. Dazu sind die meisten verfügbaren Programme unter Windows benutzerfreundlich und bieten ausgezeichnete graphische Farbdarstellungen, sodass theoretisch eine Sekretärin, nicht nur ein Ingenieur, diese verwenden kann. Aber das Problem dabei ist, wie man die Daten kontrollieren und die Ergebnisse überprüfen kann.

Der Zweck dieses Buches ist, Methoden, Gleichungen, Verfahren und Techniken zu zeigen, die bei der Formulierung der Computerberechnung von Fundamenten verwendet werden. Diese Sachgebiete sind im Programm *ELPLA* codiert.

Dieses Buch zeigt viele praktische Probleme, die mit Verwendung des Programms *ELPLA* berechnet werden können. Es ist wichtig, dass der Ingenieur mit diesen Informationen vertraut ist, wenn er Computerberechnungen von Fundamenten durchführt. Ein Verständnis dieser Konzepte ist von großem Nutzen beim Ausführen der Computerberechnung, zur Lösung von Schwierigkeiten und zur Entscheidung der Annehmbarkeit der Ergebnisse. Drei bekannte Baugrundmodelle zur Berechnung von Fundamenten (Standardmodelle) werden berücksichtigt. Die Baugrundmodelle sind Einfache Annahme (Spannungstrapezverfahren), *Winkler*-Modell (Bettungsmodulverfahren) und Kontinuum-Modell (Steifemodulverfahren). In der Berechnung werden die Fundamente als schlaff, elastisch oder starr behandelt. In diesem Buch wird die FE-Methode verwendet, um Fundamentplatten und Trägerrostfundamente (oder gerippte Platten) zu berechnen. In der FE-Berechnung wird die Platte von Plattenelementen entsprechend der zweidimensionalen Natur des Fundaments dargestellt. Stabelemente werden gewählt, um die Gegenwart von Rippen darzustellen. Die Entwicklung der finiten Elementgleichungen für Plattenelemente und Stabelemente ist in Standardlehrbüchern dokumentiert. Sie wird deshalb nicht in diesem Buch dupliziert.

August 2007

M. El Gendy
Port Said, Ägypten

Preface

Today, nearly every engineering office has its own computer programs for the analysis and design of foundations. Furthermore, most of the available programs under Windows are user-friendly and give very excellent output graphics with colours. Consequently, theoretically a secretary not an engineer can use them. But the problem here is how to control the data and check the results. The purpose of this book is to present the methods, equations, procedures and techniques used in the formulation of the computer analysis of the foundations. These items are coded in the program *ELPLA*. The book contains many practical problems which are analyzed in details by using the program *ELPLA*. It is important for the engineer to be familiar with this information when carrying out computer analysis of foundations. An understanding of these concepts will be of great benefit in carrying out the computer analysis, resolving difficulties and judging the acceptability of the results. Three familiar types of subsoil models (standard models) for foundation analyses are considered. The models are Simple Assumption Model, *Winkler´*s Model and Continuum Model. In the analysis, foundations are treated as flexible, elastic or rigid. In this book the Finite Element-Method was used to analyze both of the raft and grid foundation (or the ribbed raft). In which plate bending elements represent the raft according to the two-dimensional nature of foundation, while grid elements represent the grid. The development of the finite element equations for plate elements and grid elements is well documented in standard textbooks and consequently it is not duplicated in this book.

August 2007

M. El Gendy
Port Said, Egypt

0	**Vorwort**	0- 1
1	**Berechnungsmodelle**	
1.1	Einleitung	1- 2
1.2	Beschreibung der numerischen Berechnungsverfahren	1- 4
1.2.1	Einfache Annahme für den Sohldruck (Verfahren 1)	1- 8
1.2.2	Bettungsmodulverfahren (Verfahren 2 und 3)	1-10
1.2.3	Bettungsmodulverfahren mit von Knoten zu Knoten unterschiedlichen Bettungsmoduli mit iterativer Verbesserung (Verfahren 4)	1-14
1.2.4	Halbraumverfahren für die elastische Platte auf dem istotropen Halbraum (Verfahren 5)	1-17
1.2.5	Steifemodulverfahren für die elastische Platte auf dem beliebig geschichteten Baugrund (Verfahren 6)	1-25
1.2.6	Steifemodulverfahren für die elastische Platte auf dem beliebig geschichteten Baugrund (Verfahren 7)	1-33
1.2.7	Steifemodulverfahren für die starre Platte auf dem beliebig geschichteten Baugrund (Verfahren 8)	1-45
1.2.8	Steifemodulverfahren für die schlaffe Sohlfläche für den beliebig geschichteten Baugrund (Verfahren 9)	1-52
1.3	Vorbereitende Berechnungen	1-54
1.3.1	Bestimmung der Vorbelastung q_v	1-54
1.3.2	Bestimmung des wirksamen mittleren Sohldrucks q_0	1-54
1.3.3	Bestimmung des Fundamentgewichts P_E	1-55
1.3.4	Bilineares Verformungsverhalten des Baugrunds	1-56
1.3.5	Bestimmung der Grenztiefe z_g des Setzungseinflusses	1-58
1.4	Einflüsse auf die Ergebnisse	1-60
1.4.1	Einfluss von Temperaturänderung	1-60
1.4.2	Berücksichtigung von Sohlwasserdruck	1-62
1.4.3	Unterschiedliche Gründungstiefe	1-63
1.4.4	Berechnung der gerippten Platte	1-65
1.5	Nutzung der Symmetrie und Antimetrie	1-67
1.5.1	Nutzung der Symmetrie	1-67
1.5.2	Nutzung der Antimetrie	1-73
1.5.3	Randbedingungen bei Symmetrie und Antimetrie	1-74

2 Berechnung von Fundamenten auf unregelmäßigem Baugrund
2.1 Vorbemerkungen 2- 2
2.2 Aufteilung der Bohrergebnisse in Teilflächen 2- 2
2.3 Interpolationsmethode 2- 3
2.3.1 Bestimmung der variablen Bettungsmoduli k_s 2- 4
2.3.2 Bestimmung des dreidimensionalen Flexibilitätskoeffizienten 2- 6
2.3.3 Nummerierung der Bohrprofile 2- 8

Beispiel 2.1 Berechnung einer quadratischen Platte auf unregelmäßigem Baugrund 2-12
Beispiel 2.2 Berechnung einer unregelmäßigen Platte auf unregelmäßigem Baugrund 2-20
Beispiel 2.3 Berechnung von Fundamentgruppen auf unregelmäßigem Baugrund 2-29

3 Einfluss von Nachbarbauwerken und Bodensenkungen
3.1 Vorbemerkungen 3- 2
3.2 Einfluss von Nachbarbauwerken 3- 2
3.3 Einfluss von Bodensenkungen 3- 5

Beispiel 3.1 Setzungen außerhalb der Kontaktflächen 3- 6
Beispiel 3.2 Einfluss eines Nachbarbauwerks II auf ein bestehendes Fundament I 3-11
Beispiel 3.3 Interaktion durch Senkung der Sohlfläche eines Gebäudes bei Untertunnelung 3-17

4 Berechnung von Systemen mehrerer Gründungsplatten
4.1 Einleitung 4- 2
4.2 Festlegung des Fundamentsystems 4- 2
4.3 Summengleichungen der Setzungen 4- 3
4.4 Bestimmung der Flexibilitätskoeffizienten 4- 4
4.5 Berechnung von Systemen mehrerer elastischer Platten 4- 5
4.5.1 Aufstellung des Gleichungssystems 4- 5
4.6 Berechnung von Systemen mehrerer starrer Platten 4- 6
4.6.1 Aufstellung des Gleichungssystems 4- 6
4.7 Iterationsverfahren 4-10

Beispiel 4.1 Berechnung eines Systems von zwei benachbarten gleich großen Kreisplatten 4-12
Beispiel 4.2 Setzungsverhalten von Faulbehältern (Kreisplatten) einer Kläranlage 4-16
Beispiel 4.3 Berechnung von zwei benachbarten Fundamentplatten unter Berücksichtigung von zwei Schornsteinfundamenten 4-19
Beispiel 4.4 Wechselwirkung zweier nebeneinander liegender quadratischer Platten 4-27
Beispiel 4.5 Erhöhung eines Schwimmbeckens 4-40

5 Berechnung der Fundamentsteifigkeit
5.1 Einleitung 5- 2
5.2 Bestimmung der Fundamentsteifigkeit 5- 4
5.2.1 Schlaffe Lösung 5- 4
5.2.2 Starre Lösung 5- 5
5.2.3 Elastische Lösung 5- 5
5.2.4 Parameter k_r 5- 6

Beispiel 5.1 Steifigkeit einer einfachen Rechteckplatte 5- 7
Beispiel 5.2 Steifigkeit einer unregelmäßigen Platte auf unregelmäßigem Baugrund 5-12

6 Einfluss der Überbausteifigkeit auf das Fundament
6.1 Einleitung 6- 2
6.2 Vereinfachte Berücksichtigung der Steifigkeit des Bauwerks 6- 3
6.2.1 Bauwerkssteifigkeit 6- 3
6.2.2 Steifigkeit des Untergrunds 6- 7
6.2.3 Systemsteifigkeit 6- 7
6.2.4 Modellierung von Wand-Decke-Überbau in der Plattenberechnung 6- 9
6.2.5 Bestimmung der Ersatzwandhöhe 6-10
6.3 Direkte Modellierung der Bauwerk/ Baugrund-Wechselwirkung 6-11
6.4 Modellierung der Bauwerk/ Baugrund-Wechselwirkung durch Iteration 6-12
6.4.1 Iterationsverfahren 6-13
6.4.2 Nichtlineares mathematisches Baugrundmodell 6-17

Beispiel 6.1 Berechnung der Gründungsplatte eines Hochhauses 6-19
Beispiel 6.2 Überprüfung des Iterationsverfahrens 6-28
Beispiel 6.3 Berechnung eines Bauwerks auf nichtlinearem Baugrund 6-33

7 Nichtlineare Berechnung von Fundamenten
7.1 Nichtlineare Berechnung von Fundamenten für ein Modell mit einfacher Annahme 7- 2
7.1.1 Einleitung 7- 2
7.1.2 Beschreibung des Verfahrens 7- 3
7.2 Nichtlineare Berechnung von Fundamenten mit Bettungsmodulverfahren und Steifemodulverfahren 7- 6
7.2.1 Einleitung 7- 6
7.2.2 Beschreibung des Verfahrens 7- 6

Beispiel 7.1 Überprüfung der nichtlinearen Berechnung für das Bettungsmodulverfahren 7-11
Beispiel 7.2 Nichtlineare Berechnung von ausmittig belasteten Rechteckfundamenten 7-14
Beispiel 7.3 Nichtlineare Berechnung beim ausmittig belasteten Kreisfundament 7-18
Beispiel 7.4 Elastoplastische Berechnung einer Platte nach dem Steifemodulverfahren 7-22

8 Baugrundeigenschaften

8.1	Allgemeines	
8.2	*Poisson*zahl ν_s	8- 2
8.3	Steifemoduli E_s und W_s und Raumgewichte γ_s	8- 2
8.4	Elastizitätsmoduli E und W	8- 3
8.5	Kompressionsbeiwert C_c und Anfangsporenzahl e_o	8- 6
8.6	Scherparameter φ und c	8- 7
8.7	Bettungsmodul k_s	8- 9
8.8	Zulässige Bodenpressung q_{all}	8-12
8.9	Abminderungsbeiwerte α	8-16
		8-17
9	**Liste der Beispiele**	
9.1	Vorbemerkungen	
9.2	Beispiele zum Abschnitt 2	9- 2
9.3	Beispiele zum Abschnitt 3	9- 3
9.4	Beispiele zum Abschnitt 4	9- 6
9.5	Beispiele zum Abschnitt 5	9- 9
9.6	Beispiele zum Abschnitt 6	9-13
9.7	Beispiele zum Abschnitt 7	9-14
		9-15
10	**Literatur**	
		10-2

Abschnitt 1

Berechnungsmodelle

Inhalt

1.1	Einleitung	1- 2
1.2	Beschreibung der numerischen Berechnungsverfahren	1- 4
1.2.1	Einfache Annahme für den Sohldruck (Verfahren 1)	1- 8
1.2.2	Bettungsmodulverfahren (Verfahren 2 und 3)	1-10
1.2.3	Bettungsmodulverfahren mit von Knoten zu Knoten unterschiedlichen Bettungsmoduli mit iterativer Verbesserung (Verfahren 4)	1-14
1.2.4	Halbraumverfahren für die elastische Platte auf dem istotropen Halbraum (Verfahren 5)	1-17
1.2.5	Steifemodulverfahren für die elastische Platte auf dem beliebig geschichteten Baugrund (Verfahren 6)	1-25
1.2.6	Steifemodulverfahren für die elastische Platte auf dem beliebig geschichteten Baugrund (Verfahren 7)	1-33
1.2.7	Steifemodulverfahren für die starre Platte auf dem beliebig geschichteten Baugrund (Verfahren 8)	1-45
1.2.8	Steifemodulverfahren für die schlaffe Sohlfläche für den beliebig geschichteten Baugrund (Verfahren 9)	1-52
1.3	Vorbereitende Berechnungen	1-54
1.3.1	Bestimmung der Vorbelastung q_v	1-54
1.3.2	Bestimmung des wirksamen mittleren Sohldrucks q_0	1-54
1.3.3	Bestimmung des Fundamentgewichts P_E	1-55
1.3.4	Bilineares Verformungsverhalten des Baugrunds	1-56
1.3.5	Bestimmung der Grenztiefe z_g des Setzungseinflusses	1-58
1.4	Einflüsse auf die Ergebnisse	1-60
1.4.1	Einfluss von Temperaturänderung	1-60
1.4.2	Berücksichtigung von Sohlwasserdruck	1-62
1.4.3	Unterschiedliche Gründungstiefe	1-63
1.4.4	Berechnung der gerippten Platte	1-65
1.5	Nutzung der Symmetrie und Antimetrie	1-67
1.5.1	Nutzung der Symmetrie	1-67
1.5.2	Nutzung der Antimetrie	1-73
1.5.3	Randbedingungen bei Symmetrie und Antimetrie	1-74

1 Berechnungsmodelle

1.1 Einleitung

Die in diesem Abschnitt genannten und beschriebenen, in der grundbaulichen Berechnungspraxis gebräuchlichen Verfahren zur elektronischen Berechnung werden in der Reihenfolge der geschichtlichen Entwicklung erläutert.

Flächengründungen sind Fundamente von Bauwerken, die statisch durchgehend zwischen den Stützen verlaufen, sodass sie oft erhebliche Biegemomente und Querkräfte aufnehmen müssen. Sie kommen in der Baupraxis häufig vor bei nachgiebigem und ungleichem Baugrund oder großen Auflasten, aber auch zur Verhinderung des Eindringens von Grundwasser in die Kellerräume von Gebäuden. Obwohl jedes Bauwerk auf dem Boden steht, bleibt bei vielen praktischen Berechnungen der Einfluss der Verformungen des Baugrunds unter dem Fundament oder der Nachbarfundamente unberücksichtigt.

In Zeiten, als es noch keine Computer gab, wurden vorwiegend Verfahren benutzt, mit denen man bei möglichst geringem Rechenaufwand eine noch vertretbare Wirklichkeitstreue in den Ergebnissen erhielt. In einigen Veröffentlichungen z.B. von *Ohde* (1942) wurden aufwändige und verfeinerte Berechnungsverfahren vorgeschlagen. Sie wurden aber wegen des hohen Rechenaufwands nur in wenigen Fällen in der Praxis verwendet.

Eine Umwälzung der Berechnungspraxis bewirkten die Computer, deren Programmier- und Speichermöglichkeiten immer weiter entwickelt werden. Jetzt kann sich der Programmier- und Rechenaufwand erheblich ausweiten, um eine möglichst vollkommene Wirklichkeitstreue der Ergebnisse zu erreichen. Dieses Vorgehen erscheint besonders bei modernen, meist formänderungsempfindlichen Großbauten angezeigt.

Bei der Berechnung der Sohldrücke, Schnittkräfte und Verformungen von Gründungskörpern ist zu unterscheiden zwischen den Berechnungsmethoden für Gründungsbalken und denen für Gründungsplatten. Während bei Gründungsbalken in der Querrichtung einfache Annahmen (z. B. gleichförmige Verteilung des Sohldrucks) getroffen werden, werden bei Gründungsplatten die Sohldrücke in beiden Achsenrichtungen untersucht.

Gründungsbalken werden meist mit den klassischen Verfahren berechnet. Hierzu zählen die Bettungsmodulverfahren von *Winkler* (1867), *Graßhoff* (1978) und *Wölfer* (1978) und die Steifemodulverfahren von *Ohde* (1942), *Graßhoff* (1978) und *Kany* (1974). Es sind jedoch auch Fälle denkbar, bei denen kleinere und untergeordnete Gründungskonstruktionen noch mit weniger aufwändigen Verfahren unter Verwendung von Tabellen und Kurventafeln berechnet werden können.

Zur Berechnung der Schnittkräfte und Verformungen von Gründungsplatten wird das Differenzverfahren von *Deninger* (1964) oder die FE-Methode verwendet. Die früheste Anwendung der FE-Methode zur Untersuchung der Boden-Bauwerk Interaktion stammt von *Cheung*/ *Zienkiewicz* (1965), die bei Verwendung des *Winkler*-Modells für den Gründungskörper eine diskrete federnde Lagerung annimmt, und des Kontinuum-Modells für die Berechnung von Platten auf elastischer Bettung mittels der FE-Methode.

Die Baugrundmodelle zur Berechnung von Gründungsplatten (Standardmodelle) lassen sich in drei

Gruppen einteilen:

A Einfache Annahme (Spannungstrapezverfahren)
B *Winkler*-Modell (Bettungsmodulverfahren)
C Kontinuum-Modell (Steifemodulverfahren)

Beim Modell A wird keine Interaktion zwischen der Platte und dem Boden berücksichtigt. Das Modell nimmt eine lineare Sohldruckverteilung unter der Platte an. Das *Winkler*-Modell ist das einfachste und älteste, das die Interaktion zwischen der Platte und dem Boden berücksichtigt. Das Modell stellt den Boden als elastische Federn dar. Das Kontinuum-Modell ist kompliziert. Es berücksichtigt auch die Wechselwirkung zwischen der Platte und dem Boden. Es stellt den Boden als ein geschichtetes Kontinuum oder isotropes elastisches Halbraummedium dar.

Obwohl das Kontinuum-Modell eine sehr gute Methode zur Erfassung der Baugrundverhältnisse bereitstellt, konnte es früher aufgrund seiner mathematischen Schwierigkeiten nur selten genutzt werden. Die sinnvolle Anwendung des Verfahrens für allgemeine Baugrund- und Bauwerksverhältnisse verursacht einen relativ großen Rechenaufwand. Deshalb ist die praktische Verwendung ohne Computer nur möglich, wenn entsprechend aufbereitete Tafel- oder Tabellenwerke zur Verfügung stehen. Zu diesem Zweck sind solche Hilfsmittel von *El Kadi* (1968), *Kany* (1974), *Sherif/ König* (1975) und *Graßhoff* (1978) in Form von Diagrammen und Tabellen zur Berechnung von Sohldruckverteilung, Biegemomenten, Querkräften und Setzungen vorgestellt worden. Diese Tabellen sind aber auf ebene Probleme begrenzt.

Um unabhängig von Tabellen praxisnahe Eingangswerte über den Baugrund und das Bauwerk berücksichtigen zu können, wurde zunächst eine allgemeine, für Computer geeignete mathematische Lösung entwickelt, die auf einem FE-Modell für die Sohlplatte basiert. Damit können Gründungsplatten mit den der Wirklichkeit am nächsten kommenden Baugrundmodellen dargestellt werden. Es können Platten mit beliebiger Grundriss-Form gerechnet werden. Auch können Löcher in der Platte und die Interaktion von Nachbarplatten berücksichtigt werden. Mit dem für diese Zwecke für die Praxis entwickelten Computerprogramm *ELPLA* kann man mit den weitgehend gleichen Ausgangsdaten verschiedene Typen von Baugrundmodellen anwenden. Es ist auch möglich, beim dreidimensionalen Kontinuum-Modell unregelmäßige Schichtenverläufe zu berücksichtigen. Darüber hinaus kann mit dem Programm *ELPLA* der Einfluss der Struktursteifigkeit (feldweise veränderliche Dicke der Sohlplatte) auf das System Baugrund/ Bauwerk und der Einfluss von Temperaturänderung auf die Platte dargestellt werden.

Es können auch nach dem Bettungs- und Steifemodulverfahren Bauwerke berechnet werden, die auf ungleichmäßig geschichtetem Baugrund aufliegen und von Element zu Element unterschiedliche Gründungstiefe und Plattendicke haben können. Mit dem Programm lassen sich auch verschiedene Nebeneinflüsse wie Grundwasserdruck und Außensetzung berechnen. Auch ist es möglich, mehrere Lastfälle zu überlagern und bei nicht ständigen Lasten Maxima und Minima zu erfassen.

Im vorliegenden Buch werden die drei Standardmodelle mit Verwendung von 9 verschiedenen numerischen Verfahren beschrieben.

1.2 Beschreibung der numerischen Berechnungsverfahren

Entsprechend den drei Standardbaugrundmodellen (Einfache Annahme, *Winkler*-Modell, Kontinuum-Modell) werden 9 verschiedene numerische Verfahren zur Berechnung von Fundamentplatten berücksichtigt, wie in Bild 1.1 und Tabelle 1.1 gezeigt.

Tabelle 1.1 Numerische Berechnungsverfahren

Verfahren Nr.	Verfahren
1	Spannungstrapezverfahren (Einfache Annahme)
2	Bettungsmodulverfahren mit konstantem Bettungsmodul (*Winkler*-Modell)
3	Bettungsmodulverfahren mit von Knoten zu Knoten unterschiedlichen Bettungsmoduli (*Winkler*-Modell)
4	Bettungsmodulverfahren mit von Knoten zu Knoten unterschiedlichen Bettungsmoduli mit iterativer Verbesserung (elastische Schichten - *Winkler*-Modell oder Kontinuum-Modell)
5	Halbraumverfahren für die elastische Platte auf dem isotropen Halbraum-Baugrund (Lösung des Gleichungssystems mit Elimination) (Isotroper Halbraum - Kontinuum-Modell)
6	Steifemodulverfahren für die elastische Platte auf dem beliebig geschichteten Baugrund (Lösung des Gleichungssystems mit Iteration nach *El Gendy* (1994)) (elastische Schichten - Kontinuum-Modell)
7	Steifemodulverfahren für die elastische Platte auf dem beliebig geschichteten Baugrund (Lösung des Gleichungssystems mit Elimination) (elastische Schichten - Kontinuum-Modell)
8	Steifemodulverfahren für die starre Platte auf dem beliebig geschichteten Baugrund (elastische Schichten - Kontinuum-Modell)
9	Steifemodulverfahren für die schlaffe Sohlfläche auf dem beliebig geschichteten Baugrund (elastische Schichten - Kontinuum-Modell)

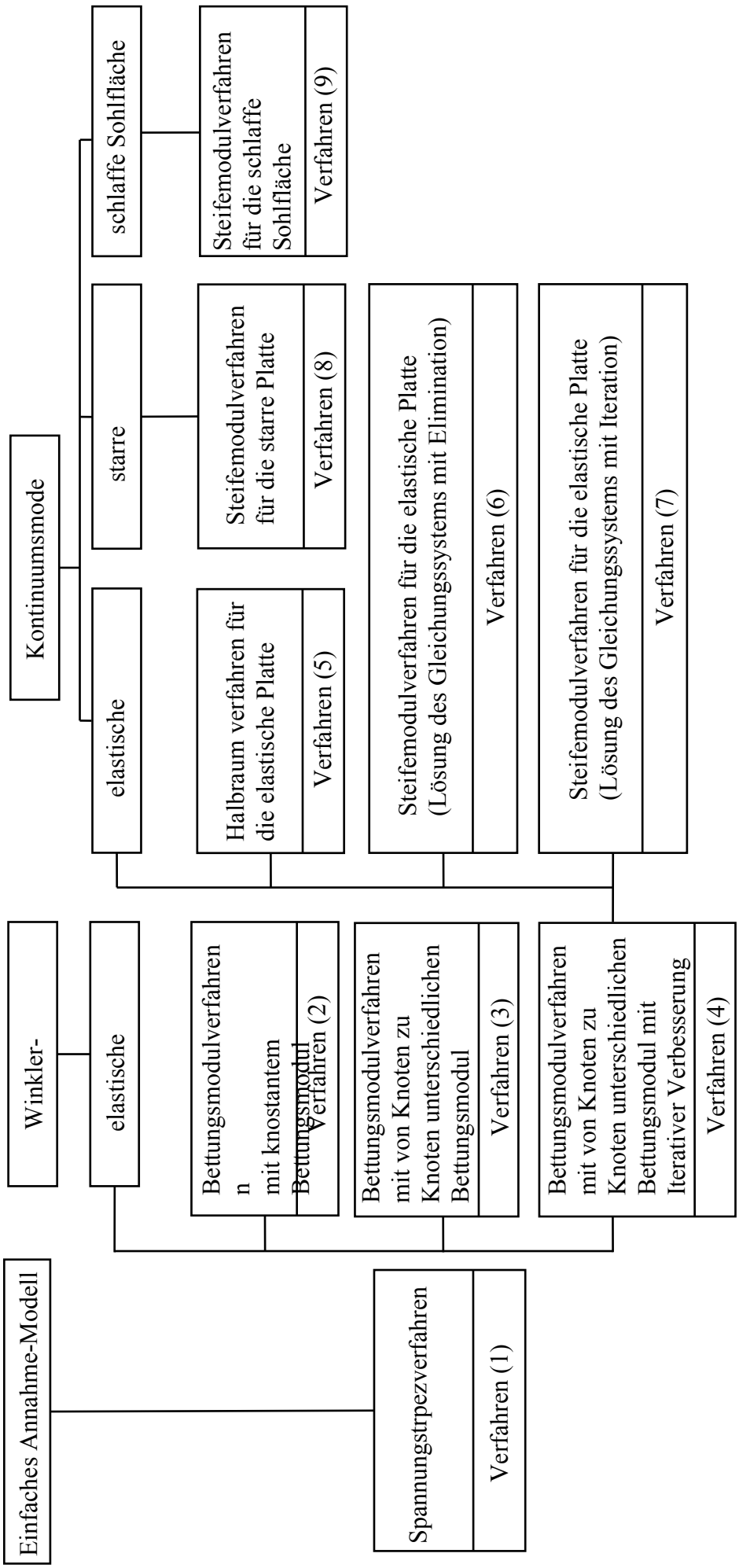


Bild 1.1 Berechnungsmodelle für Gründungsplatten (Verfahren 1 - 9) im Programm *ELPLA*

Heute ist die FE-Methode das leistungsfähigste Verfahren, das zur Lösung von vielen komplexen Problemen verfügbar ist. Sie kann fast für alle Ingenieurprobleme besonders in den Berechnungsproblemen für die Statik angewendet werden. In diesem Buch wird die FE-Methode verwendet, um die Platte für alle numerischen Berechnungsverfahren zu berechnen, außer dem Steifemodulverfahren für die starre Platte und für die schlaffe Sohlfläche auf dem beliebig geschichteten Baugrund (Verfahren 8 und 9), die die Elastizitätsregeln nicht befolgen. In der FE-Berechnung wird die Platte aus rechteckigen oder dreieckigen Plattenelementen entsprechend der zweidimensionalen Natur des Fundaments dargestellt. Stabelemente werden gewählt, um die Gegenwart von Rippen in den gerippten Platten oder Trägerrostfundamenten darzustellen. Jeder Knoten der Plattenelemente oder Stabelemente hat drei Freiheitsgrade, senkrechte Verschiebung w und zwei Verdrehungen θ_x und θ_y über die x- und y- Achse. Die Entwicklung der finiten Elementgleichungen ist gut in Standardlehrbüchern dokumentiert. Zur weiteren Information kann der Leser z.B. von *Zienkiewicz/ Cheung* (1970) oder *Schwarz* (1984) verfasste Abhandlungen über die Entwicklung von finiten Elementgleichungen lesen.

Um die Gleichungen der numerischen Berechnungsverfahren zu formulieren, sind sowohl die Gründungsplatte, die beliebige Grundform haben kann, als auch die Kontaktfläche des unterstützenden Mediums in rechteckige finite Elemente unterteilt. Diese sind an einer diskreten, finiten Anzahl von Knotenpunkten miteinander verbunden, wie im Bild 1.2 gezeigt. Kompatibilität zwischen der Platte und dem Boden in senkrechter Richtung wird für alle Verfahren außer dem Spannungstrapezverfahren (Verfahren 1) berücksichtigt. Die Grundformulierung der Gleichgewichtsgleichung für die Platte kann in allgemeiner Form durch die folgende Gl. 1.1 beschrieben werden:

$$\left[k_p\right] \{\delta\} = \{F\} \tag{1.1}$$

Der Vektor $\{F\}$ der Kräfte enthält in Gl. 1.1 die Wirkung und Rückwirkung auf die Platte. $\{\delta\}$ ist der Verformungsvektor und $[k_p]$ die Steifigkeitsmatrix für die Platte.

Im Prinzip sind für alle Berechnungsverfahren die Wirkungskräfte bekannt und gleichen den angreifenden Lasten und Momenten, die von oben auf die Fundamentplatte drücken. Die Rückwirkungskräfte sind unbekannt und gleichen den Kontaktkräften (Sohldrücken), die von unten auf die Fundamentplatte einwirken. Die Sohldrücke werden entsprechend jedem Baugrundmodell benötigt. Es wird angenommen, dass die Sohldruckverteilung q_i [kN/m^2] durch eine Reihe von äquivalenten Lasten Q_i [kN] ($Q_i = q_i..a_i..b_i$) an den verschiedenen Knotenpunkten ersetzt wird. Dabei sind $a_i..b_i$ [m^2] die Abmessungen der Feldknoten. Es ist zu bemerken, dass die Kontaktfläche um einen Knoten von einem Knoten zu einem anderen entsprechend seinem Standort variabel ist. Bild 1.2 zeigt einige Beispiele für die Abmessungen verschiedener Feldflächen um die Knoten (Knoten 34, 36, 38, 39 und 61).

Entsprechend den drei Standardbaugrundmodellen (Einfache Annahme, *Winkler*-Modell, Kontinuum-Modell) werden 9 numerische Verfahren verwendet, um die Sohldrücke q_i zu finden und die Fundamentplatte zu berechnen. Die nächsten Seiten beschreiben die Wechselwirkung zwischen der Gründungsplatte und dem Baugrund bei diesen Verfahren.

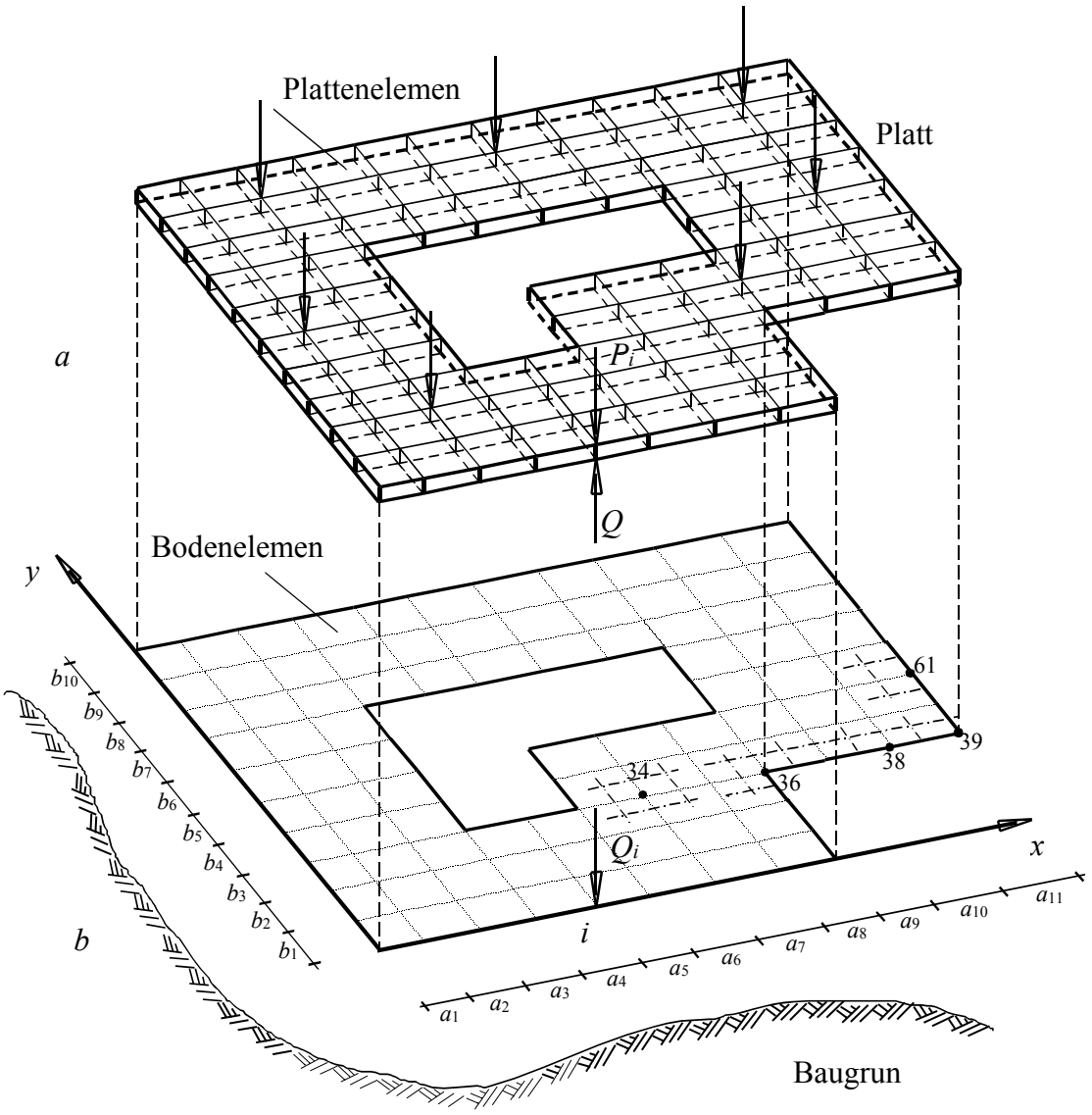


Bild 1.2 Zuordnung zwischen Platten und Bodenelementen
a) Sohlplatte
b) Elementaufteilung und Baugrund (mit Knotennummern)

1.2.1 Einfache Annahme für den Sohldruck (Verfahren 1 - Spannungstrapezverfahren)

Die ursprüngliche und älteste Berechnungsmethode zur Bestimmung der Sohldruckverteilung unter Fundamenten ist das Spannungstrapezverfahren. Diese Methode ist die einfachste. Sie wird trotz berechtigter Einwände und gut handhabbarer Computerprogramme für bessere Berechnungsverfahren in der Praxis immer noch benutzt. Die grundlegende Annahme ist, dass der Sohldruck unabhängig vom Baugrund linear auf der Unterseite der Fundamente verteilt ist (Bild 1.3).

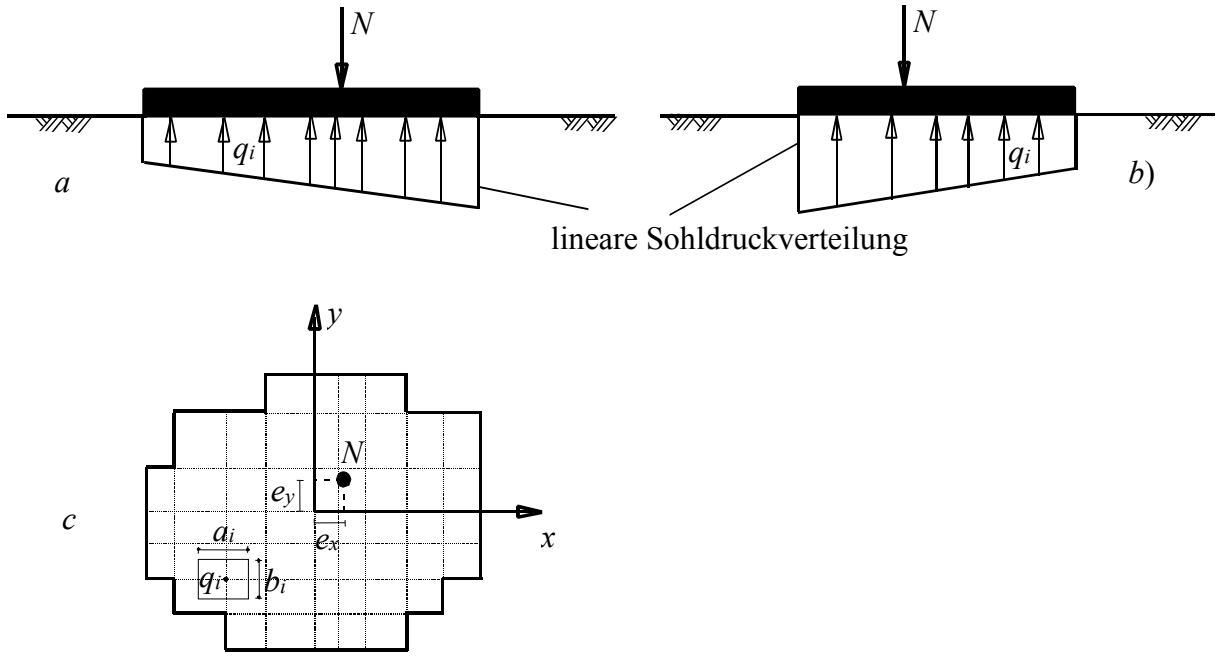


Bild 1.3 Sohldruckverteilung für die Einfache Annahme
a) Schnitt in *x*- Richtung
b) Schnitt in *y*- Richtung
c) Grundriss des Fundaments

Um die Gleichgewichtsbedingungen zu erfüllen, müssen die Vertikalkomponente *N*, die Resultierende aus den Lasten und die Resultierende des Sohldruckkörpers in ein und derselben Wirkungslinie liegen und entgegengesetzt gleich groß sein. Im allgemeinen Fall wird nach *Graßhoff/ Kany* (1997) der Sohldruck q_i [kN/m^2] an der Stelle (x_i, y_i) der Fundamentunterseite mit M_x und M_y wie folgt angesetzt:

$$q_i = \frac{N}{A_f} + \frac{M_y\, I_x - M_x\, I_{xy}}{I_x\, I_y - I_{xy}^{\,2}}\, x_i + \frac{M_x\, I_y - M_y\, I_{xy}}{I_x\, I_y - I_{xy}^{\,2}}\, y_i \qquad [\mathrm{kN/m^2}] \qquad (1.2)$$

#

Falls die *x*- Achse und die *y*- Achse Hauptachsen der Fundamentfläche sind, ist das Zentrifugalmoment $I_{xy} = 0$. Dann vereinfacht sich die Gl. 1.2 wie folgt:

$$q_i = \frac{N}{A_f} + \frac{M_y}{I_y}\, x_i + \frac{M_x}{I_x}\, y_i \qquad (1.3)$$

Beim Streifenfundament ergibt sich der Sohldruck aus:

$$q_i = \frac{N}{A_f} + \frac{M_y}{I_y} x_i \tag{1.4}$$

Greift N im Schwerpunkt der Grundrissfläche (mittig) an, so sind $M_x = 0$ und $M_y = 0$. Es errechnet sich dann ein gleichmäßig verteilter Sohldruck, der Sohldruckkörper ist prismatisch:

$$q_i = \frac{N}{A_f} \tag{1.5}$$

Hierin bedeuten:

N	Lotrechte Komponente der Resultierenden aus den Lasten	[kN]
A_f	Grundfläche des Fundaments	[m^2]
M_x	Moment von N um die x- Achse = $N \times E_y$	[kN.m]
M_y	Moment von N um die y- Achse = $N \times E_x$	[kN.m]
I_x	Trägheitsmoment der Sohlfläche um die x- Achse	[m^4]
I_y	Trägheitsmoment der Sohlfläche um die y- Achse	[m^4]
I_{xy}	Zentrifugalmoment der Sohlfläche	[m^4]

Damit können der Sohldruck unter dem Fundament und die Schnittkräfte an den verschiedenen Netzpunkten der Fundamente berechnet werden.

Gleichungssysteme für das Spannungstrapezverfahren

Der Sohldruck kann unter dem Fundament und die Schnittkräfte an den verschiedenen Netzpunkten der Fundamente berechnet werden. Dies erfolgt durch Erhalten des Sohldrucks q_i aus Gl. 1.2. Dann wird die Kontaktkraft Q_i am Knoten i gegeben als:

$$Q_i = q_i \, a_i \, b_i \tag{1.6}$$

wobei a_i [m] und b_i [m] die Abmessungen der Feldknoten sind.

Betrachtet man das gesamte Fundament, wird das Fundament unter der Wirkung der gesamten äußeren Lasten $\{F\}$ verformt, wobei:

$$\{F\} = \{P\} - \{Q\} \tag{1.7}$$

Dabei ist $\{P\}$ der Vektor der bekannten angreifenden Lasten und Momente, die von oben auf das Fundament drücken und $\{Q\}$ der Vektor der bekannten Sohldrücke, die von unten auf das Fundament einwirken. Daraus wird das Gleichgewicht des Systems mit der folgenden Matrizengleichung ausgedrückt:

$$\left[k_p\right] \{\delta\} = \{P\} - \{Q\} \tag{1.8}$$

wobei:

$\{Q\}$	Vektor des Sohldrucks
$\{P\}$	Lastvektor aus Lasten und Momenten
$\{\delta\}$	Verformungsvektor
$[k_p]$	Steifigkeitsmatrix für die Platte

Lösung des Gleichungssystems für das Spannungstrapezverfahren

Da die Steifigkeitsmatrix der Platte [k_p] in der Gl. 1.8 eine diagonale Matrix ist, wird das System der linearen Gln. 1.8 mit der Bandkoeffizienten-Technik gelöst. Die unbekannten Variablen sind die Knotenverschiebungen w_i und die Knotenverdrehungen θ_{xi} und θ_{yi} um die x- und y- Achse.

1.2.2 Bettungsmodulverfahren (Verfahren 2 und 3)(*Winkler*-Modell)

1.2.2.1 Bettungsmodulverfahren mit konstantem Bettungsmodul (Verfahren 2)

Die älteste Methode zur Analyse von Fundamenten auf elastischem Baugrund ist das Bettungsmodulverfahren, das bei der Ermittlung der Sohldruckverteilung bestimmte Formänderungsbedingungen des Fundaments und des Untergrunds berücksichtigt. Es wurde von *Winkler* (1867) vorgeschlagen und beruht auf dem idealisierten Bodenmodell des Federkissens. Dabei wird angenommen, dass die Vertikalverschiebung s_i eines beliebigen Punktes i der Bodenoberfläche direkt proportional zu der an dieser Stelle wirkenden Belastung q_i ist, und zwar unabhängig von an anderen Stellen vorhandenen Belastungen (Bild 1.4 und Gl. 1.9).

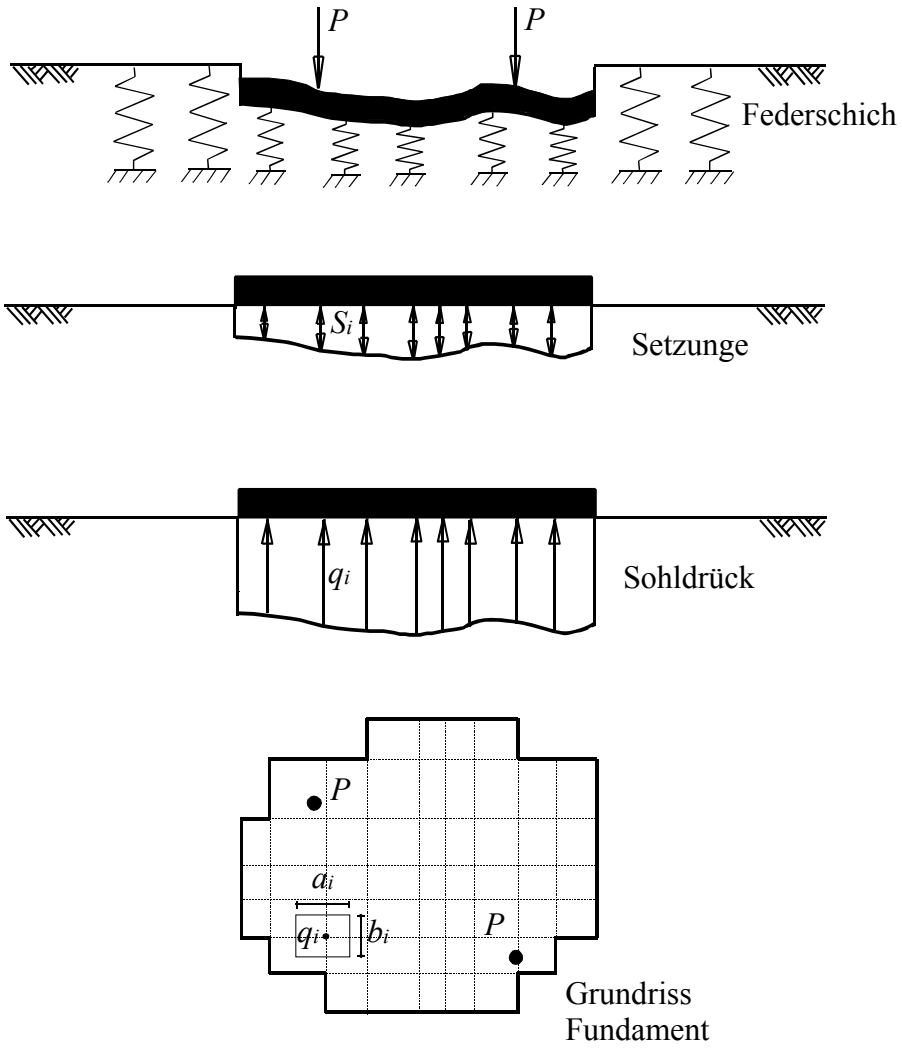


Bild 1.4 *Winkler*-Modell (Federkissen-Modell)

$$q_i = k_s \, s_i \tag{1.9}$$

wobei:

s_i	Setzung im Knoten i	[m]
q_i	Sohldruckverteilung im Knoten i	[kN/m^2]
k_s	Konstanter Bettungsmodul	[kN/m^3]

Das Verhältnis zwischen der Sohlkraft q_i [kN] und der entsprechenden Setzung s_i [m] wird als Bettungsmodul k_s [kN/m^3] bezeichnet. Er ist über die gesamte Grundfläche der Fundamente konstant. Der pauschale Ansatz eines über das gesamte Fundament konstanten Bettungsmoduls ist eine grobe Näherung, die vor allem bei unterschiedlichem Baugrund zu falschen Sohldrücken und Biegebeanspruchungen führen kann.

1.2.2.2 Bettungsmodulverfahren mit von Knoten zu Knoten unterschiedlichen Bettungsmoduli (Verfahren 3)

Dieses Verfahren stellt eine Erweiterung des *Winkler*schen Federmodells (Gl. 1.9) dar. Dabei kann unter jedem Knoten ein unterschiedlicher Bettungsmodul k_{si} angesetzt werden. Damit können in gewissem Umfang die Federkonstanten den Baugrundverhältnissen angepasst werden. Die Bettungsmoduli k_{si} können dann also den örtlichen Baugrundverhältnissen angepasst werden.

Gleichungssysteme für das Bettungsmodulverfahren

Für einen Knoten i auf dem FE-Netz wird die Sohlkraft Q_i gegeben als:

$$q_i = k_{si} \, s_i \tag{1.10}$$

Es ist zu bemerken, dass k_{si} [kN/m^3] der Bettungsmodul ist. Er ist über die gesamte Grundfläche der Fundamente konstant (Verfahren 2) oder unter jedem Knoten unterschiedlich (Verfahren 3).

Gl. 1.10 wird wie folgt geschrieben:

$$Q_i = a_i \, b_i \, k_{si} \, s_i = k_i \, s_i \tag{1.11}$$

wobei:

Q_i	Sohlkraft im Knoten i ($Q_i = q_i \, a_i \, b_i$)	[kN]
a_i, b_i	Abmessungen des Feldes i	[m]
k_i	Bodenkoeffizient des Knotens i mit Bettungsmodul ($k_i = k_{si} \, a_i \, b_i$)	[kN/m]

Betrachtet man die gesamte Platte, so kann die Gl. 1.11 wie folgt in Matrizenform geschrieben werden:

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \\ \\ \dots \\ Q_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & \dots & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \\ \\ \dots \\ s_n \end{Bmatrix} \tag{1.12}$$

Gl. 1.12 ist vereinfacht:

$$\{Q\} = [k_s]\{s\} \tag{1.13}$$

wobei:
$\{Q\}$ Vektor des Sohldrucks
$\{s\}$ Vektor der Setzung
$[k_s]$ Steifigkeitsmatrix für den Baugrund

Das Fundament wird unter der Wirkung der gesamten äußeren Lasten $\{F\}$ verformt, wobei:

$$\{F\} = \{P\} - \{Q\} \tag{1.14}$$

Dabei ist $\{P\}$ der Vektor der bekannten angreifenden Lasten und Momente, die von oben auf das Fundament drücken und $\{Q\}$ der Vektor der unbekannten Sohldrücke, die von unten auf das Fundament einwirken. Daraus wird das Gleichgewicht des Systems mit der folgenden Matrizengleichung ausgedrückt:

$$[k_p]\{\delta\} = \{P\} - \{Q\} \tag{1.15}$$

Fasst man alle Knoten zusammen, so kann man folgendes Gleichungssystem für das Fundament aufstellen:

$$[k_p]\{\delta\} = \{P\} - [k_s]\{s\} \tag{1.16}$$

Betrachtet man die Kompatibilität der Verschiebung zwischen Platte und Baugrund, wobei die Setzungsmulde des Baugrunds s [m] der Biegelinie der Platte w [m] entspricht, so lautet Gl. 1.17:

$$\left[[k_p] + [k_s]\right]\{\delta\} = \{P\} \tag{1.17}$$

Gl. 1.17 zeigt, dass die Gesamtsteifigkeitsmatrix des Systems Platte-Baugrund die Summe der Steifigkeitsmatrix der Platte $[k_p]$ und der Steifigkeitsmatrix des Baugrunds $[k_s]$ ist.

Lösung des Gleichungssystems für das Bettungsmodulverfahren

Es ist zu bemerken, dass die Steifigkeitsmatrix für die Plattenmatrix [k_p] eine Bandmatrix und die Steifigkeitsmatrix für die Baugrundmatrix [k_p] eine Diagonalmatrix bei den Bettungsmodulverfahren 2 und 3 aufweist. Es ist einfacher, für das Bettungsmodulverfahren 2 und 3 die Matrix [k_s] zur Matrix [k_p] zu addieren. Die daraus resultierende Matrix ist auch eine Bandmatrix. Damit kann man das Gleichungssystem 1.17 mit der Bandkoeffizienten-Technik lösen. Da die Gesamtsteifigkeitsmatrix eine Bandmatrix ist, benötigt man zur Lösung des Gleichungssystems 1.17 eine kurze Rechenzeit beim Anwenden der Verfahren 2 und 3.

Die unbekannten Variablen sind die Knotenverschiebungen w_i ($w_i = s_i$) und die Knotenverdrehungen θ_{xi} und θ_{yi} um die x- und y- Achse. Nach Lösen des linearen Gleichungssystems 1.17 setzt man die erhaltenen Setzungen s_i in Gl. 1.13 ein und erhält die unbekannten Sohlkräfte Q_i.

1.2.3 Bettungsmodulverfahren mit von Knoten zu Knoten unterschiedlichen Bettungsmoduli mit iterativer Verbesserung (Verfahren 4 - Lösung des Gleichungssystems mit Iteration elastische Schichten - *Winkler*-Modell oder Kontinuum-Modell)

Vorbemerkungen

Bei diesem Verfahren werden die Bettungsmoduli iterativ verbessert, um sie den in Wirklichkeit vorhandenen Setzungen anzupassen. Hierzu werden mit den bei Annahme linearer Sohldruckverteilung errechneten Bettungsmoduli (aus den Setzungen berechnet) die Sohldruckverteilung q_i und daraus neue Bettungsmoduli k_i bestimmt. Der Vorgang wird mehrmals wiederholt (Iterationszyklus vom Benutzer steuerbar). Die Ergebnisse kommen denen des Steifemodulverfahrens sehr nahe. Das Bettungsmodulverfahren mit iterativer Verbesserung wurde auch von *Ahrens*/ *Winselmann* (1984), *Stark*/ *Majer* (1988) und *Landgraf*/ *Quade* (1993) verwendet.

Beschreibung des Verfahrens

Der Iterationsprozess des Verfahrens (Bild 1.5) wird in der nachstehenden Aufzählung durchgeführt:

i) Erster Schritt: Berechnung des mittleren Sohldrucks aus den Lasten:

$$q^{(o)} = \frac{N}{A_f} \tag{1.18}$$

ii) Berechnung der Setzungen $s_i^{(j)}$ aus den Sohldrücken $Q_i^{(j)}$ und den Flexibilitätskoeffizienten des Bodens (wie im nächsten Abschnitt 1.2.4 beschrieben):

$$s_i^{(j)} = \sum_{i=1}^{n} c_{i,k}\, Q_k \tag{1.19}$$

iii) Mit den errechneten Setzungen $s_i^{(j)}$ und Sohldrücken $Q_i^{(j)}$ werden die Bettungsmoduli $k_i^{(j)}$ berechnet:

$$k_i^{(j)} = \frac{Q_i^{(j)}}{s_i^{(j)}} \tag{1.20}$$

iv) Generierung der Flexibilitätssteifigkeitsmatrix $[k_s]$ für den Baugrund aus Bettungsmoduli (Diagonalmatrix):

v) Berechnung der Verformungen $w_i^{(j)}$ aus FE-Analyse der Platte nach Gl. 1.21. Diese Gleichungssysteme werden mit der Bandkoeffizienten-Technik gelöst.

$$\left[\left[k_p\right]+\left[k_s\right]\right]\{\delta\} = \{P\} \tag{1.21}$$

Die Schritte (ii) bis (v) müssen in einer Iteration so lange durchlaufen werden, bis die Verformungen $w_i^{(j)}$ in den Knoten und die zugehörigen Setzungen $s_i^{(j)}$ übereinstimmen (Gl. 1.22).

$$\varepsilon = \left\| s_i - w_i \right\| \tag{1.22}$$

Wenn die Genauigkeit nicht bis zu einer angegebenen Toleranz geht, wird eine neue Gruppe von Sohlkräften erhalten. In diesem Fall werden die neuen Sohldrücke bei Anwendung aus den Bettungsmoduli $k_i^{(j)}$ berechnet (Gl. 1.23).

$$Q_i^{(j+1)} = k_i^{(j)} \; w_i^{(j)} \tag{1.23}$$

Die Vorteile dieser Iterationsverfahren sind, dass sie weniger Speicherplatz als die Eliminationsverfahren brauchen, weil die Matrix $[k_p]$ nicht auf die Festplatte gespeichert wird. Stattdessen werden die Koeffizienten für jeden Iterationsschritt berechnet. Diese Iterationsverfahren eigenen sich auch gut für die Berechnung umfangreicher Gleichungssysteme, da man die Ergebnisse nach kurzer Rechenzeit erhält. Es ist dabei möglich, negative Sohldrücke zu eliminieren und Vorbelastungs-/ Erstbelastungsanteile zu korrigieren.

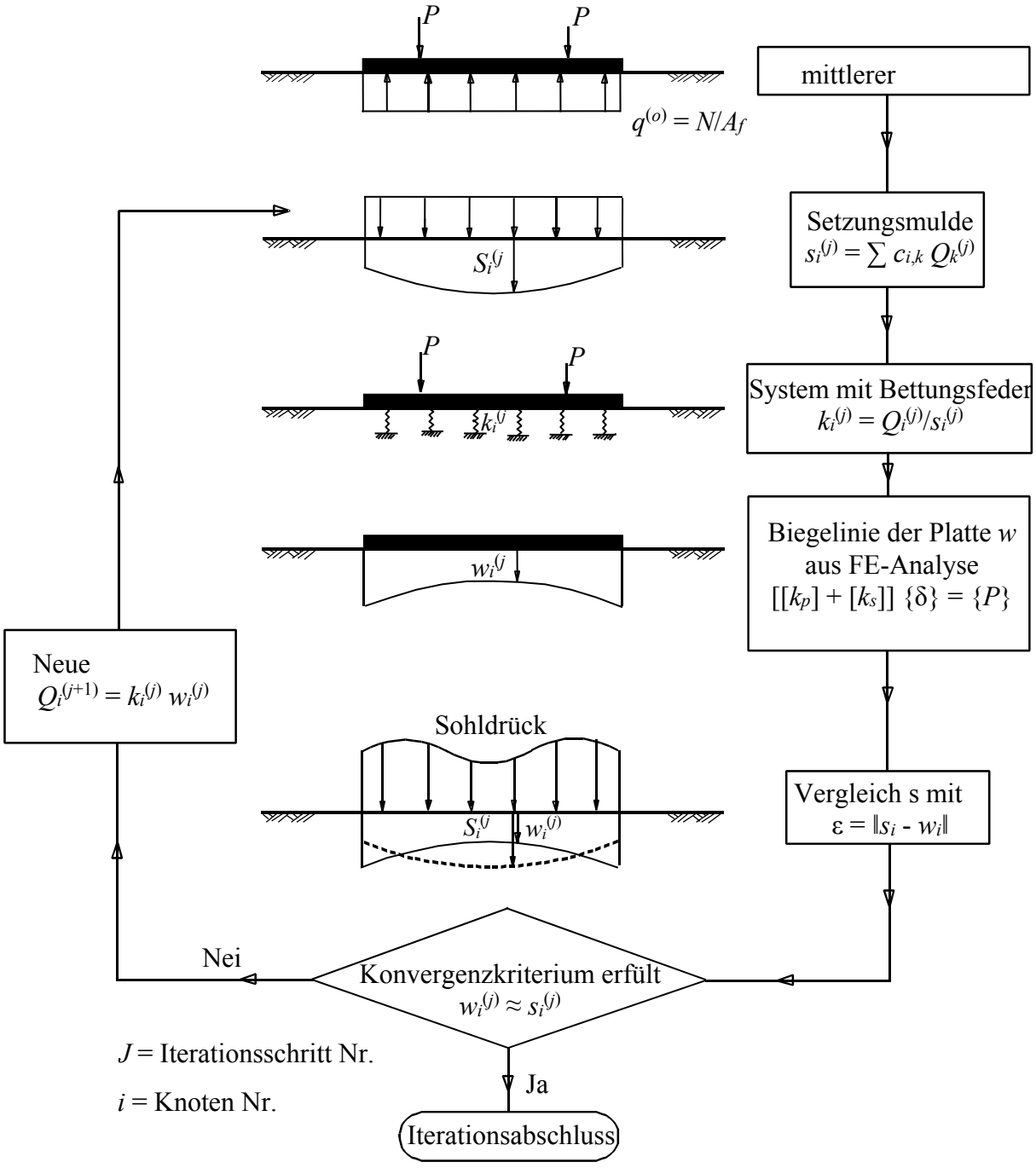


Bild 1.5 Iterationszyklus der Iterationsverfahren 4

1.2.4 Halbraumverfahren für die elastische Platte auf dem isotropen Halbraum-Baugrund (Verfahren 5 - Lösung des Gleichungssystems mit Elimination Isotroper Halbraum - Kontinuum-Modell)

Vorbemerkungen

Das Kontinuum-Modell ist wesentlich komplizierter als das *Winkler*-Modell. Beim Kontinuum-Modell tritt nach *Ohde* (1942) eine Setzung nicht nur unter der Lastfläche, sondern infolge Drucküberschneidung auch außerhalb der Lastfläche auf (Bild 1.6).

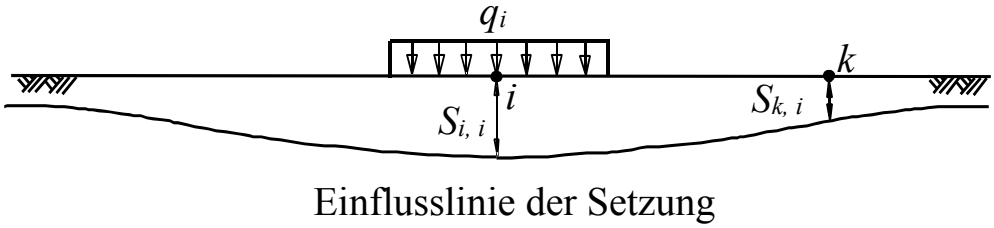


Bild 1.6 Kontinuum-Modell

Das Kontinuum-Modell nimmt das Kontinuumsverhalten des Bodens an, wobei der Boden als isotropes elastisches Halbraummedium oder geschichtetes Medium dargestellt ist. Damit überwindet dieses Modell die Annahme des *Winkler*-Modells, das nicht die Wechselwirkung zwischen den verschiedenen Knoten des Bodenmediums berücksichtigt. Darstellung des Bodens als ein Kontinuumsmedium ist genauer, da es die Wechselwirkung unter den verschiedenen Knoten des Kontinuumsmediums realisiert. Jedoch braucht es eine komplexere mathematische Berechnung. Die früheste Anwendung für Platten auf dem Kontinuumsmedium nach der FE-Methode wurde von *Cheung*/ *Zienkiewicz* (1965) vorgeschlagen. Diese Autoren betrachten den Boden als isotropes elastisches Halbraummedium.

Der isotrope elastische Halbraum basiert auf der *Gauß*schen Lösung (1885). Das Medium ist in dieser Lösung halbunendlich und ein homogener, isotroper, linearer, elastischer Feststoff mit einer Einzellast auf der Oberfläche. Die Last wirkt senkrecht zur ebenen Grenze an der Oberfläche. Diese Grundlösung kann verwendet werden, um die Oberflächensetzung einer Einzellast auf die Bodenoberfläche des isotropen elastischen Halbraums zu erhalten.

Das Halbraumverfahren für die elastische Platte auf dem isotropen Halbraum-Baugrund (Verfahren 5), das hier beschrieben wird, berücksichtigt die Wechselwirkung zwischen der Platte und dem Boden. Es stellt den Boden als isotropen elastischen Halbraum dar (Bild 1.7).

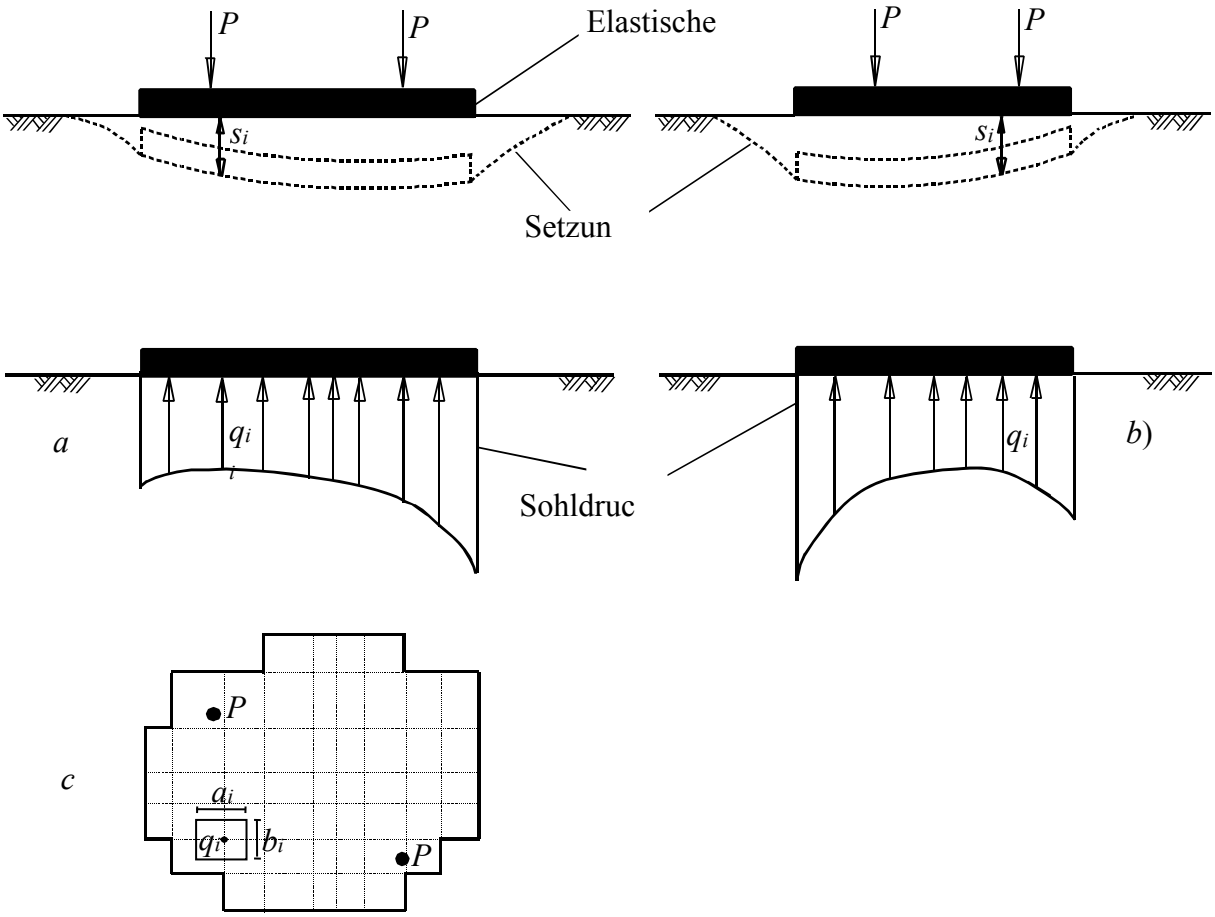


Bild 1.7 Sohldruckverteilung und Setzung unter der elastischen Platte auf dem isotropen Halbraum-Baugrund
a) Schnitt parallel zur *x*- Richtung
b) Schnitt parallel zur *y*- Richtung
c) Grundriss

Setzung in der Tiefe *z* infolge Einzellast *Q* an der Bodenoberfläche

Bild 1.8 zeigt die Einzellast *Q* auf die Halbraumoberfläche. Das einfachste Kontinuum-Modell zur Berechnung der Setzung $s(z)$ in einer bis zur Tiefe z unter der Oberfläche reichenden Schicht unter einer Einzellast Q an der Oberfläche beruht auf der folgenden Formel (13) von *Boussinesq* (1885):

$$s(z) = \frac{Q}{2\,\pi\,E_s}\left(\frac{(1+\nu_s)\,z^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} + \frac{2\,(1-\nu_s{}^2)}{(r^2+z^2)^{1/2}}\right) \tag{1.24}$$

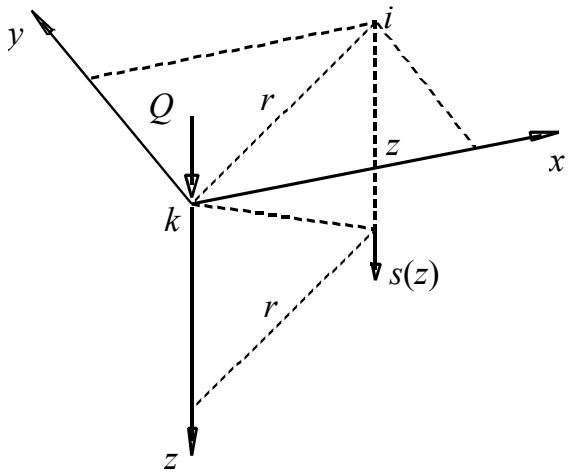


Bild 1.8 Setzung $s(z)$ infolge Einzellast auf dem isotropen Halbraum-Baugrund

Setzung an der Oberfläche infolge Einzellast

Setzt man in der *Boussinesq*schen Formel 1.24 als Ansatztiefe für die Setzung $z = 0$, so ergibt sich folgende Gl. 1.25 zur Berechnung der Setzung an der Oberfläche:

$$s\,(0) = \frac{Q\,(1-\nu_s{}^2)}{\pi\,E_s\,r} \tag{1.25}$$

wobei:

$s(0)$	Setzung im Punkt i in der Bodenoberfläche infolge Einzellast Q im Punkt k, $s(0) = s_{i,\,k}$	[m]
E_s	Steifemodul für ungehinderte Seitendehnung	[kN/m^2]
ν_s	*Poisson*zahl des Bodens (liegt in den Grenzen $0.0 \le \nu \ge 0.5$)	[-]
$r_{i,\,k}$	Abstand von i zu k	[m]
Q	Aufgebrachte Last im Punkt k	[kN]

Setzung an der Oberfläche unter der Einzellast

Die Gl. 1.25 kann nicht unter der Einzellast Q_i verwendet werden. Die Einzellast Q_i in Gl. 1.25 ist zu ersetzen durch eine über eine rechteckförmige Fläche $a.b$ gleichmäßig verteilte, äquivalente Belastung $q_i = Q_i$ / $(a.b)$. Im Fall einer gleichmäßigen rechteckigen Lastenverteilung kann die Setzung im Mittelpunkt der Lastfläche durch Integration der Gl. 1.25 über die Rechteckfläche wie folgt berechnet werden (Bild 1.9):

$$s\,(0) = \frac{Q\,(1-\nu_s{}^2)}{\pi\,E_s\,a\,b}\,2\int_{\zeta=0}^{\zeta=a/2} 2\int_{\eta=0}^{\eta=b/2} \frac{d\zeta\;d\eta}{\sqrt{\left(\zeta^2+\eta^2\right)}} \tag{1.26}$$

Gl. 1.26 wird nach der Integration zu:

$$s(0) = \frac{Q(1-\nu_s^{\,2})}{\pi E_s}\left(\frac{1}{a}\ln\frac{(m+a)}{(m-a)} + \frac{1}{b}\ln\frac{(m+b)}{(m-b)}\right) \qquad (1.27)$$

wobei:

$s(0)$ Setzung im Punkt i in der Oberfläche infolge Einzellast Q im Punkt i [m]
$s(0) = s_{i,\,i}$

Q Aufgebrachte Last im Punkt i [kN]

$m = \sqrt{a+b}$

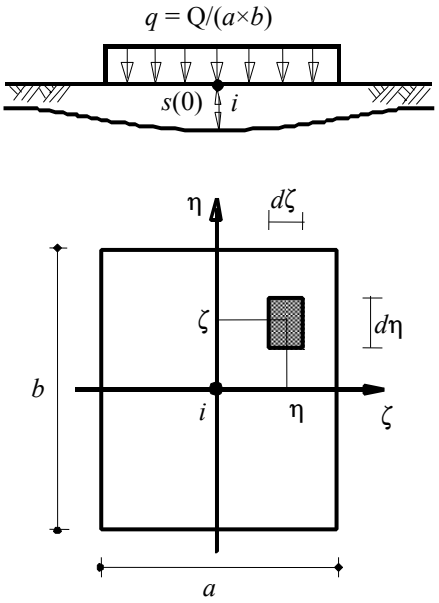


Bild 1.9 Gleichmäßig belastete Teilfläche auf dem isotropen Halbraum-Baugrund

Formulierung der Flexibilitätskoeffizienten für den isotropen Halbraum

Vorbemerkungen

Bei der Berechnung der Setzungen ist zunächst zu unterscheiden zwischen den Setzungen $s_{i.\,i}$, die aus den Spannungen σ_z im Baugrund infolge der Eigenlast q_i entstehen, und den Setzungen $s_{i,\,k}$,, die durch Drucküberschneidung infolge einer Last q_k im Nachbarfeld k verursacht werden.

Die Gesamtsetzung einer Teilfläche i setzt sich aus zwei Anteilen zusammen, nämlich aus der Setzung des Feldes i, aus Lasten auf dem Feld i und aus den Setzungen infolge schräger Druckausbreitung von benachbarten Feldern, Gl. 1.28.

$$s_i = s_{i,o} + s_{i,D} \qquad (1.28)$$

wobei:

$s_{i,\,o}$ Eigensetzung ($s_{i,\,o} = s_{i,\,i}$) [m]
$s_{i,\,D}$ Setzung infolge schräger Druckausbreitung ($s_{i,\,D} = \Sigma s_{i,\,k}$, $k \ldots i$) [m]

Bei der Berechnung von Fundamentplatten nach dem Steifemodulverfahren, aber auch bei verfeinerten Berechnungen des Systems Baugrund/ Bauwerk, werden als Kennwerte des Baugrunds Setzungseinflusszahlen $c_{i,k}$ benötigt. Diese werden in den nächsten Abschnitten erläutert.

Berechnung der Setzungen $s_{i,i}$ infolge Eigenlast

Die Einzellast Q_i im Knoten i ist zu ersetzen durch eine über eine rechteckförmige Feldfläche mit der Länge a und der Breite b gleichmäßig verteilte, äquivalente Belastung $q_i = Q_i / (a.b)$, wie im Bild 1.10 gezeigt.

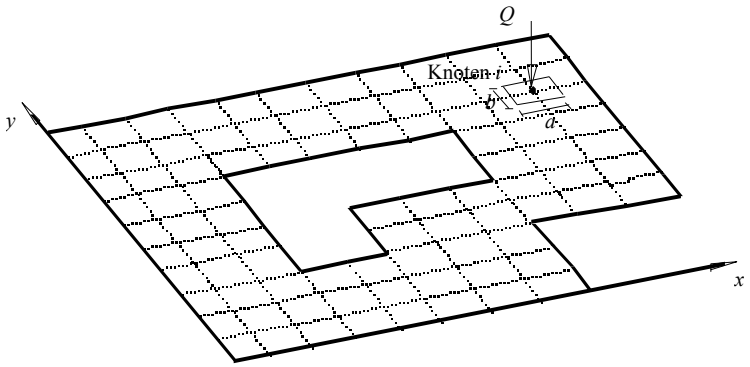


Bild 1.10 Setzung $s_{i,i}$ des Knotens i bei der unter diesem Knotenfeld i wirkenden Sohlkraft Q_i

Die Setzung $s_{i,i}$ des Knotens i infolge Eigenlast Q_i auf diesem Knoten für den isotropen Halbraum kann wie folgt ausgedrückt werden:

$$s_{i,i} = \frac{Q\,(1-\nu_s^{\,2})}{\pi\, E_s}\left(\frac{1}{a}\ln\frac{(m+a)}{(m-a)} + \frac{1}{b}\ln\frac{(m+b)}{(m-b)}\right) \tag{1.29}$$

oder in abgekürzter Schreibweise:

$$s_{i,i} = c_{i,i}\, Q_i \tag{1.30}$$

Das Verhältnis zwischen der Setzung $s_{i,i}$ des Knotens i und der Sohlkraft Q_i an diesem Knoten wird als der Flexibilitätskoeffizient $c_{i,i}$ [m/kN] bezeichnet. Die Flexibilitätskoeffizienten $c_{i,i}$ erhält man aus Gl. 1.29, wenn für Q_i die Einheitssohlkraft eingesetzt wird.

$$c_{i,i} = \frac{(1-\nu_s^{\,2})}{\pi\, E_s}\left(\frac{1}{a}\ln\frac{(m+a)}{(m-a)} + \frac{1}{b}\ln\frac{(m+b)}{(m-b)}\right) \tag{1.31}$$

Berechnung der Setzung $s_{i,k}$ infolge Drucküberschneidung

Die Setzung $s_{i,k}$ des Knotens i infolge Eigenlast Q_k auf dem Knoten k für den isotropen Halbraum (Bild 1.11) kann wie folgt ausgedrückt werden:

$$s_{i,k} = \frac{Q_k \, (1 - \nu_s^{\,2})}{\pi \, E_s \, r_{i,k}} \tag{1.32}$$

oder in abgekürzter Schreibweise:

$$s_{i,k} = c_{i,k} \, Q_k \tag{1.33}$$

Das Verhältnis zwischen der Setzung $s_{i,k}$ des Knotens i und der Sohlkraft Q_k am Knoten k wird als der Flexibilitätskoeffizient $c_{i,k}$ [m/kN] bezeichnet. Die Flexibilitätskoeffizienten $c_{i,k}$ erhält man aus Gl. 1.32, wenn für Q_k die Einheitssohlkraft eingesetzt wird.

$$c_{i,k} = \frac{(1 - \nu_s^{\,2})}{\pi \, E_s \, r_{i,k}} \tag{1.34}$$

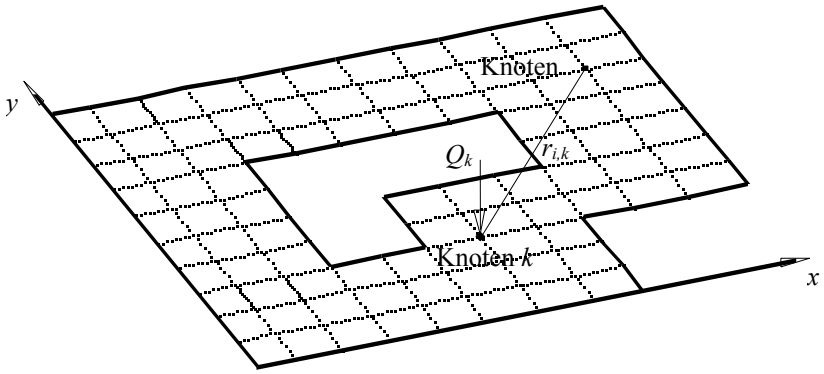


Bild 1.11 Setzung $s_{i,k}$ des Knotens i bei der unter dem k-ten Knotenfeld wirkenden Sohlkraft Q_k

Aufstellen der Flexibilitätsmatrix für den isotropen Halbraum

Um die Setzung s_i am Knoten i zu berechnen, wird die Gl. 1.30 für diesen Knoten i angewandt, während die Gl. 1.33 für die anderen Knoten angewandt wird mit Berücksichtigung von Sohldrücken unter allen Knoten. Für Rasterknoten des FE-Netzes mit n Knoten erhält man die Setzung s_i am Knoten i unter Verwendung des Superpositionsgesetzes aus der Gleichung:

$$\begin{aligned} s_i &= s_{i,1} + s_{i,2} + s_{i,3} + \ldots + s_{i,n} \\ &= c_{i,1} \, Q_1 + c_{i,2} \, Q_2 + c_{i,3} \, Q_3 + \ldots + c_{i,n} \, Q_n \end{aligned} \tag{1.35}$$

Gl. 1.35 in Serienform ist:

$$s_i = \sum_{k=1}^{n} c_{i,k}\, Q_k \tag{1.36}$$

Für die gesamte Platte erhält man:

$$\left.\begin{array}{rcl} s_1 &=& c_{1,1}\,Q_1 + c_{1,2}\,Q_2 + c_{1,3}\,Q_3 + \ldots + c_{1,n}\,Q_n \\ s_2 &=& c_{2,1}\,Q_1 + c_{2,2}\,Q_2 + c_{2,3}\,Q_3 + \ldots + c_{2,n}\,Q_n \\ s_3 &=& c_{3,1}\,Q_1 + c_{3,2}\,Q_2 + c_{3,3}\,Q_3 + \ldots + c_{3,n}\,Q_n \\ & & \\ s_n &=& c_{n,1}\,Q_1 + c_{n,2}\,Q_2 + c_{n,3}\,Q_3 + \ldots + c_{n,n}\,Q_n \end{array}\right\} \tag{1.37}$$

oder in Matrizenform geschrieben:

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \\ \\ \ldots \\ s_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & \ldots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & \ldots & c_{2,n} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & \ldots & c_{3,n} \\ & & & & \\ & & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & c_{n,3} & \ldots & c_{n,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \\ \\ \ldots \\ Q_n \end{Bmatrix} \tag{1.38}$$

Gl. 1.38 ist vereinfacht:

$$\{s\} = [c]\{Q\} \tag{1.39}$$

Dabei bedeutet $\{s\}$ den Setzungsvektor, $[c]$ die Flexibilitätsmatrix des Baugrunds und $\{Q\}$ den Vektor der Sohlkräfte. Gl. 1.39 beschreibt somit die Setzungsmulde, die sich unter der Wirkung der Sohlkräfte einstellt. Bei der Aufstellung der Flexibilitätsmatrix wird sukzessive jeweils ein Bodenknoten mit der Einheitssohlkraft belastet und die daraus resultierenden Setzungseinflüsse auf alle übrigen Knoten und auf den belasteten Knoten selbst ermittelt.

Durch Inversion erhält man die Steifigkeitsmatrix $[k_s] = [c]^{-1}$ für den Baugrund (Gl. 1.40).

$$\{Q\} = [k_s]\{s\} \tag{1.40}$$

Formulierung der Gesamtsteifigkeitsmatrix für das Halbraumverfahren

Die Fundamentplatte wird unter der Wirkung der äußeren Lasten $\{F\}$ verformt, wobei:

$$\{F\} = \{P\} - \{Q\} \tag{1.41}$$

$\{P\}$ ist der Vektor der bekannten angreifenden Lasten und Momente, die von oben auf die Fundamentplatte drücken und $\{Q\}$ der Vektor der unbekannten Sohldrücke, die von unten auf die Fundamentplatte einwirken.

Daraus folgt die Gleichung des Systems Platte-Baugrund zur Matrizengleichung:

$$\left[k_p\right]\ \{\delta\} = \{P\} - \{Q\} \tag{1.42}$$

Fasst man alle Knoten zusammen und setzt die Gl. 1.40 in Gl. 1.42 ein, so kann man folgendes Gleichungssystem für das Fundament aufstellen:

$$\left[k_p\right]\ \{\delta\} = \{P\} - \left[k_s\right]\ \{s\} \tag{1.43}$$

Betrachtet man die Kompatibilität der Verschiebung zwischen der Platte und dem Baugrund, wobei die Setzungsmulde des Baugrunds s_i der Biegelinie der Platte w_i entspricht, so lautet die Gl. 1.44:

$$\left[\left[k_p\right] + \left[k_s\right]\right]\ \{\delta\} = \{P\} \tag{1.44}$$

wobei:
$\{P\}$ Lastvektor aus Lasten und Momenten
$\{\delta\}$ Verformungsvektor
$[k_p]$ Steifigkeitsmatrix für die Platte

Gl. 1.44 zeigt, dass die Gesamtsteifigkeitsmatrix des Systems Platte-Baugrund die Summe der Steifigkeitsmatrix der Platte $[k_p]$ und der Steifigkeitsmatrix des Baugrunds $[k_s]$ ist.

Es ist zu bemerken, dass die Matrix $[k_s]$ nicht mit der Matrix $[k_p]$ kompatibel ist, weil sich die Freiheitsgrade in der Gl. 1.40 von der Gl. 1.42 unterscheiden. Um dieses Problem zu überwinden, kann die Gl. 1.40 durch Erweitern der Zeile und Spalte der Matrix $[k_s]$ auf dieselbe Orientierung wie die Matrix $[k_p]$ behandelt werden. Damit kann die Operation von Matrixgleichungen akzeptiert werden.

Lösung des Gleichungssystems für das Halbraumverfahren

Es ist zu bemerken, dass die Steifigkeitsmatrix für die Platte $[k_p]$ eine Bandmatrix und die Steifigkeitsmatrix für den Baugrund $[k_s]$ eine vollbesetzte symmetrische Matrix beim Halbraumverfahren 5 aufweist. Die daraus resultierende Matrix ist auch eine vollbesetzte symmetrische Matrix.

Das Gleichungssystem 1.44 kann nach dem *Gauß*schen Eliminationsalgorithmus gelöst werden. Da die Gesamtsteifigkeitsmatrix eine vollbesetzte symmetrische Matrix ist, braucht die Lösung der Gl. 1.44 längere Rechenzeit bei Anwenden des *Gauß*schen Eliminationsalgorithmus.
Die unbekannten Variablen sind die Knotenverschiebungen w_i ($w_i = s_i$) und die Knotenverdrehungen θ_{xi} und θ_{yi} um die x- und y- Achse. Nach dem Lösen des Systems der linearen Gl. 1.44 setzt man die erhaltenen Setzungen s_i in Gl. 1.40 ein und erhält die unbekannten Sohlkräfte Q_i.

1.2.5 Steifemodulverfahren für die elastische Platte auf dem beliebig geschichteten Baugrund (Verfahren 6 - Lösung des Gleichungssystems mit Iteration elastische Schichten - Kontinuum-Modell)

Vorbemerkungen

Verfügbare Lösungen für die Berechnung von Fundamenten mit Verwendung des Kontinuum-Modells für den isotropen elastischen Halbraum oder geschichteten Baugrund wurden von vielen Autoren dargestellt. Aber das Hauptproblem bei der Anwendung des Modells für praktische Berechnungen ist die Lösung der umfangreichen Gleichungssysteme, die lange Berechnungszeit erfordert. Es gibt eine Reihe von Versuchen, um dieses Problem zu überwinden. Eine Übersicht über die Literatur befindet sich in den Arbeiten von *Haung* (1974), *Cheung* (1978), *Ahrens*/ *Winselmann* (1984), *Stark*/ *Majer* (1988), *Lopes*/ *Gusmão* (1991) und *El Gendy* (1994).

Das iterative Steifemodulverfahren (Verfahren 6) wurde von *El Gendy* (1998) entwickelt, wobei auch wichtige Spezialfälle wie die Nutzung der Symmetrie oder Antimetrie zur Reduktion des Rechenaufwandes berücksichtigt werden. Hierbei braucht das Gleichungssystem nur für einen Teil der Platte gelöst zu werden.

Beschreibung des Verfahrens

Summengleichungen der Setzungen

Für einen Rasterknoten des FE-Netzes mit n Knoten wird die Setzung s_i am Knoten i unter Verwendung des Superpositionsgesetzes erhalten aus der Gleichung:

$$\begin{aligned} s_i &= s_{i,1} + s_{i,2} + s_{i,3} + \ldots + s_{i,n} \\ &= c_{i,1}\, Q_1 + c_{i,2}\, Q_2 + c_{i,3}\, Q_3 + \ldots + c_{i,n}\, Q_n \end{aligned} \tag{1.45}$$

Gl. 1.45 in Serienform ist:

$$s_i = \sum_{k=1}^{n} c_{i,k}\, Q_k \tag{1.46}$$

Für die gesamte Platte erhält man:

$$\left.\begin{array}{rcccccccccc} s_1 &=& c_{1,1}\,Q_1 &+& c_{1,2}\,Q_2 &+& c_{1,3}\,Q_3 &+& \ldots &+& c_{1,n}\,Q_n \\ s_2 &=& c_{2,1}\,Q_1 &+& c_{2,2}\,Q_2 &+& c_{2,3}\,Q_3 &+& \ldots &+& c_{2,n}\,Q_n \\ s_3 &=& c_{3,1}\,Q_1 &+& c_{3,2}\,Q_2 &+& c_{3,3}\,Q_3 &+& \ldots &+& c_{3,n}\,Q_n \\ & & & & & & & & & & \\ s_n &=& c_{n,1}\,Q_1 &+& c_{n,2}\,Q_2 &+& c_{n,3}\,Q_3 &+& \ldots &+& c_{n,n}\,Q_n \end{array}\right\} \tag{1.47}$$

oder in Matrizenform geschrieben:

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \\ \\ \dots \\ s_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & \dots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & \dots & c_{2,n} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & \dots & c_{3,n} \\ & & & & \\ & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & c_{n,3} & \dots & c_{n,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \\ \\ \dots \\ Q_n \end{Bmatrix} \tag{1.48}$$

Gl. 1.48 lautet vereinfacht:

$$\{s\} = [c]\{Q\} \tag{1.49}$$

Dabei bedeutet $\{s\}$ den Setzungsvektor, $[c]$ die Flexibilitätsmatrix des Baugrunds und $\{Q\}$ den Vektor der Sohlkräfte. Gl. 1.3 beschreibt somit die Setzungsmulde, die sich unter der Wirkung der Sohlkräfte einstellt. Bei der Aufstellung der Flexibilitätsmatrix wird sukzessive jeweils ein Bodenknoten mit der Einheitssohlkraft belastet und die daraus resultierenden Setzungseinflüsse auf alle übrigen Knoten und auf den belasteten Knoten selbst ermittelt.

Durch Inversion erhält man die Steifigkeitsmatrix $[k_s] = [c]^{-1}$ für den Baugrund (Gl. 1.50).

$$\{Q\} = [k_s]\{s\} \tag{1.50}$$

Formulierung der Gesamtsteifigkeitsmatrix für das Steifemodulverfahren

Die Fundamentplatte wird unter der Wirkung der äußeren Lasten $\{F\}$ verformt, wobei:

$$\{F\} = \{P\} - \{Q\} \tag{1.51}$$

$\{P\}$ ist der Vektor der bekannten angreifenden Lasten und Momente, die von oben auf die Fundamentplatte drücken und $\{Q\}$ der Vektor der unbekannten Sohldrücke, die von unten auf die Fundamentplatte einwirken.

Daraus folgt die Gleichung des Systems Platte-Baugrund zur Matrizengleichung:

$$[k_p]\ \{\delta\} = \{P\} - \{Q\} \tag{1.52}$$

Fasst man alle Knoten zusammen und setzt die Gl. 1.50 in Gl. 1.52 ein, so kann man folgendes Gleichungssystem für das Fundament aufstellen:

$$[k_p]\ \{\delta\} = \{P\} - [k_s]\ \{s\} \tag{1.53}$$

Betrachtet man die Kompatibilität der Verschiebung zwischen der Platte und dem Baugrund, wobei die Setzungsmulde des Baugrunds s_i der Biegelinie der Platte w_i entspricht, so lautet die Gl. 1.54:

$$\left[[k_p] + [k_s]\right]\ \{\delta\} = \{P\} \tag{1.54}$$

Gl. 1.54 zeigt, dass die Gesamtsteifigkeitsmatrix des Systems Platte-Baugrund die Summe der Steifigkeitsmatrix der Platte [k_p] und der Steifigkeitsmatrix des Baugrunds [k_s] ist.

Es ist zu bemerken, dass die Steifigkeitsmatrix für die Platte [k_p] eine Bandmatrix und die Steifigkeitsmatrix für den Baugrund [k_s] eine vollbesetzte unsymmetrische Matrix bei dem Steifemodulverfahren aufweist. Die Schwierigkeit bei der Anwendung des Steifemodulverfahrens für praktische Berechnungen ist die Lösung der umfangreichen Gleichungssysteme für die Platte, die einen Computer mit großem Speichervolumen und lange Rechenzeit erfordert. Um dieses Problem zu überwinden, wird die Steifigkeitsmatrix für den Baugrund [k_s] zu einer symmetrischen Bandmatrix [k'] konvertiert. Die Bandbreite der Matrix [k'] sollte gleich der Bandbreite der Steifigkeitsmatrix für die Platte [k_p] sein. Dann ist es einfacher, die Matrix [k'] zur Matrix [k_p] zu addieren. Die daraus resultierende Matrix ist auch eine Bandmatrix. Damit kann man das Gleichungssystem 1.54 mit der Bandkoeffizienten-Technik lösen.

Bandmatrixformulierung

Um zu erläutern, wie die Steifigkeitsmatrix für den Baugrund [k_s] zu einer symmetrischen Bandmatrix konvertiert wird, betracht man das einfache Beispiel für die Platte im Bild 1.12. Die Platte hat 9 Knoten, jeder Knoten hat drei Unbekannte: Verformungen w, θ_x und θ_y. Damit gibt es 27 gleichzeitige Gleichungen. Die Platte mit 9 Knoten hat eine Steifigkeitsmatrix für die Platte [k_p] mit einer halben Bandbreite von $N_w = 15$.

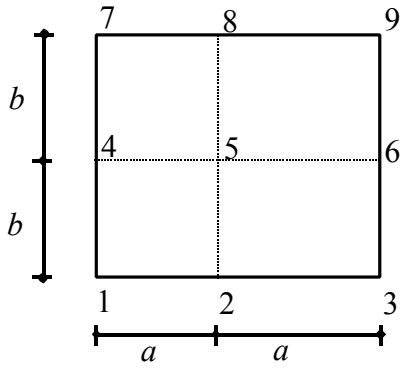


Bild 1.12 Platte mit 9 Knoten

Die Matrix [k_s] kann wie folgt in zwei Matrizen [k_1] und [k_2] eingeteilt werden:

$$[k_s] = [k_1] + [k_2] \tag{1.55}$$

Gl. 1.55 kann wie folgt mit Matrixkoeffizienten in Details neu geschrieben werden:

$N_w/3$

$$\begin{bmatrix}
k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} & k_{1,5} & k_{1,6} & k_{1,7} & k_{1,8} & k_{1,9} \\
k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} & k_{2,5} & k_{2,6} & k_{2,7} & k_{2,8} & k_{2,9} \\
k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & k_{3,4} & k_{3,5} & k_{3,6} & k_{3,7} & k_{3,8} & k_{3,9} \\
k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4} & k_{4,5} & k_{4,6} & k_{4,7} & k_{4,8} & k_{4,9} \\
k_{5,1} & k_{5,2} & k_{5,3} & k_{5,4} & k_{5,5} & k_{5,6} & k_{5,7} & k_{5,8} & k_{5,9} \\
k_{6,1} & k_{6,2} & k_{6,3} & k_{6,4} & k_{6,5} & k_{6,6} & k_{6,7} & k_{6,8} & k_{6,9} \\
k_{7,1} & k_{7,2} & k_{7,3} & k_{7,4} & k_{7,5} & k_{7,6} & k_{7,7} & k_{7,8} & k_{7,9} \\
k_{8,1} & k_{8,2} & k_{8,3} & k_{8,4} & k_{8,5} & k_{8,6} & k_{8,7} & k_{8,8} & k_{8,9} \\
k_{9,1} & k_{9,2} & k_{9,3} & k_{9,4} & k_{9,5} & k_{9,6} & k_{9,7} & k_{9,8} & k_{9,9}
\end{bmatrix} =$$

$N_w/3$

$$\begin{bmatrix}
k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} & k_{1,5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} & k_{2,5} & k_{2,6} & 0 & 0 & 0 \\
 & & k_{3,3} & k_{3,4} & k_{3,5} & k_{3,6} & k_{3,7} & 0 & 0 \\
 & & & k_{4,4} & k_{4,5} & k_{4,6} & k_{4,7} & k_{4,8} & 0 \\
 & & & & k_{5,5} & k_{5,6} & k_{5,7} & k_{5,8} & k_{5,9} \\
 & & & & & k_{6,6} & k_{6,7} & k_{6,8} & k_{6,9} \\
 & & & & & & k_{7,7} & k_{7,8} & k_{7,9} \\
 & & & & & & & k_{8,8} & k_{8,9} \\
 & & & & & & & & k_{9,9}
\end{bmatrix} + \qquad (1.56)$$

$N_w/3$

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{1,6} & k_{1,7} & k_{1,8} & k_{1,9} \\
k_{2,1}-k_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{2,7} & k_{2,8} & k_{2,9} \\
k_{3,1}-k_{1,3} & k_{3,2}-k_{2,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{3,8} & k_{3,9} \\
k_{4,1}-k_{1,4} & k_{4,2}-k_{2,4} & k_{4,3}-k_{3,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{4,9} \\
k_{5,1}-k_{1,5} & k_{5,2}-k_{2,5} & k_{5,3}-k_{3,5} & k_{5,4}-k_{4,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
k_{6,1} & k_{6,2}-k_{2,6} & k_{6,3}-k_{3,6} & k_{6,4}-k_{4,6} & k_{6,5}-k_{5,6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
k_{7,1} & k_{7,2} & k_{7,3}-k_{3,7} & k_{7,4}-k_{4,7} & k_{7,5}-k_{5,7} & k_{7,6}-k_{6,7} & 0 & 0 & 0 \\
k_{8,1} & k_{8,2} & k_{8,3} & k_{8,4}-k_{4,8} & k_{8,5}-k_{5,8} & k_{8,6}-k_{6,8} & k_{8,7}-k_{7,8} & 0 & 0 \\
k_{9,1} & k_{9,2} & k_{9,3} & k_{9,4} & k_{9,5}-k_{5,9} & k_{9,6}-k_{6,9} & k_{9,7}-k_{7,9} & k_{9,8}-k_{8,9} & 0
\end{bmatrix}$$

wobei die Matrix [k_1] eine symmetrische Bandmatrix ist, die dieselbe halbe Bandbreite der Matrix [k_p] hat. Die zweite Matrix [k_2] kann zu einer diagonalen Matrix konvertiert werden, wie im Iterationsprozess beschrieben.

Iterationsprozess

Der Iterationsprozess des Verfahrens (Bild 1.13) wird nach folgender Aufzählung durchgeführt:

i) Erster Schritt: Berechnung des mittleren Sohldrucks $q^{(o)}$ aus den Lasten:

$$q^{(o)} = \frac{N}{A_f} \tag{1.57}$$

ii) Die Setzungen s_i infolge der Sohlkräfte Q_i für den geschichteten Baugrund (wie im nächsten Abschnitt 1.2.4 beschrieben) erhält man aus:

$$\{s\} = [c]\{Q\} \tag{1.58}$$

ii) Eine Gruppe von Knotenkräften $\{Q_A\}$ wird aus der Matrix [k_2] und den Setzungen $\{s\}$ berechnet als:

$$\{Q_A\} = [k_2]\{s\} \tag{1.59}$$

iii) Die Matrix [k_2] wird in eine äquivalente diagonale Matrix [k^*_2] konvertiert. Die Koeffizienten der diagonalen Matrix werden erhalten aus:

$$k_{i,i} = \frac{Q_{A_i}}{s_i} \tag{1.60}$$

v) Die äquivalente symmetrische Bandmatrix [k'] für den Baugrund [k_s] ist:

$$[k'] = [k_1] + [k^*{}_2] \tag{1.61}$$

vi) Nun ist es einfacher, die äquivalente Steifigkeitsmatrix für den Baugrund [k'] zur Steifigkeitsmatrix für die Platte [k_p] zu addieren. Dann wird die gesamte Matrix eine Bandmatrix. Die gesamte Systemgleichung wird ausgedrückt als:

$$\left[[k_p] + [k'] \right] \{\delta\} = \{P\} \tag{1.62}$$

vii) Berechnung der Verformungen $w_i^{(j)}$ aus FE-Analyse der Platte nach Gleichung 1.54. Diese Gleichungssysteme werden mit der Bandkoeffizienten-Technik gelöst.

viii) Die Bodensetzungen s_i werden mit den entsprechenden Plattenverschiebungen w_i verglichen, die aus der Systemgleichung 1.54 berechnet wurden.

$$\varepsilon = \left\| s_i - w_i \right\| \tag{1.63}$$

ix) Wenn die Genauigkeit nicht bis zu einer angegebenen Toleranz ε geht, wird eine neue Gruppe von Sohlkräften erhalten aus:

$$\{Q_A\} = [k_2]\{s\} \tag{1.64}$$

Die Schritte ii) bis viii) müssen in einer Iteration so lange durchlaufen werden, bis die Verformungen $w_i^{(j)}$ in den Knoten und die zugehörigen Setzungen $s_i^{(j)}$ übereinstimmen. Das Bild 1.13 zeigt die Iterationszyklen zu diesen Verfahren.

Die Vorteile dieser Iterationsverfahren sind, dass sie weniger Speicherplatz als die Eliminationsverfahren brauchen, weil die Matrix $[k_p]$ nicht auf die Festplatte gespeichert wird; statt dessen werden ihre Koeffizienten für jeden Iterationsschritt berechnet. Diese Iterationsverfahren eignen sich auch gut für die Berechnung mit umfangreichen Gleichungssystemen, da man die Ergebnisse nach kurzer Rechenzeit erhält. Es ist dabei möglich, negative Sohldrücke zu eliminieren und Vorbelastungs-Erstbelastungsanteile zu korrigieren.

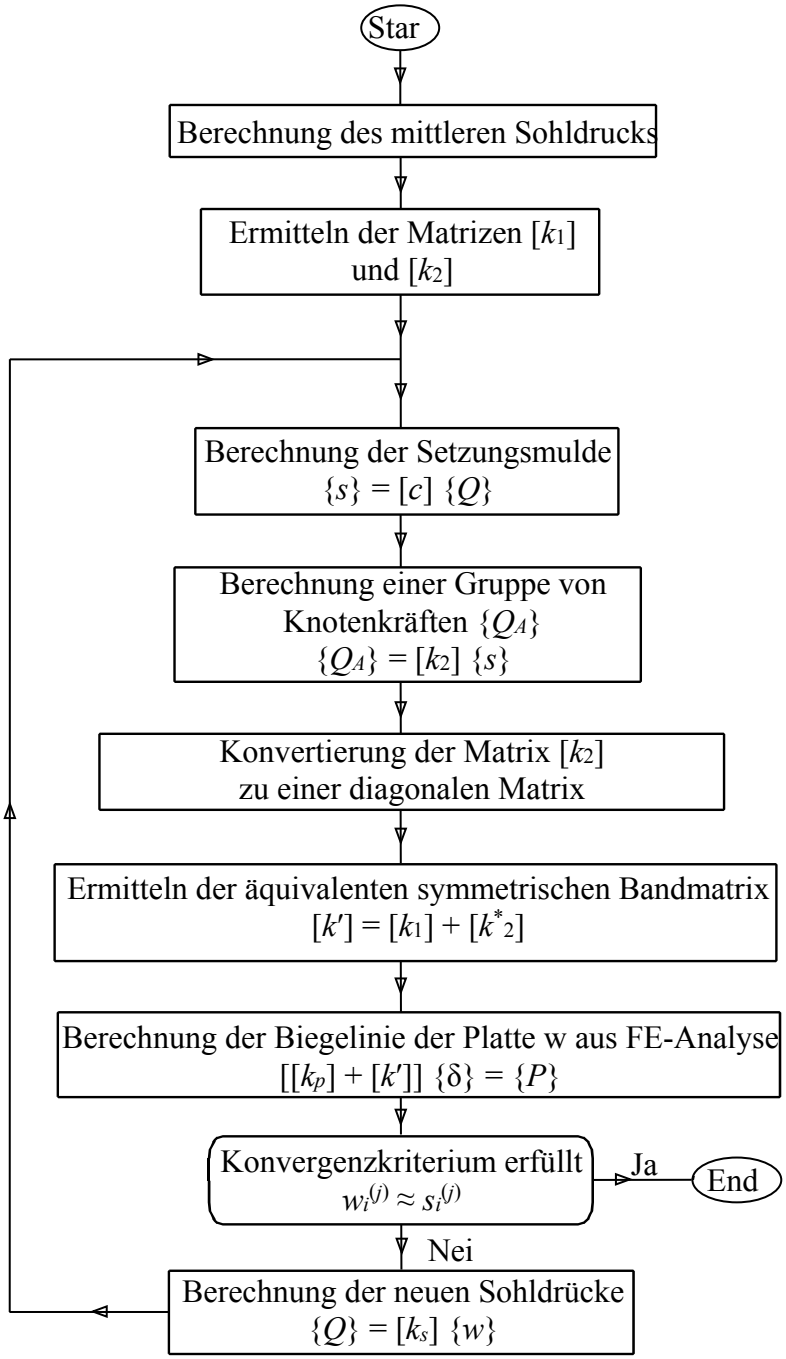


Bild 1.13 Iterationszyklus der Iterationsverfahren 6

1.2.6 Steifemodulverfahren für die elastische Platte auf dem beliebig geschichteten Baugrund (Verfahren 7 - Lösung des Gleichungssystems mit Elimination elastische Schichten - Kontinuum-Modell)

Vorbemerkungen

In Wirklichkeit ist das Bohrprofil des Bodens normalerweise nicht homogen. Das wahrscheinlichste Profil ist geschichtet. Außerdem sind die Fundamente fast nie an der Bodenoberfläche gelegen. Deshalb muss eine Verbesserung auf dem isotropen Halbraum angewandt werden in der Annahme, dass die Last an der Oberfläche des homogenen isotropen elastischen Halbraums angewandt wird. Das Modell zum Steifemodulverfahren ist komplizierter als das Halbraummodell. *Kany* (1954) hat eine Erweiterung des Verfahrens von *Ohde* (1942) zur Berechnung von Fundamentbalken auf nicht homogenem und anisotropem Baugrund dargestellt. Es kann das Verfahren für die Platten angewandt werden, wie im folgenden Abschnitt beschrieben.

Setzung in der Tiefe z unter dem Eckpunkt einer Lastfläche

Die Setzung unter dem Eckpunkt der Lastfläche kann in ähnlicher Weise wie unter dem Mittelpunkt der Lastfläche bestimmt werden, die im Abschnitt 1.2.4 beschrieben wurde. Dies geschieht durch Integration der Gl. 1.24 über das belastete Gebiet. Bild 1.14 zeigt die Lastfläche q mit Größe $a.b$, die auf die Oberfläche des isotropen elastischen Halbraummediums wirkt.

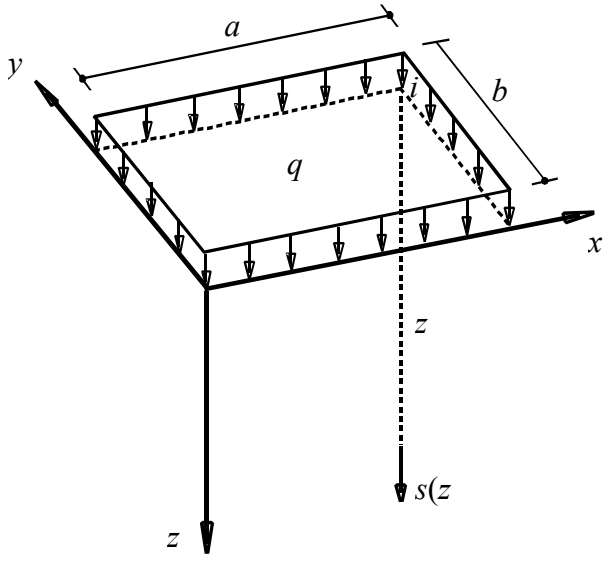


Bild 1.14 Setzung $s(z)$ unter dem Eckpunkt der rechteckförmigen Lastfläche auf dem elastischen isotropen Halbraum

Nach *Steinbrenner* (1934) gilt für die vertikale Verschiebung $s(z)$ eines Punktes in der Tiefe z unter

dem Eckpunkt der rechteckförmigen Lastfläche *a.b* (Bild 1.14):

$$s(z) = \frac{q(1-\nu_s^2)}{2\pi E_s}\left(b \ln\frac{(c+a)}{(c-a)} + a \ln\frac{(c+b)}{(c-b)}\right) - \frac{q(1-\nu_s-2\nu_s^2)}{2\pi E_s}\left(z \tan^{-1}\frac{a\,b}{z\,c}\right) \tag{1.65}$$

Setzung an der Oberfläche unter dem Eckpunkt einer Lastfläche

Die Setzung $s(0)$ für einen Eckpunkt der Lastfläche an der Oberfläche des Halbraums ergibt sich aus Gl. 1.65 für $z = 0$ mit folgender Formel:

$$s(0) = \frac{q(1-\nu_s^2)}{2\pi E_s}\left(b \ln\frac{(m+a)}{(m-a)} + a \ln\frac{(m+b)}{(m-b)}\right) \tag{1.66}$$

wobei *c* und *m* in den Gln. 1.65 und 1.66 durch die folgenden Ausdrücke definiert sind:

$$c = \sqrt{a^2+b^2+z^2} \quad \text{und} \quad m = \sqrt{a^2+b^2}$$

Setzung einer bestimmten Schicht infolge Lastfläche

Für die Setzungsgleichungen 1.65 und 1.66 wurde angenommen, dass die Bodenschicht über eine unendliche Tiefe erweitert ist. Wenn jedoch eine starre Unterlage in einer Tiefe $z = h$ unter der Bodenschicht zugrunde liegt, kann die Setzung s_h der Schicht näherungsweise berechnet werden aus (Bild 1.15):

$$s_h = s(0) - s(z) \tag{1.67}$$

Setzt man die Gln. 1.65 und 1.66 in Gl. 1.67 ein, so ergibt sich für die Setzung s_h des Eckpunkts der Lastfläche an der Oberfläche der elastischen Schicht der Dicke *h*:

$$s_h = \frac{q(1-\nu_s^2)}{2\pi E_s}\left(b \ln\frac{(c-a)(m+a)}{(c+a)(m-a)} + a \ln\frac{(c-b)(m+b)}{(c+b)(m-b)}\right) - \frac{q(1-\nu_s-2\nu_s^2)}{2\pi E_s}\left(z \tan^{-1}\frac{a\,b}{z\,c}\right) \tag{1.68}$$

Gl. 1.54 in abgekürzter Schreibweise ist:

$$s_h = \frac{q}{E_s} f \tag{1.69}$$

und dem programmierten oder auch aus Tabellen und Kurventafeln (*Kany* (1974)) in Abhängigkeit von a, b und z ablesbaren Setzungsbeiwert f.

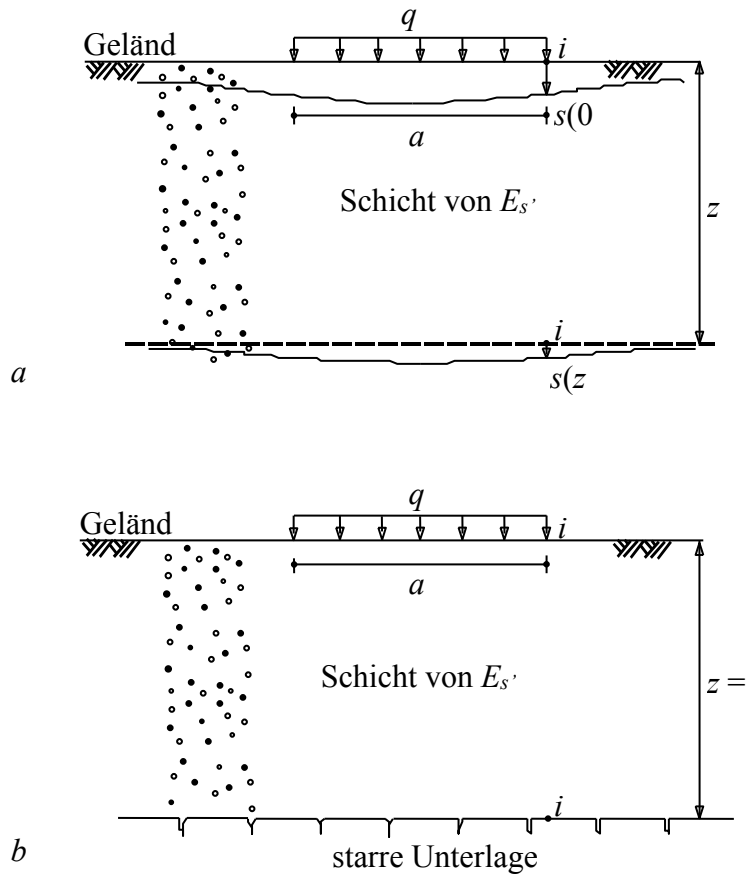


Bild 1.15 a) Isotroper elastischer Halbraum
b) Elastische Schicht auf starrer Unterlage

Setzung eines Mehrschichtsystems infolge Lastfläche

Offensichtlich kann man diesen Ansatz verallgemeinern, um ein Mehrschichtsystem des Bodens zu berücksichtigen. Jedes hat verschiedenes elastisches Material und Dicke, wie im Bild 1.16 gezeigt. Die senkrechte Setzung einer Schicht l in einem n geschichteten System wird gegeben mit:

$$s_l = q\left(\frac{f^{(l)} - f^{(l-1)}}{E_s^{(l)}}\right) = q\left(\frac{\Delta f^{(l)}}{E_s^{(l)}}\right) \tag{1.70}$$

Darin ist allgemein:

$E_{i,l}$	Steifemodul für ungehinderte Seitendehnung der l-ten Schicht	[kN/m^2]
q_i	$Q_i /(a_i . b_i)$ Sohldruck des Feldes i	[kN/m^2]
$\Delta f^{(l)}$	$f^{(l)} - f^{(l-1)}$ die Differenz der Setzungsbeiwerte f zwischen Unterkante z_l und Oberkante $z_{(l-1)}$ der l-ten Schicht (bei insgesamt n Schichten)	
a_i, b_i	Abmessungen des Feldes i	[m]
Q_i	Belastung des Feldes i	[kN]

Die Gesamtsetzung für das *n* geschichtete System ist:

$$s = q\left(\frac{f^{(1)}}{E_s^{(1)}} + \sum_{l=2}^{n}\frac{\Delta f^{(l)}}{E_s^{(l)}}\right) \tag{1.71}$$

Man betrachtet die *Poisson*zahl ν_s für alle Bodenschichten als konstant, wenn ihr Wert für die meisten Bodentypen zwischen 0.3 und 0.5 liegt.

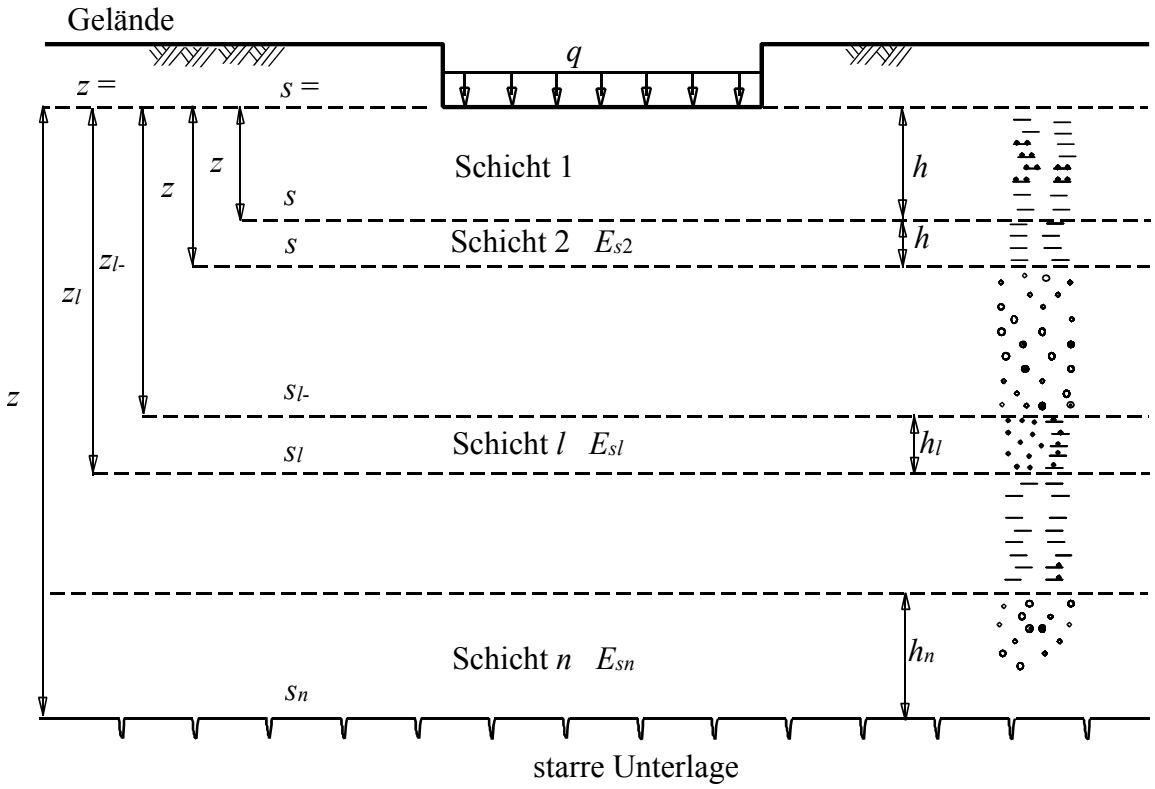


Bild 1.16 Mehrschichtensystem

Setzung an einem Punkt innerhalb der belasteten Lastfläche

Bis jetzt wurde die Setzung unter einer Ecke der belasteten Lastfläche betrachtet. Um die Setzung an einem beliebigen Punkt zu finden, kann das Prinzip der Superposition benutzt werden. Die Setzung an einem Punkt innerhalb der rechteckigen belasteten Lastfläche wird von der Summe der Setzungen an den Ecken von vier belasteten Lastteilflächen gegeben.

Zur Berechnung der Setzungsbeiwerte $f^{(l)}$ für eine Schicht *l* an einem Punkt innerhalb der rechteckigen belasteten Lastfläche, wie im Bild 1.17 gezeigt, wird die Formel von *Kany* (1974) verwendet. Die Formel für $f^{(l)}$ für die *l*-te Schicht lautet:

$$f^{(l)} = f^{(l)}{}_1 + f^{(l)}{}_2 + f^{(l)}{}_3 + f^{(l)}{}_4$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{4}\left[(1-\nu_s{}^2)\left\{b_n \ln\frac{(c_n-a_n)(M+a_n)}{(c_n+a_n)(M-a_n)}\right.\right. \qquad (1.72)$$
$$\left.\left. + a_n \ln\frac{(c_n-b_n)(M+b_n)}{(c_n+b_n)(M-b_n)}\right\} + (1-\nu_s-2\nu_s{}^2)\, z_l \tan^{-1}\frac{a_n\, b_n}{z_l\, c_n}\right]$$

Sie gilt für die Setzung des Fundaments mit der Sohlfläche *a.b* mit:

$$c_n = \sqrt{a_n{}^2 + b_n{}^2 + z_l{}^2} \quad \text{und} \quad M = \sqrt{a_n{}^2 + b_n{}^2}$$

Der Wert z_l bedeutet die Tiefe der Unterkante der Schicht *l*, gemessen von der Fundamentsohle (Tiefe t_f unter Gelände) aus.

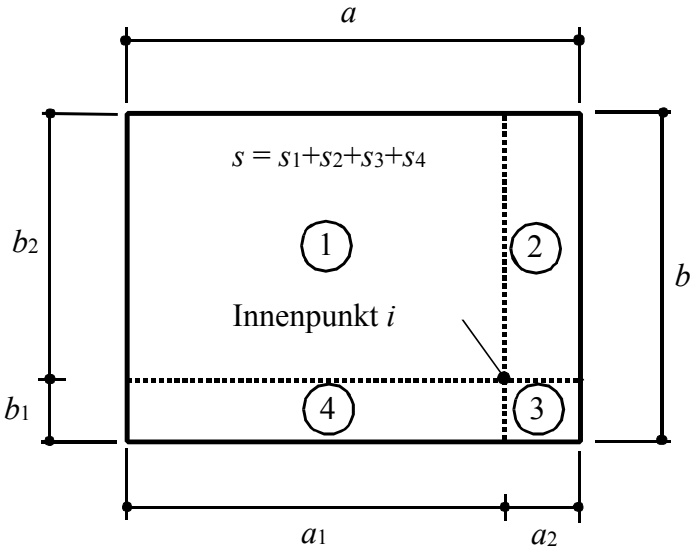


Bild 1.17 Superposition von 4 belasteten Teilflächen zur Berechnung der Setzung an einem Punkt *i* innerhalb der belasteten Lastfläche

Setzung an einem Punkt außerhalb der belasteten Lastfläche

Die Setzung an einem beliebigen Punkt außerhalb der belasteten Lastfläche kann durch Addition und Subtraktion der Ecksetzungen für vier belastete Lastteilflächen erhalten werden, wie im Bild 1.18 gezeigt. Zuerst wird die Setzung s_1 bestimmt, als ob die gesamte Fläche mit Last *q* definiert wird. Dann werden die Setzungen der zwei Ecken der Lastflächen s_2 und s_3 subtrahiert. Zuletzt wird die Setzung s_4 addiert, da sie zweimal in s_2 und s_3 subtrahiert worden ist. Die Setzungsbeiwerte $f^{(l)}$ für eine Schicht *l* an einem Punkt außerhalb der rechteckigen belasteten Lastfläche, wie im Bild 1.18 gezeigt, werden wie folgt berechnet:

$$f^{(l)} = f^{(l)}{}_1 - f^{(l)}{}_2 - f^{(l)}{}_3 - f^{(l)}{}_4 \qquad (1.73)$$

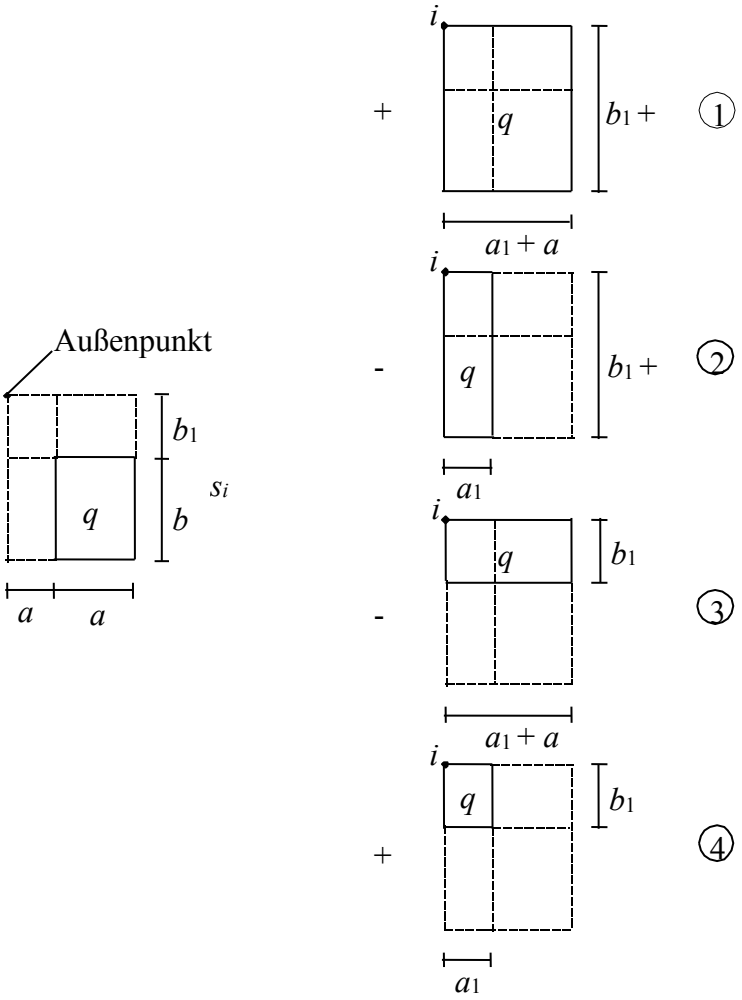
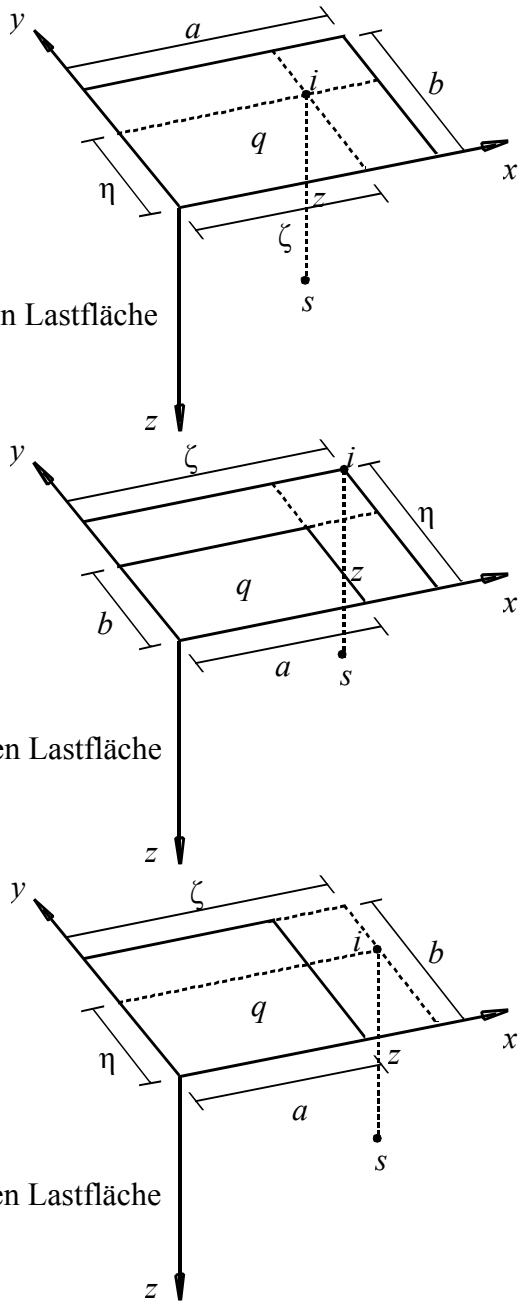


Bild 1.18 Superposition von 4 belasteten Teilflächen zur Berechnung der Setzung an einem Punkt *i* außerhalb der belasteten Lastfläche

Für einen beliebigen Punkt von Koordinaten (*x, y*) innerhalb oder außerhalb der belasteten Lastfläche *a.b*, Bild 1.19, können die Setzungsbeiwerte $f^{(l)}$ nach *Poulos*/ *Davis* (1974) mit Hilfe des Prinzips der Superposition durch die folgende allgemeine Gl. 1.74 erhalten werden:

$$f^{(l)} = f(\zeta,\eta) - f(\zeta - a,\eta) - f(\zeta,\eta - b) + f(\zeta - a,\eta - b) \tag{1.74}$$



a) Punkt *i* liegt innerhalb der belasteten Lastfläche

b) Punkt *i* liegt außerhalb der belasteten Lastfläche

c) Punkt *i* liegt außerhalb der belasteten Lastfläche

Bild 1.19 Superposition von 4 belasteten Teilflächen zur Berechnung der Setzung an einem beliebigen Punkt *i*

Formulierung der Flexibilitätskoeffizienten für elastische Schichten

Berechnung der Setzungen $s_{i,i}$ infolge Eigenlast

Da in der Formel von *Steinbrenner* (1934), die für die Setzungsberechnung verwendet wird, die Lastfläche als schlaff vorausgesetzt wird, das einzelne Plattenfeld für sich jedoch relativ zur Unterlage als starr angesehen werden kann, wird für das belastete Feld selbst der Setzungseinflusswert im kennzeichnenden Punkt berechnet. *Graßhoff* (1955) hat den kennzeichnenden Punkt definiert als jenen geometrischen Ort einer gleichförmig belasteten Gründungsoberfläche, in welchem die Oberflächensetzung infolge dieser Belastung gleich ist der Setzung einer starren Lastfläche der gleichen Form infolge der gleich großen Belastung. Die Eigensetzung einer Teilfläche *i* wird im kennzeichnenden Punkt (0.87 *a* bzw. 0.87 *b*) ermittelt (Bild 1.20).

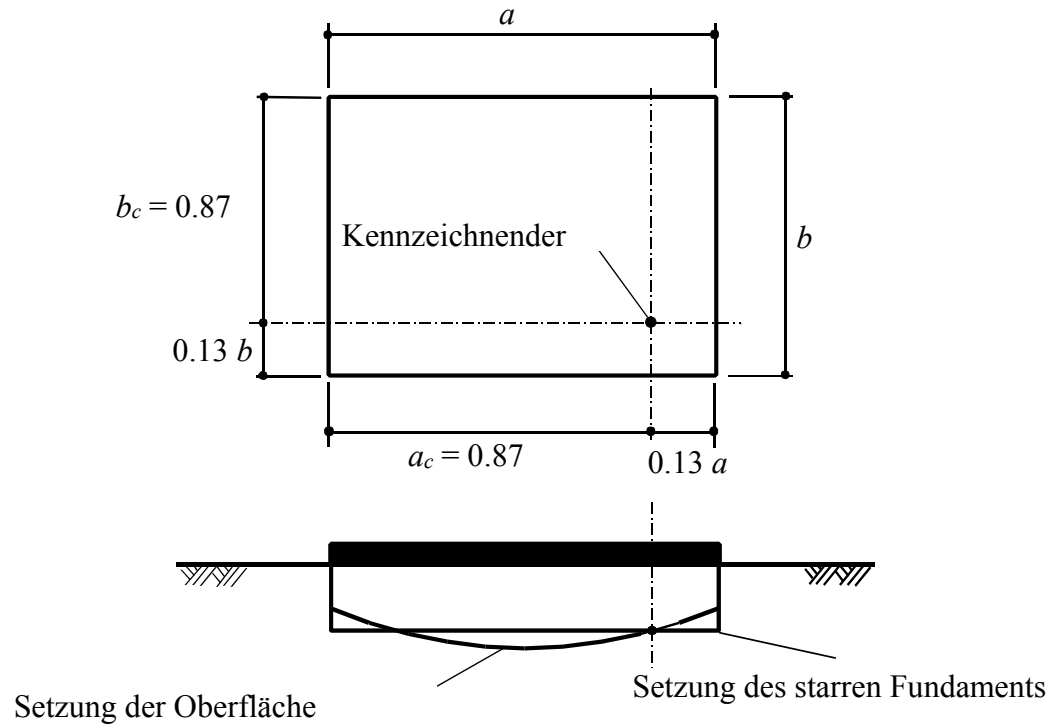


Bild 1.20 Kennzeichnender Punkt der Setzung

Die Setzungen infolge Eigenlast werden im kennzeichnenden Punkt berechnet. Die Einzellast Q_i im Knoten *i* ist zu ersetzen durch eine über eine rechteckförmige Feldfläche mit der Länge a_i und der Breite b_i gleichmäßig verteilte, äquivalente Belastung $q_i = Q_i / (a_i.b_i)$. Bei einem Baugrund, der aus mehreren horizontalen Schichten besteht, kann die Eigensetzung $s_{i,i}$ eines Feldes *i* mit *n* Schichten unterhalb der Sohle demnach dargestellt werden mit der Summengleichung:

$$s_{i,i} = \frac{Q_i}{a_i\, b_i}\left(\frac{f^{(1)}}{E_s^{(1)}} + \sum_{l=2}^{n}\frac{\Delta f^{(l)}}{E_s^{(l)}}\right) \tag{1.75}$$

oder in abgekürzter Schreibweise:

$$s_{i,i} = c_{i,i}\, Q_i \tag{1.76}$$

Das Verhältnis zwischen der Setzung $s_{i,i}$ des Knotens i und der Sohlkraft Q_i an diesem Knoten wird als Flexibilitätskoeffizient $c_{i,i}$ [m/kN] bezeichnet. Die Flexibilitätskoeffizienten $c_{i,i}$ des Mehrschichtensystems, bestehend aus n Schichten, erhält man aus Gl. 1.75, wenn für Q_i die Einheitssohlkraft eingesetzt wird.

$$c_{i,i} = \frac{1}{a_i\, b_i}\left(\frac{f^{(1)}}{E_s^{(1)}} + \sum_{l=2}^{n}\frac{\Delta f^{(l)}}{E_s^{(l)}}\right) \tag{1.77}$$

Berechnung der Setzung $s_{i,k}$ infolge Drucküberschneidung

Durch die Belastung von Nachbarflächen k entsteht in dem zu berechnenden Feld i infolge Drucküberschneidung ein zusätzlicher Setzungsanteil. Dieser zusätzliche Setzungsanteil kann nach der Formel von *Steinbrenner* (1934) durch Überlagerung von Teilflächen erhalten werden.

Formelmäßig kann der Setzungsanteil $s_{i,k}$ des Feldes i, bewirkt durch das Feld k mit Lastfläche $a_k.b_k$ infolge Drucküberschneidung der Einzellast Q_k, für n Schichten angegeben werden (Bild 1.21).

$$s_{i,k} = \frac{Q_k}{a_k\, b_k}\left(\frac{f^{(1)}}{E_s^{(1)}} + \sum_{l=2}^{n}\frac{\Delta f^{(l)}}{E_s^{(l)}}\right) \tag{1.78}$$

Die in der Gl. 1.78 aufgeführten Bezeichnungen ergeben sich in Analogie zu den Bezeichnungen der Gl. 1.75. Die zusätzlich angegebenen Indizes i und k weisen zum einen auf den Ort und zum anderen auf die Ursache hin.

Gl. 1.78 lautet in abgekürzter Schreibweise:

$$s_{i,k} = c_{i,k}\, Q_k \tag{1.79}$$

Das Verhältnis zwischen der Setzung $s_{i,k}$ des Knotens i und der Sohlkraft Q_k am Knoten k wird als Flexibilitätskoeffizient $c_{i,k}$ [m/kN] bezeichnet. Die Flexibilitätskoeffizienten $c_{i,k}$ des Mehrschichtensystems, bestehend aus n Schichten, erhält man aus Gl. 1.78, wenn für Q_k die Einheitssohlkraft eingesetzt wird.

$$c_{i,k} = \frac{1}{a_k\, b_k}\left(\frac{f^{(1)}}{E_s^{(1)}} + \sum_{l=2}^{n}\frac{\Delta f^{(l)}}{E_s^{(l)}}\right) \tag{1.80}$$

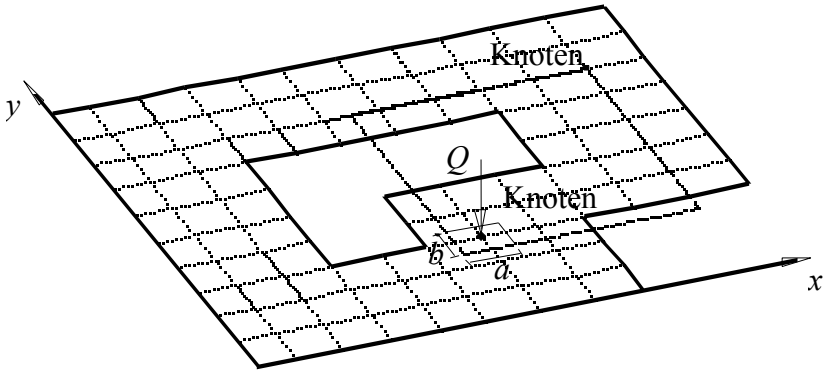


Bild 1.21 Setzung $s_{i,k}$ des Knotens i bei der unter dem k-ten Knotenfeld wirkenden Sohlkraft Q_k

Es ist zu bemerken, dass die Flexibilitätskoeffizienten für das isotrope Halbraum-Modell durch Anwenden des elastische Schichten-Modells erhalten werden können. In diesem Fall muss man die Bodenschicht zu einer Tiefe erweitern, die als eine unendliche Tiefe betrachtet werden kann, z. B. $z \approx 10^{10}$ [m]. Im Programm *ELPLA* ist das elastische Schichten-Modell in den Verfahren 4, 6, 7, 8 und 9 verfügbar, während das isotrope Halbraum-Modell nur im Verfahren 5 verfügbar ist.

Aufstellen der Flexibilitätsmatrix für elastische Schichten

Um die Setzung s_i am Knoten i zu berechnen, wird die Gl. 1.76 für diesen Knoten i angewandt, während die Gl. 1.77 für die anderen Knoten angewandt wird. Dies geschieht mit Berücksichtigung von Sohldrücken unter allen Knoten. Für einen Rasterknoten des FE-Netzes mit n Knoten wird die Setzung s_i am Knoten i unter Verwendung des Superpositionsgesetzes erhalten aus der Gleichung:

$$\begin{aligned} s_i &= s_{i,1} + s_{i,2} + s_{i,3} + \ldots + s_{i,n} \\ &= c_{i,1}\, Q_1 + c_{i,2}\, Q_2 + c_{i,3}\, Q_3 + \ldots + c_{i,n}\, Q_n \end{aligned} \tag{1.81}$$

Gl. 1.81 in Serienform ist:

$$s_i = \sum_{k=1}^{n} c_{i,k}\, Q_k \tag{1.82}$$

Für die gesamte Platte erhält man:

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= c_{1,1}\, Q_1 + c_{1,2}\, Q_2 + c_{1,3}\, Q_3 + \ldots + c_{1,n}\, Q_n \\ s_2 &= c_{2,1}\, Q_1 + c_{2,2}\, Q_2 + c_{2,3}\, Q_3 + \ldots + c_{2,n}\, Q_n \\ s_3 &= c_{3,1}\, Q_1 + c_{3,2}\, Q_2 + c_{3,3}\, Q_3 + \ldots + c_{3,n}\, Q_n \\ &\\ s_n &= c_{n,1}\, Q_1 + c_{n,2}\, Q_2 + c_{n,3}\, Q_3 + \ldots + c_{n,n}\, Q_n \end{aligned}\right\} \tag{1.83}$$

oder in Matrizenform geschrieben:

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \\ \\ \dots \\ s_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & \dots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & \dots & c_{2,n} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & \dots & c_{3,n} \\ & & & & \\ & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & c_{n,3} & \dots & c_{n,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \\ \\ \dots \\ Q_n \end{Bmatrix} \tag{1.84}$$

Gl. 1.84 lautet vereinfacht:

$$\{s\} = [c]\{Q\} \tag{1.85}$$

Dabei bedeutet $\{s\}$ den Setzungsvektor, $[c]$ die Flexibilitätsmatrix des Baugrunds und $\{Q\}$ den Vektor der Sohlkräfte. Gl. 1.85 beschreibt somit die Setzungsmulde, die sich unter der Wirkung der Sohlkräfte einstellt. Bei der Aufstellung der Flexibilitätsmatrix wird sukzessive jeweils ein Bodenknoten mit der Einheitssohlkraft belastet und die daraus resultierenden Setzungseinflüsse auf alle übrigen Knoten und auf den belasteten Knoten selbst ermittelt.

Durch Inversion erhält man die Steifigkeitsmatrix $[k_s] = [c]^{-1}$ für den Baugrund (Gl. 1.86).

$$\{Q\} = [k_s]\{s\} \tag{1.86}$$

Formulierung der Gesamtsteifigkeitsmatrix für das Steifemodulverfahren

Die Fundamentplatte wird unter der Wirkung der äußeren Lasten $\{F\}$ verformt, wobei:

$$\{F\} = \{P\} - \{Q\} \tag{1.87}$$

$\{P\}$ ist der Vektor der bekannten angreifenden Lasten und Momente, die von oben auf die Fundamentplatte drücken und $\{Q\}$ der Vektor der unbekannten Sohldrücke, die von unten auf die Fundamentplatte einwirken.

Daraus folgt die Gleichung des Systems Platte-Baugrund zur Matrizengleichung:

$$[k_p]\ \{\delta\} = \{P\} - \{Q\} \tag{1.88}$$

Fasst man alle Knoten zusammen und setzt Gl. 1.86 in die Gl. 1.88 ein, so kann man folgendes Gleichungssystem für das Fundament aufstellen:

$$[k_p]\ \{\delta\} = \{P\} - [k_s]\ \{s\} \tag{1.89}$$

Betrachtet man die Kompatibilität der Verschiebung zwischen der Platte und dem Baugrund, wobei die Setzungsmulde des Baugrunds s_i der Biegelinie der Platte w_i entspricht, so lautet die Gl. 1.90:

$$\left[\left[k_p\right]+\left[k_s\right]\right]\{\delta\}=\{P\} \tag{1.90}$$

Gl. 1.90 zeigt, dass die Gesamtsteifigkeitsmatrix des Systems Platte-Baugrund die Summe der Steifigkeitsmatrix der Platte $[k_p]$ und der Steifigkeitsmatrix des Baugrunds $[k_s]$ ist.

Es ist zu bemerken, dass die Matrix $[k_s]$ nicht mit der Matrix $[k_p]$ kompatibel ist, weil sich die Freiheitsgrade in der Gl. 1.86 von denen der Gl. 1.88 unterscheiden. Um dieses Problem zu überwinden, kann die Gl. 1.86 durch Erweitern der Zeile und Spalte der Matrix $[k_s]$ auf dieselbe Orientierung wie die Matrix $[k_p]$ behandelt werden. Damit kann die Operation von Matrixgleichungen akzeptiert werden.

Lösung des Gleichungssystems für das Steifemodulverfahren

Es ist zu bemerken, dass die Steifigkeitsmatrix für die Platte $[k_p]$ eine Bandmatrix und die Steifigkeitsmatrix für den Baugrund $[k_s]$ eine vollbesetzte unsymmetrische Matrix bei dem Steifemodulverfahren 7 aufweist. Die daraus resultierende Matrix ist auch eine vollbesetzte unsymmetrische Matrix.

Das Gleichungssystem 1.90 kann nach dem Iterationsverfahren (Verfahren 6) von *El Gendy* (1998) oder mit dem *Gauß*schen Eliminationsalgorithmus (Verfahren 7) gelöst werden. Da die Gesamtsteifigkeitsmatrix eine vollbesetzte symmetrische Matrix ist, braucht die Lösung des Gleichungssystems 1.12 längere Rechenzeit bei Anwendung des *Gauß*schen Eliminationsalgorithmus.

Die unbekannten Variablen sind die Knotenverschiebungen w_i ($w_i = s_i$) und die Knotenverdrehungen θ_{xi} und θ_{yi} um die x- und y- Achse. Nach dem Lösen des Systems der linearen Gl. 1.90 setzt man die erhaltenen Setzungen s_i in Gl. 1.86 ein und erhält die unbekannten Sohlkräfte Q_i.

1.2.7 Steifemodulverfahren für die starre Platte auf dem beliebig geschichteten Baugrund (Verfahren 8 - elastische Schichten - Kontinuum-Modell)

Allgemeines

In vielen praktischen Fällen ist die Fundamentplatte im Vergleich zur Länge sehr dick, also praktisch starr. Zur Berechnung von starren unendlich langen Fundamentstreifen gibt es eine Reihe von brauchbaren Rechenverfahren.

Eine Übersicht über die Literatur befindet sich in den Normblättern *DIN* 4018 und *DIN* 4019 und in vielen Lehr- und Handbüchern, z.B. *Graßhoff/ Kany* (1997), *Kézdi* (1964), *Szechy* (1965), *Selvadurai* (1979). Einige Verfahren gestatten neben der bekannten *Boussinesq*schen Annahme eines unendlichen Halbraums auch die Berücksichtigung eines horizontal geschichteten Baugrunds (*Matl* (1954), *Kany* (1959), (1973)). Seltener sind Rechenverfahren zu finden, mit denen die Sohldrücke, Setzungen und Verkantungen von Fundamentstreifen bestimmt werden können.

Es gibt auch Lösungen, um Sohldrücke, Setzungen und Verkantungen starrer Rechteckfundamente auf beliebig horizontal geschichtetem Baugrund mit Hilfe von Kurventafeln und Tabellen bestimmen zu können (*Kany* (1963), (1974)). Damit ist es jetzt nicht mehr notwendig, die Setzung zentrisch belasteter Rechteckfundamente für den kennzeichnenden Punkt als Näherung zu berechnen.

Ableitungen

Wenn das Sohlfundament starr ist, treten bei der Verwendung der Berechnungsmodelle und Verfahren 2 bis 7 numerische Probleme bei der Lösung der Gleichungssysteme auf. Deshalb werden in diesem Abschnitt spezielle Lösungen zur Berechnung starrer Fundamentsysteme nach dem Steifemodulverfahren von *Kany* (1974) entwickelt. Diese Lösung kann auch benutzt werden, um die Setzungen und Verkantungen von Platten mit unregelmäßigen Grundrissen zu berechnen. Es ist auch möglich, bei dem dreidimensionalen Kontinuum-Modell unregelmäßige Schichtenverläufe zu berücksichtigen.

Es wird angenommen, dass die Sohldruckverteilung q_i [kN/m^2] durch eine Reihe von äquivalenten Lasten Q_i [kN] ($Q_i = q_i..a_i..b_i$) an den verschiedenen Knotenpunkten gemäß Bild 1.22 ersetzt wird. Dabei sind $a_i.b_i$ [m^2] die Abmessungen der Feldknoten.

Es gibt zwei Möglichkeiten, um bei horizontal geschichtetem Baugrund die Plattensetzungen zu bestimmen.

- Wenn keine Momente infolge exzentrischer Belastungen vorhanden sind, treten an allen Stellen der Platte gleiche Setzungen w_o auf

- Wenn Momente einwirken, rotiert die Platte als starrer Körper. Es entstehen Setzungsdifferenzen zwischen den Plattenpunkten. Alle Setzungspunkte liegen aber auf einer Verbindungsgeraden

Bei völlig unsymmetrischer äußerer Belastung sind die Sohlkräfte Q_1 bis Q_n, die Setzung w_o des

Plattenmittelpunktes und die Verdrehung θ_{xo} und $\theta_{y\,o}$ der Platte um die *x*- und *y*- Achse die Unbekannten.

Die $n + 3$ Unbekannten ergeben sich aus *n* Gleichungen für die Setzungen und den 3 Gleichungen für die lotrechten Lasten (ΣF), Momente (ΣM_x) um die *x*- Achse und Momente (ΣM_y) um die *y*-Achse.

Formulierung der starren Platte auf geschichtetem Baugrund

Summengleichungen der Setzungen

Von jedem Knoten *i* werden zuerst mit den zunächst noch unbekannten Sohldrücken Q_i die Summengleichungen der Setzungen s_i aufgestellt:

$$\begin{aligned} s_i &= s_{i,1} + s_{i,2} + s_{i,3} + \ldots + s_{i,n} \\ &= c_{i,1}\,Q_1 + c_{i,2}\,Q_2 + c_{i,3}\,Q_3 + \ldots + c_{i,n}\,Q_n \end{aligned} \tag{1.91}$$

Gl. 1.91 in Serienform ist:

$$s_i = \sum_{k=1}^{n} c_{i,k}\,Q_k \tag{1.92}$$

wobei:

$c_{i,k}$ Setzungseinflusszahlen, die Setzung des Knotens *i* bei der um den *k*-ten Knoten wirkenden Sohlpressung $Q_k = 1$

s_i Setzung im Knoten *i*

Summengleichungen der Setzungen für die gesamte Platte:

$$\left.\begin{array}{rcccccccccc} s_1 &=& c_{1,1}\,Q_1 &+& c_{1,2}\,Q_2 &+& c_{1,3}\,Q_3 &+& \ldots &+& c_{1,n}\,Q_n \\ s_2 &=& c_{2,1}\,Q_1 &+& c_{2,2}\,Q_2 &+& c_{2,3}\,Q_3 &+& \ldots &+& c_{2,n}\,Q_n \\ s_3 &=& c_{3,1}\,Q_1 &+& c_{3,2}\,Q_2 &+& c_{3,3}\,Q_3 &+& \ldots &+& c_{3,n}\,Q_n \\ & & & & & & & & & & \\ s_n &=& c_{n,1}\,Q_1 &+& c_{n,2}\,Q_2 &+& c_{n,3}\,Q_3 &+& \ldots &+& c_{n,n}\,Q_n \end{array}\right\} \tag{1.93}$$

oder in Matrizenform geschrieben:

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \\ \\ \dots \\ s_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & \dots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & \dots & c_{2,n} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & \dots & c_{3,n} \\ & & & & \\ & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & c_{n,3} & \dots & c_{n,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \\ \\ \dots \\ Q_n \end{Bmatrix} \tag{1.94}$$

Gl. 1.94 lautet vereinfacht:

$$\{s\} = [c]\{Q\} \tag{1.95}$$

wobei $[c]$ die Flexibilitätsmatrix des Baugrunds bedeutet. Durch Inversion erhält man die Steifigkeitsmatrix $[k_s] = [c]^{-1}$ für den Baugrund (Gl. 1.96).

$$\{Q\} = [k_s]\{s\} \tag{1.96}$$

wobei:
$\{s\}$ Vektor der Setzung der Platte
$[c]$ Flexibilitätsmatrix der Platte
$\{Q\}$ Vektor des Sohldrucks der Platte
$[k_s]$ Steifigkeitsmatrix für den Baugrund

Setzung w_o des Plattenmittelpunkts und die Verdrehung θ_{xo} und θ_{yo}

Bei der starren Platte bestehen zwischen den Setzungen s_i der Knoten i mit den Koordinaten (x_i, y_i) vom Geometrieflächenschwerpunkt folgende geometrischen Beziehungen:

$$s_i = w_o + x_i \tan\theta_y + y_i \tan\theta_x \tag{1.97}$$

wobei:
w_o lotrechte Setzung (oder Hebung) der Platte im Koordinatenursprung der Platte
θ_x Neigungswinkel der Platte um die x- Achse
θ_y Neigungswinkel der Platte um die y- Achse

Gl. 1.97 in Matrizenform für die gesamte Platte geschrieben:

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \\ \\ \dots \\ s_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ & & \\ & & \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_o \\ \tan\theta_y \\ \tan\theta_x \end{Bmatrix} \tag{1.98}$$

Gl. 1.98 wird vereinfacht zu:

$$\{s\} = [X]^T \{\Delta\} \tag{1.99}$$

wobei:
$\{\Delta\}$ Vektor der Verformung der Platte aus w_o, tan θ_y und tan θ_x
$[X]^T$ Geometrische Matrix der Platte mit den Koordinaten x und y

Darin sind w_o, tan θ_{xo} und tan θ_{yo} für die Platte Festwerte, deren Bedeutung aus Bild 1.22 hervorgeht. w_o ist die Ordinate der Setzungsebene im Koordinatenursprung und tan θ_{xo} bzw. tan θ_{yo} sind die Neigungen der Spur der Setzungsebene unter den Achsen y und x.

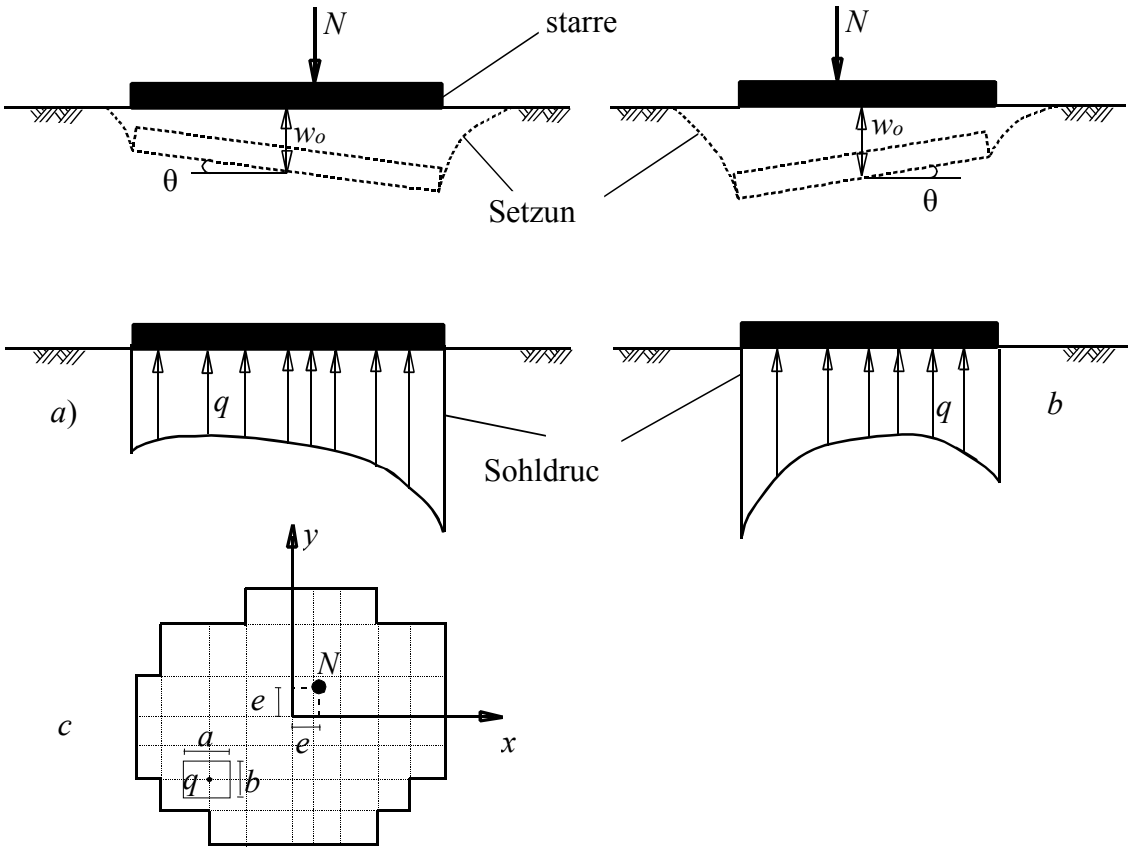


Bild 1.22 Sohldruckverteilung und Setzung unter der starren Platte auf zusammendrückbarem Baugrund
a) Schnitt parallel zur *x*- Richtung
b) Schnitt parallel zur *y*- Richtung
c) Grundriss

Gleichgewicht der lotrechten Kräfte

Nimmt man ferner an, dass die Resultierende N aller Sohlkräfte Q_i gemäß Bild 1.22 die Lage x_N, y_N in Bezug auf das Koordinatensystem x, y hat, so ergeben sich folgende Gleichgewichtsbedingungen für die lotrechten Kräfte und Momente:

Die Summe der lotrechten Kräfte Q muss null sein:

$$N = Q_1 + Q_2 + Q_3 + ... + Q_n \tag{1.100}$$

Gleichgewicht der Momente

Die Summe der Momente ΣM_y um die y- Achse muss null sein:

$$N\, e_x = Q_1\, x_1 + Q_2\, x_2 + Q_3\, x_3 + ... + Q_n\, x_n \tag{1.101}$$

Die Summe der Momente ΣM_x um die x- Achse muss null sein:

$$N\, e_y = Q_1\, y_1 + Q_2\, y_2 + Q_3\, y_3 + ... + Q_n\, y_n \tag{1.102}$$

oder Gleichgewicht der Kräfte und Momente in Matrizenform geschrieben:

$$\begin{Bmatrix} N \\ N\, e_x \\ N\, e_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & ... & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & ... & y_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \\ \\ ... \\ Q_n \end{Bmatrix} \tag{1.103}$$

Gl. 1.103 wird vereinfacht zu:

$$\{N\} = [X]\{Q\} \tag{1.104}$$

Dabei ist $\{N\}$ Vektor der resultierenden Kräfte und Momente auf dem Fundament.

Die 3 + n Gln. 1.96, 1.99 und 1.104 stellen somit ein lineares Gleichungssystem dar. Unbekannt sind die geometrischen Werte w_o, tan θ_{xo} und tan $\theta_{y.o}$ sowie die Sohlkräfte Q_1 bis Q_n, also insgesamt 3 + n Werte. Setzt man die Gln. 1.96 und 1.99 in Gl. 1.104 ein, erhält man:

$$\{N\} = [X]\{k_s\}[X]^T\,\{\Delta\} \tag{1.105}$$

Durch Lösung dieser Gl. 1.105 ergeben sich w_o, tan θ_{xo} und tan $\theta_{y.o}$ Mit diesen Werten ergibt sich aus den Gln. 1.96 und 1.99 folgende Gleichung zur Bestimmung der n Unbekannten Q_1 bis Q_n.

$$\{Q\} = \{k_s\}[X]^T\,\{\Delta\} \tag{1.106}$$

Setzt man auch die Werte w_o, tan θ_{xo} und tan $\theta_{y.o}$ in Gl. 1.96 ein, so erhält man die Setzungen w_1 bis w_n.

Fall gleichförmiger Setzung

Für eine Platte ohne Momente oder ohne Exzentrizität über beide Achsen wird die Setzung gleichförmig ($s_i = w_o$) sein und die Platte rotiert nicht ($\theta_{xo} = \theta_{yo} = 0$). Deshalb reduzieren sich die Unbekannten des Problems zu n Sohldrücken q_i und die Setzungen des Plattenmittelpunktes w_o.

Ableitung der gleichförmigen Setzung w_o

Die Ableitung der gleichförmigen Setzung für die starre Platte kann durch Gleichsetzen der Setzung s_i bei gleichförmiger Setzung w_o für alle Knoten in Gl. 1.96 durchgeführt werden. In diesem Fall können die Sohlkräfte als eine Funktion der Koeffizienten $k_{i,j}$ der Baugrundsteifigkeitsmatrix wie folgt neu geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= k_{1,1}\,w_o + k_{1,2}\,w_o + k_{1,3}\,w_o + \ldots + k_{1,n}\,w_o \\ Q_2 &= k_{2,1}\,w_o + k_{2,2}\,w_o + k_{2,3}\,w_o + \ldots + k_{2,n}\,w_o \\ Q_3 &= k_{3,1}\,w_o + k_{3,2}\,w_o + k_{3,3}\,w_o + \ldots + k_{3,n}\,w_o \\ &\\ Q_n &= k_{n,1}\,w_o + k_{n,2}\,w_o + k_{n,3}\,w_o + \ldots + k_{n,n}\,w_o \end{aligned}\right\} \qquad (1.107)$$

Durchführen der Summe aller Sohldrücke:

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = w_o \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_{i,j} \qquad (1.108)$$

Man kann die Setzung des Plattenmittelpunktes w_o, die zur Setzung s_i an allen Knoten gleich ist, wie folgt erhalten:

$$w_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_{i,j}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_{i,j}} \qquad (1.109)$$

Setzt man diese Werte w_o in der Gl. 1.107 ein, so erhält man die n unbekannten Sohlkräfte Q_i.

Es ist zu bemerken, dass die Gl. 1.109 zur Gl. 1.11 analog für das Bettungsmodulverfahren ist. Deshalb kann die Summe der Koeffizienten $k_{i,j}$ ($= N/w_o$) verwendet werden, um den Bettungsmodul k_s zu bestimmen.

1.2.8 Steifemodulverfahren für die schlaffe Sohlfläche für den beliebig geschichteten Baugrund (Verfahren 9 - elastische Schichten - Kontinuum-Modell)

Neben der Möglichkeit zur Berechnung von elastischen und starren Platten mit dem Programm *ELPLA* lässt sich der beschriebene Algorithmus auch zur Berechnung von Setzungen einer schlaffen Sohlfläche verwenden. Es können die Spannungen sowie die Setzungen infolge von schlaffen Lasten (Flächenlasten, Linienlasten und Einzellasten) auf der Sohlfläche nach dem Steifemodulverfahren ermittelt werden. In diesem Fall wird die Steifigkeit der Platte nicht berücksichtigt.

Wenn die Platte völlig schlaff (wie ein Damm) ist, wird die Belastung auf der Sohlfläche gleich der Sohlpressung auf dem Baugrund sein. Für den Satz von Rasterknoten der Platte sind die Bodensetzungen (Bild 1.23):

$$\{s\} = [c]\{Q\} \tag{1.110}$$

Wenn die Platte Einzellasten trägt, kann es sein, dass die Gl. 1.110 nicht in der Lage ist, die senkrechte Spannung an einem Punkt unter der Einzellast zu bestimmen. In diesem Fall kann die Systemgleichung der elastischen Lösung verwendet werden, um die schlaffe Sohlfläche zu simulieren. Dies erfolgt durch die Annahme, dass eine sehr kleine Steifigkeit der Platte D dazu tendiert, auf Null zu stehen (Gl. 1.111). Zur Elimination der Steifigkeitsmatrix der Platte in Gl. 1.90 ohne numerische Probleme bei der Lösung der Gleichungssysteme 1.90 wird das gleiche System (Lasten, Netz, Baugrund, ...) wie bei Berechnung einer Bodenplatte mit Plattensteifigkeit

$$D = \frac{E_b\, d^3}{12\,(1 - \nu_b^{\,2})} \cong 0 \tag{1.111}$$

fast null (z.B. $E_b = 1 \times 10^{-8}$) gerechnet.

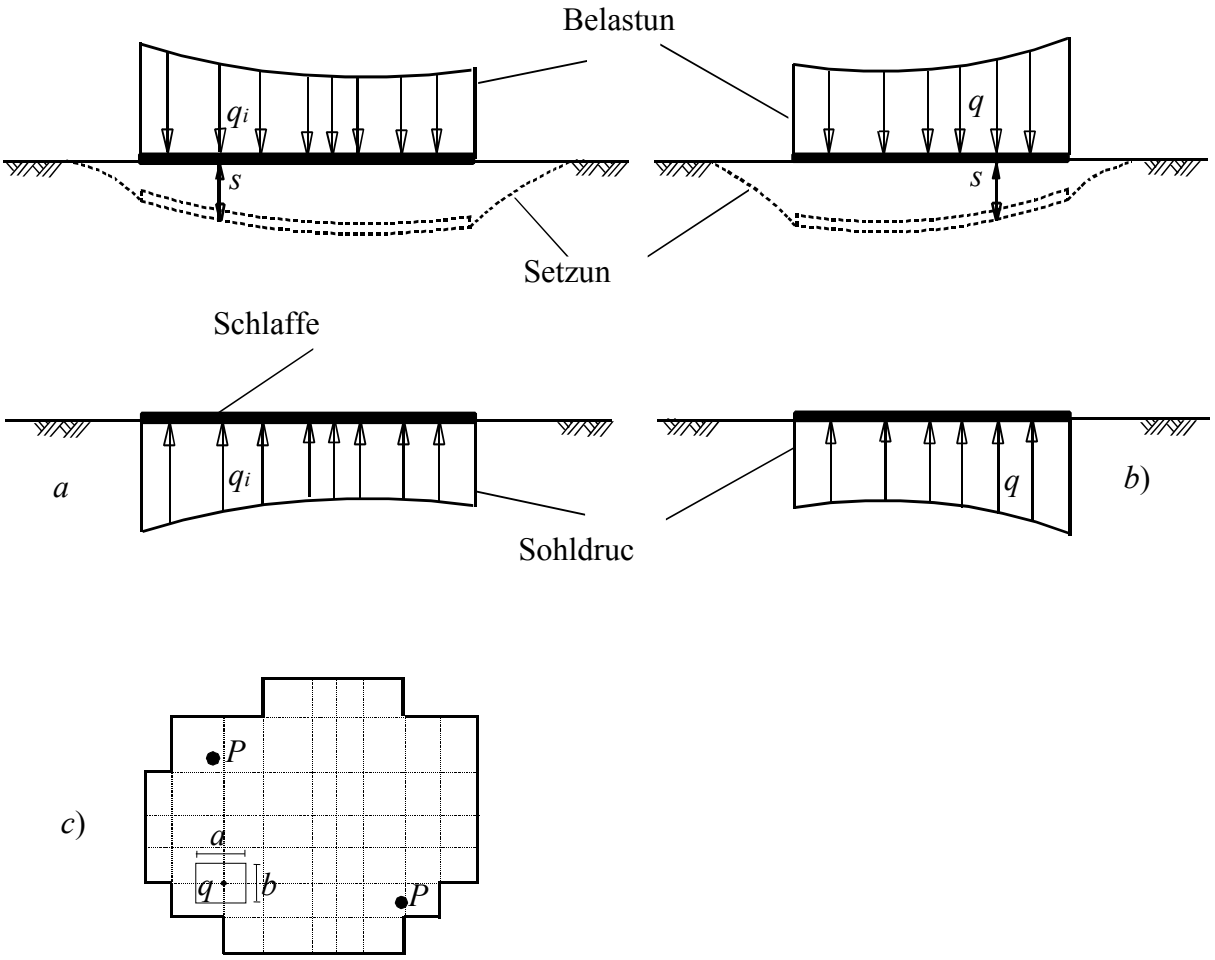


Bild 1.23 Sohldruckverteilung und Setzung unter der schlaffen Sohlfläche auf dem geschichteten Baugrund
a) Schnitt parallel zur *x*- Richtung
b) Schnitt parallel zur *y*- Richtung
c) Grundriss

1.3 Vorbereitende Berechnungen

1.3.1 Bestimmung der Vorbelastung q_v

Für die elektronische Berechnung der Setzungen werden einige Zwischenwerte gebraucht, die zunächst zu bestimmen sind. Die Vorbelastung q_v [kN/m^2] der Sohle durch die beim Baugrubenaushub beseitigte Erdauflast ergibt sich aus den Wichten γ_i der über der Gründungssohle liegenden $n_{z.F}$ Schichten und der Schichtdicken h_i nach der Formel:

$$q_v = \sum_{i=1}^{i=n_{z.F}} (\gamma_i \, h_i) \tag{1.112}$$

Daraus ergibt sich auch die mittlere Wichte γ_F des Bodens über der Gründungssohle als gewogenes Mittel im Bereich von der ursprünglichen Geländehöhe bis zur Tiefe t_F unter Gelände aus folgender Formel:

$$\gamma_i = \frac{q_v}{t_F} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n_{z.F}} (\gamma_i \, h_i)}{t_F} \tag{1.113}$$

1.3.2 Bestimmung des wirksamen mittleren Sohldrucks q_o

Es wird unterschieden, ob die Fundamentsohle über oder unter dem Grundwasserspiegel liegt.

a) Elementsohle liegt über dem Grundwasserspiegel

Bei Plattenknoten ohne Grundwasserdruck wird der mittlere Sohldruck q_o [kN/m^2] aus der Gesamtbelastung P = Auflast P_A + Fundamentgewicht P_E bestimmt.

$$q_o = \frac{P_A + P_E}{A_P} = \frac{P}{A_P} \tag{1.114}$$

Der um die geologische Vorbelastung (Wiederbelastung)

$$q_v = \gamma_F \, t_F \tag{1.115}$$

abgeminderte Sohldruck ist dann die Erstbelastung

$$q_E = q_o - q_v \tag{1.116}$$

Dabei wird mit Gl. 1.116 auch der Einfluss der Vorbelastung $q_v = \gamma \, . \, t_F$ des Baugrunds berücksichtigt. Diese Vorbelastung des Baugrunds ist fast immer vorhanden, wenn die Sohle des Fundaments in der Tiefe t_F unter der ursprünglichen, also vor Baugrubenaushub vorhandenen Geländehöhe liegt.

Ist die Vorbelastung nicht vorhanden, gilt:

$$q_E = q_o \tag{1.117}$$

Hierin bedeuten:

q_o	Sohlpressung der Fundamentsohle	[kN/m^2]
q_v	Vorbelastung der Fundamentsohle	[kN/m^2]
q_E	Erstbelastung der Fundamentsohle	[kN/m^2]
q_w	Grundwasserdruck auf die Fundamentsohle	[kN/m^2]
P	Gesamtbelastung in der Fundamentsohle (einschl. Fundamentgewicht)	[kN]
P_A	Auflast auf das Fundament	[kN]
P_E	Eigengewicht des Fundaments	[kN]
A_p	Grundfläche des Fundaments	[m^2]
t_F	Gründungstiefe (Tiefe der Gründungssohle unter der ursprünglichen Geländehöhe)	[m]
γ_i	Wichte des Bodens über der Gründungssohle	[kN/m^3]

b) Elementsohle liegt unter dem Grundwasserspiegel

Bei Plattenelementen, deren Sohle (Tiefe t_F [m] unter Gelände) unter dem Grundwasserspiegel (Tiefe t_W [m] unter Gelände) liegt, wird infolge Auftriebs P_W der Einfluss des Grundwassers auf die Sohle (Fläche A_p) als Gegendruck q_w (Entlastung des Baugrunds) berücksichtigt:

$$q_W = \frac{P_W}{A_P} = (t_F - t_W)\,\gamma_i \tag{1.118}$$

Anstelle der Gl. 1.116 wird nun die Gl. 1.119 gesetzt:

$$q_E = q_o - q_W - q_v \tag{1.119}$$

1.3.3 Bestimmung des Fundamentgewichts P_E

Da sich mit den Elementabmessungen a_i, b_i oder der Einbindetiefe t_E auch das Eigengewicht P_E des Fundaments verändert, kann P_E automatisch berechnet werden. Dabei werden näherungsweise blockförmige Fundamente mit der Grundfläche A_p, der Dicke $d = t_E$ und der Betonwichte γ_b [kN/m^3] des Fundamentbetons zugrunde gelegt.

Dann ergibt sich das Fundamentgewicht P_E:

$$P_E = \sum_{i=1}^{i=n} a_i\, b_i\, d_i\, \gamma_b \tag{1.120}$$

Hierbei bedeuten:

γ_b	Wichte des Fundamentbaustoffs (z.B. 25)	[kN/m^3]
t_F	Gründungstiefe der Sohle unter Gelände $t_F = t_E + t_K$	[m]
t_E	Einbindetiefe des Fundaments unter der Sohle (= Fundamentdicke)	[m]
t_K	Kellertiefe (= Tiefe der Fundamentoberkante unter Gelände)	[m]

Wird bei den Daten $\gamma_b = 0$ eingegeben, so ist das Fundamentgewicht $P_E = 0$ (in Lastangaben, bezogen auf die Fundamentsohle).

1.3.4 Bilineares Verformungsverhalten des Baugrunds

Allgemeines

In Bild 1.24 ist das allgemeine, im Bereich außerhalb der Bruchgrenze q_{ult} liegende, bilineare Verhalten des Baugrunds dargestellt.

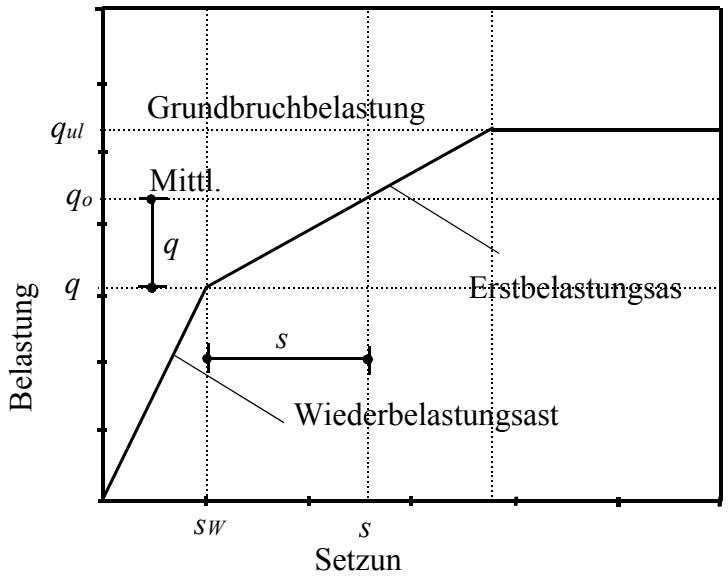


Bild 1.24 Last-Setzungs-Diagramm, bilineares Verformungsverhalten

Nach Erreichen der in der Fundamentsohle vor Baugrubenaushub vorhandenen Belastung q_v verformt sich der Baugrund bei gleichem Druck q stärker (Steifemodul E_s für Erstbelastung) als vor Überschreiten der Vorbelastung q_v (Steifemodul W_s für Wiederbelastung).

Deshalb wird die Drucksetzungslinie (Bild 1.24) in 2 lineare Bereiche eingeteilt und die Setzung aus 2 Anteilen bestimmt:

$$s_i = s_{W\,i} + s_{E\,i} \tag{1.121}$$

Gl. 1.121 für die gesamte Platte in Matrixform ist:

$$\{s\} = \{s_W\} + \{s_E\} \tag{1.122}$$

Bei der Berechnung der Setzungen s_i infolge Belastung q_i ist:

$$q_{o\,i} = q_{v\,i} + q_{E\,i} \tag{1.123}$$

Gl. 1.104 für die gesamte Platte in Matrixform ist:

$$\{Q\} = \{Q_v\} + \{Q_E\} \tag{1.124}$$

Die Setzungseinflusszahlen werden aus diesen Setzungen mit der mittleren Sohlpressung q_o der Gründungsplatte ermittelt.

wobei:

$s_{i.E}$	Setzung des Knotens *i* infolge Erstbelastung des Baugrunds (Steifemodul E_s)	[m]
$s_{i.W}$	Setzung des Knotens *i* infolge Wiederbelastung des Baugrunds (Steifemodul E_W)	[m]
s_i	Gesamtsetzung des Knotens *i*	[m]
$\{s_E\}$	Vektor der Setzung infolge Erstbelastung des Baugrunds	
$\{s_W\}$	Vektor der Setzung infolge Wiederbelastung des Baugrunds	
$\{s\}$	Vektor der Gesamtsetzung	
$\{Q_E\}$	Vektor des Sohldrucks infolge Erstbelastung des Baugrunds	
$\{Q_v\}$	Vektor des Sohldrucks infolge Wiederbelastung des Baugrunds	
$\{Q\}$	Vektor des Gesamtsohldrucks	

Bei der Berechnung der Setzungen *s* sind drei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: Vorbelastung $q_v = 0$ und Bodenpressung $q_E = q_o$
(keine Vorbelastung)

Dieser Fall tritt ein, wenn die Kellertiefe $t_K = 0$ und die Einbindetiefe $t_E = 0$ ist. Hier ergeben sich die Setzungen *s* allein aus den Verformungen s_E infolge Erstbelastung E_s:

$$\{s\} = \{s_E\} = [c_E]\{Q\} \tag{1.125}$$

durch Inversion $[c_E]$ erhält man:

$$\{Q\} = \{Q_E\} = [k_{s\,E}]\{s\} \tag{1.126}$$

Dann wird die Plattengleichung in Matrixform wie folgt erhalten:

$$\left[[k_p] + [k_{s\,E}]\right]\{\delta\} = \{P\} \tag{1.127}$$

wobei $[c_E]$ die Flexibilitätsmatrix infolge Erstbelastung des Baugrunds bedeutet. Durch Inversion erhält man die Steifigkeitsmatrix $[k_{s.E}] = [c_E]^{-1}$ für den Baugrund infolge Erstbelastung.

Fall 2: Vorbelastung $q_v \neq 0$, Bodenpressung $q_E \leq 0$
(keine Erstbelastung, weil Entlastung ≥ Gesamtbelastung)

Damit ergeben sich die Setzungen *w* allein aus den Verformungen s_W infolge Wiederbelastung W_s:

$$\{s\} = \{s_W\} = [c_W]\{Q\} \tag{1.128}$$

durch Inversion $[c_W]$ erhält man:

$$\{Q\} = \{Q_v\} = [k_{s\,W}]\{s\} \tag{1.129}$$

Dann wird die Plattengleichung infolge bilinearem Verformungsverhaltens des Baugrunds in einer Matrixform wie folgt erhalten:

$$\left[[k_p] + [k_{s\,W}]\right]\{\delta\} = \{P\} \tag{1.130}$$

wobei $[c_W]$ die Flexibilitätsmatrix infolge Wiederbelastung des Baugrunds bedeutet. Durch Inversion erhält man die Steifigkeitsmatrix $[k_{sW}] = [c_W]^{-1}$ für den Baugrund infolge Wiederbelastung.

Fall 3: Vorbelastung $q_v \neq 0$ und Bodenpressung $q_E > 0$ (Allgemeinfall: Erst- und Wiederbelastung)

Hier ist für die Berechnung der Setzungen s_W infolge Wiederbelastung die Spannung q_v und für die Berechnung der Setzungen s_E infolge Erstbelastung die Spannung q_E maßgebend. Dann ist also die Gesamtsetzung s:

$$\{s\} = [c_W]\{Q_v\} + [c_E]\{Q_E\} \tag{1.131}$$

durch Inversion $[c_E]$ erhält man:

$$[k_{sE}]\{s\} = [k_{sE}][c_W]\{Q_v\} + \{Q_E\} \tag{1.132}$$

Dann wird die Plattengleichung infolge bilinearen Verformungsverhaltens des Baugrunds in einer Matrixform wie folgt erhalten:

$$\left[[k_p] + [k_{sW}]\right]\{\delta\} = \{P\} + [[k_{sE}][c_W] - [I]]\{Q_v\} \tag{1.133}$$

1.3.5 Bestimmung der Grenztiefe z_g des Setzungseinflusses

Durch Setzungsbeobachtungen an Grundpegeln und in der Fundamentsohle von Bauwerken wurde festgestellt, dass von einer gewissen Tiefe z_g unter dem Bauwerk trotz vorhandener Zusatzspannungen im Untergrund keine Verformungen mehr auftreten (*DIN*-Normen). Um diese Tiefe zu erfassen, gibt es 2 verschiedene Kriterien:

a) Die Grenztiefe z_g des Setzungseinflusses ist abhängig von der Breite B des Bauwerks:

$$z_g = c_s \, B \tag{1.134}$$

Früher wurde der Wert $c_s = 2$ angenommen. Dieses Kriterium erfasst aber nicht die Bauwerkslast und wird heute nur noch selten benutzt.

b) Die Grenztiefe z_g des Setzungseinflusses ist abhängig von dem Verhältnis:

$$c_s = \frac{\sigma_z}{\sigma_{z\gamma}} \tag{1.135}$$

Hierin bedeuten:

c_s	Grenztiefenverhältnis	[-]
σ_z	Zusatzspannung (Erstbelastung) infolge Bauwerkslast	[kN/m^2]
$\sigma_{z\gamma}$	Vorbelastung des Bodens in der Tiefe z	[kN/m^2]

Dieses Kriterium ist erstmalig in den Vorschriften der Sowjetischen Norm eingeführt, später aber auch in den *DIN*-Normen und Empfehlungen *EVB* (1993), wobei als Grenztiefe z_g die Tiefe angenommen wird, in der der Wert c_s = 0.2 erreicht wird. Untersuchungen von *Amman*/ *Breth* (1972) zeigen aber, dass der Wert bis auf c_s = 0.8 ansteigen kann. Das gilt besonders bei hoch vorbelasteten und grobkörnigen Böden. In *DIN* 4019 Teil 1 wird c_s = 0.2 empfohlen.

Rechenverfahren

Das Verfahren a) kann der Benutzer schon bei der Dateneingabe berücksichtigen. Von den angegebenen Kriterien a) und b) wird das zweite Verfahren auf Wunsch des Benutzers im Programm *ELPLA* verwendet. Hierzu wird mit den Daten das Grenztiefenverhältnis $0 < c_s < 1$ eingegeben.

Iteratives Rechenverfahren

Zunächst werden die Vorbelastungen $\sigma_{z.\gamma}$ in verschiedenen Tiefen und dann die Zusatzspannungen σ_z unter dem zu berechnenden Fundament bestimmt. Ist die Grenztiefe erreicht, wird die Iteration abgebrochen.

Die Zusatzspannung σ_z in der Tiefe z der Schicht i ergibt sich mit Bild 1.25 wie folgt:

$$\sigma_z = \sigma_{z\,E} + \sum \sigma_{z\,k\,E} \tag{1.136}$$

Die geologische Vorbelastung des Bodens $\sigma_{z.\gamma}$ in der Tiefe z ergibt sich als Summe:

$$\sigma_{z\,\gamma} = \sum_{i=i_z}^{n_z} \gamma_i \, h_i \tag{1.137}$$

Mit diesen Werten ist gemäß Gl. 1.135 das Spannungsverhältnis:

$$c_s \text{ vorh} = \frac{\sigma_z}{\sigma_{z\,\gamma}} \tag{1.138}$$

Die Berechnung erfolgt schrittweise nach unten, wobei die Schrittweite d_z angegeben werden muss. Empfohlen wird $D_Z = B/10$. Der endgültige Grenztiefenwert z_g wird aus den beiden untersten Rechenwerten durch lineare Interpolation errechnet.

$$z_g = z_o + (c_s - c_o)\,\frac{z_u - z_o}{c_u - c_o} \tag{1.139}$$

Hierin bedeuten:

c_s Grenztiefenverhältnis = Eingabewert

c_o Spannungsverhältnis an der Schichtoberkante z_o [-]
$c_o = \sigma_{z.\gamma.o} / \sigma_{z.o}$

c_u Spannungsverhältnis c_u an der Schichtunterkante z_u [-]
$c_u = \sigma_{z.\gamma.u} / \sigma_{z.u}$

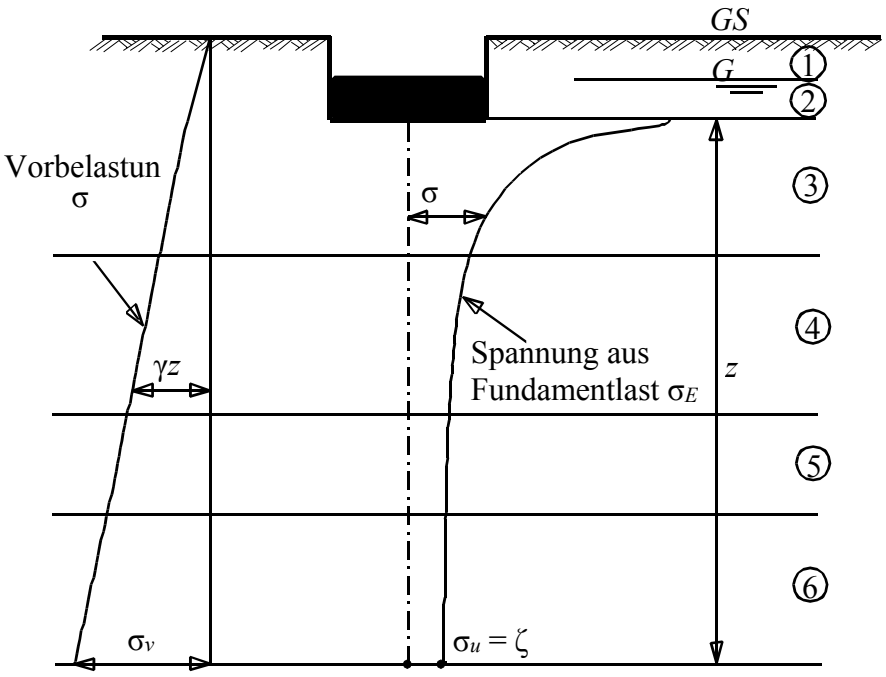


Bild 1.25 Beispiel für die Bestimmung der Grenztiefe d_s (z_g) unter einem Fundament (keine Drucküberschneidung)

1.4 Einflüsse auf die Ergebnisse

1.4.1 Einfluss von Temperaturänderung

Bei Gründungsplatten kommt es manchmal vor, dass erhebliche Temperaturdifferenzen zwischen der Oberkante und der Unterkante der Gründungsplatte auftreten. Dieser Fall tritt z.B. auf, wenn im Industriebau Feueröfen unmittelbar auf der Gründungsplatte aufgelegt werden und damit eine hohe Temperatur an der Oberseite entsteht. Die Temperaturdifferenzen verursachen Verformungen der Gründungsplatte, sofern diese ungehindert auftreten können. Der Baugrund besitzt aber je nach Festigkeit nur eine begrenzte Nachgiebigkeit, so dass Zwängspannungen in der Gründungsplatte auftreten. Diese Zwängspannungen werden nachfolgend untersucht:

Bei einer Temperatur T_o [C°] an der Oberseite der ganzen Platte und T_u [C°] an der Unterseite der Platte besteht eine Temperaturdifferenz:

$$\Delta T = T_u - T_o \qquad [c^\circ] \tag{1.140}$$

Diese Temperaturdifferenz verursacht eine Verbiegung der Platte nach unten, wenn ΔT positiv und nach oben, wenn ΔT negativ ist (Bild 1.26). Die Verbiegung ist sphärenförmig mit dem Krümmungsradius:

$$R_s = \frac{d}{\alpha_T \, \Delta T} \qquad [\mathrm{m}] \tag{1.141}$$

wobei d [m] die Dicke der Platte und α_T [1/ C°] die Wärmedehnzahl des Plattenmaterials bedeutet (α_T = 0.00001 [1/ C°] für Stahlbeton).

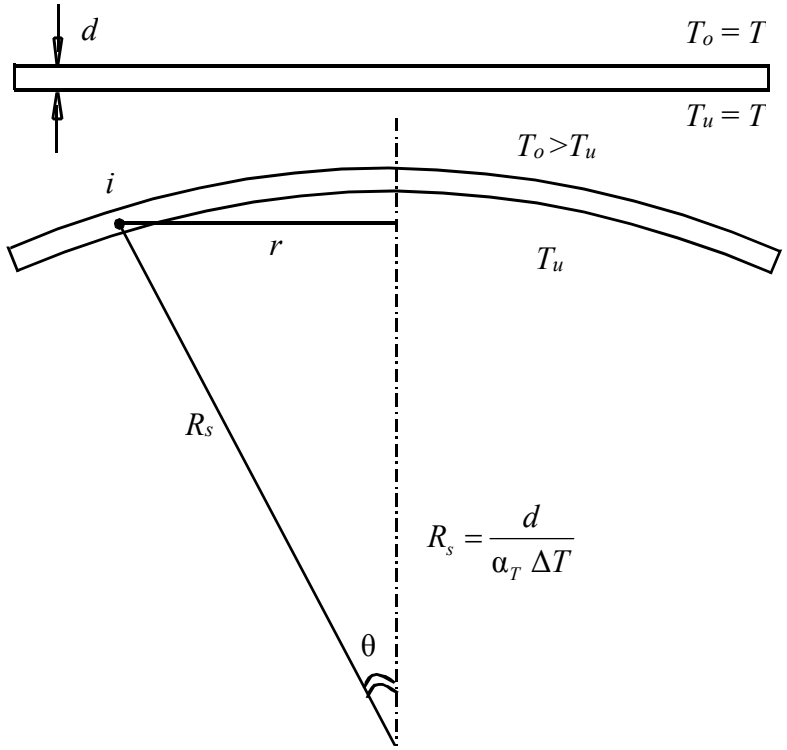


Bild 1.26 Einfluss von Temperaturänderung auf die Platte

Infolge dieses Temperatureinflusses entsteht zwischen Punkt *i* und dem Mittelpunkt der Platte, die im Abstand r_i [m] voneinander liegen, eine Durchbiegungsdifferenz:

$$t_i = \frac{\alpha_T \, \Delta T \, r_i^2}{2d} \qquad \text{[m]} \tag{1.142}$$

Dann sind die Summengleichungen der Setzungen mit dem Einfluss der Temperaturdifferenz:

$$\left.\begin{aligned}
s_1 &= c_{1,1} Q_1 + c_{1,2} Q_2 + c_{1,3} Q_3 + \ldots + c_{1,n} Q_n + t_1 \\
s_2 &= c_{2,1} Q_1 + c_{2,2} Q_2 + c_{2,3} Q_3 + \ldots + c_{2,n} Q_n + t_2 \\
s_3 &= c_{3,1} Q_1 + c_{3,2} Q_2 + c_{3,3} Q_3 + \ldots + c_{3,n} Q_n + t_3 \\
&\\
s_n &= c_{n,1} Q_1 + c_{n,2} Q_2 + c_{n,3} Q_3 + \ldots + c_{n,n} Q_n + t_n
\end{aligned}\right\} \tag{1.143}$$

oder in Matrizenform geschrieben:

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \\ \\ \dots \\ s_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & \dots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & \dots & c_{2,n} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & \dots & c_{3,n} \\ & & & & \\ & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & c_{n,3} & \dots & c_{n,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \\ \\ \dots \\ Q_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ \\ \\ \dots \\ t_n \end{Bmatrix} \tag{1.144}$$

Gl. 1.144 wird vereinfacht zu:

$$\{s\} = [c]\{Q\} + \{s_T\} \tag{1.145}$$

durch Inversion [c] erhält man:

$$\{Q\} = [k_s]\{s\} - [k_s]\{s_T\} \tag{1.146}$$

wobei [c] die Flexibilitätsmatrix für den Baugrund darstellt. Durch Inversion erhält man die Steifigkeitsmatrix [k_s] = [c]$^{-1}$ für den Baugrund. Dann wird in den Summengleichungen der Setzungen zu den Setzungsanteilen infolge Einwirkung des Sohldrucks in jeder Gleichung i jeweils noch ein weiterer Setzungsanteil $s_{i.T}$ als Setzung infolge äußerer Einflüsse hinzugerechnet.

Dann erhält man die Plattengleichung in einer Matrixform wie folgt:

$$\left[[k_p] + [k_s] \right] \{\delta\} = \{P\} + [k_s]\{s_T\} \tag{1.147}$$

wobei:
$\{s_T\}$ Vektor der zusätzlichen Verschiebung infolge der Temperaturdifferenz

1.4.2 Berücksichtigung von Sohlwasserdruck

Wenn bei Grundwasserandrang zusätzlich zu dem Bodendruck q_o auf die Sohle Wasserdruck q_w wirksam ist, so kann dieser in der Setzungsberechnung berücksichtigt werden. Es wird dann außerdem eine zusätzliche negative äußere Belastung - q_w auf die Sohlplatte eingerechnet. Selbstverständlich muss der verbleibende restliche Sohldruck noch mit ausreichender Sicherheit so groß sein, dass kein Aufschwimmen der Sohle eintritt.

Bei dünnen Platten mit konzentrierten Einzellasten und bei starkem Auftrieb q_w kann dabei der Fall eintreten, dass der Auftrieb q_w an einzelnen Knoten i der Sohlplatte größer als der Bodendruck q_i ist, so dass sich rechnerisch negative Sohldrücke ergeben. In diesem Fall ist in begrenztem Umfang eine Sohldruckkorrektur nach Abschnitt 7 möglich.

Die Plattengleichung mit dem Einfluss des Grundwasserdrucks in Matrixform erhält man wie folgt:

$$\left[[k_p] + [k_s] \right] \{\delta\} = \{P\} + [Q_W] \tag{1.148}$$

wobei:
$\{Q_W\}$ Vektor des Grundwasserdrucks

1.4.3 Unterschiedliche Gründungstiefe

a) Unterschiedliche Gründungstiefe bei benachbarten Fundamenten

Manchmal sind bei Berechnung des Einflusses benachbarter Fundamente die Gründungstiefen der Fundamente unterschiedlich (Bild 1.27). Es können die Höhe der Fundamentsohle über dem Festpunkt H_m berücksichtigt werden und damit die z-Werte für die Setzungsbeiwerte.

$$z_{ikl} = (z_{il} - t_{fi}) - H_{mi} + H_{mk} \tag{1.149}$$

wobei unter dem Festpunkt H_m negativ ist.

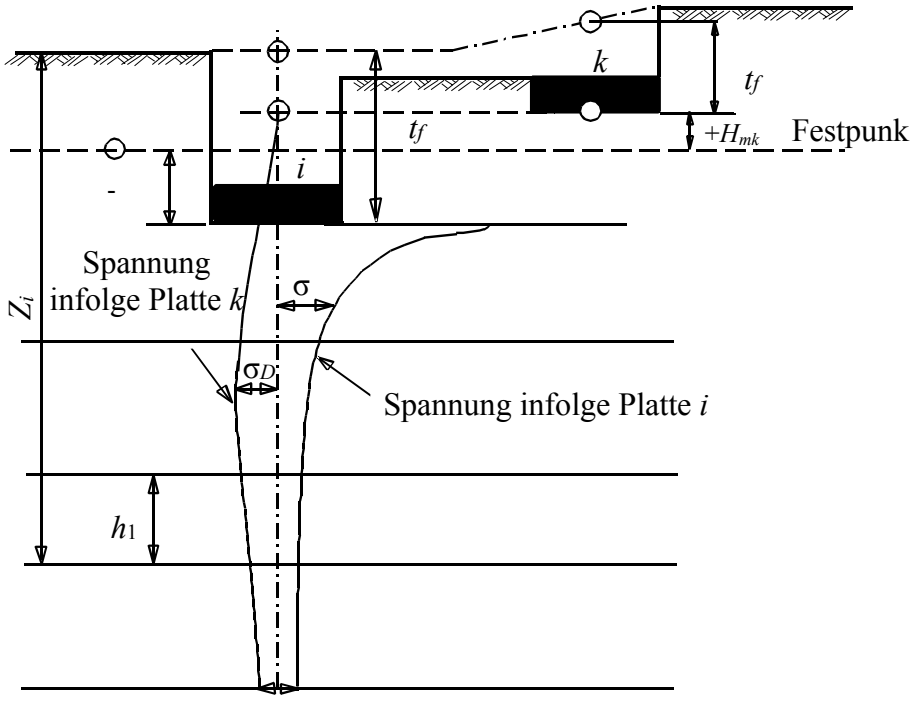


Bild 1.27 Setzungseinfluss der Platte k auf die Platte i

b) unterschiedliche Gründungstiefe bei unterschiedlichen Plattendicken

Bei Berechnung einer Gründungsplatte gibt es drei verschiedene Möglichkeiten zur Eingabe der Plattendicke

a) Die Plattendicke ist über die gesamte Platte konstant;
in diesem Fall gibt es nur eine Gründungstiefe (Bild 1.28a)

b) Unterschiedliche Plattendicke mit konstanten Gründungstiefen (Bild 1.28b);
in diesem Fall ist die Gründungstiefe konstant

c) Unterschiedliche Plattendicke mit unterschiedlichen Gründungstiefen (Bild 1.28c); in diesem Fall ist die Gründungstiefe unterschiedlich

Die *z*-Werte für die Setzungsbeiwerte sind

$$z_{ikl} = (z_{il} - t_{fk}) \tag{1.150}$$

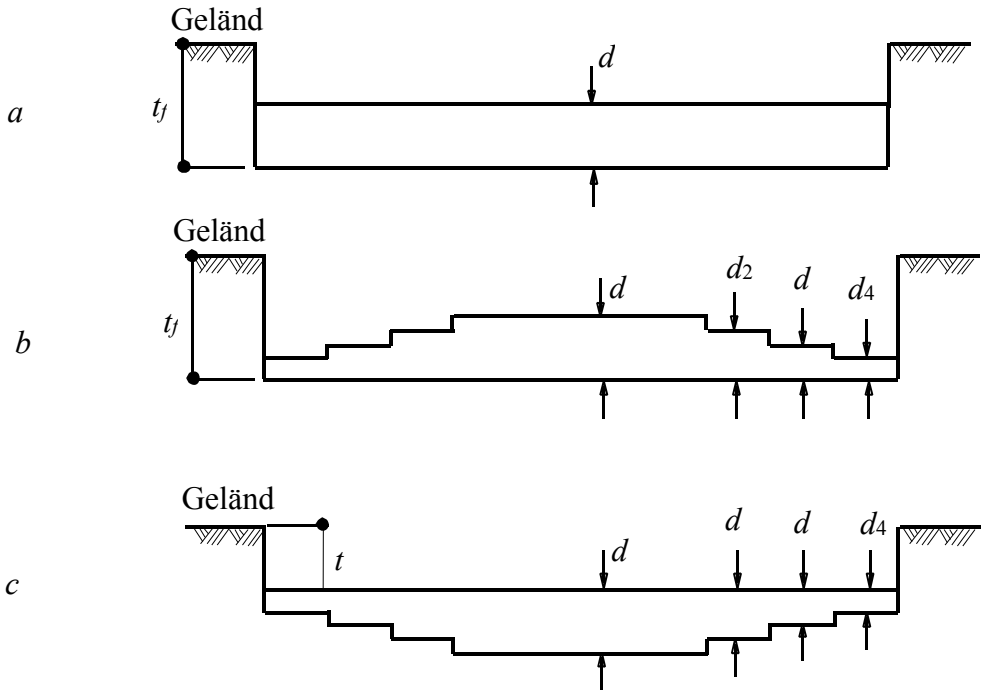


Bild 1.28 Unterschiedliche Gründungstiefe bei unterschiedlichen Plattendicken

1.4.4 Berechnung der gerippten Platte

Die traditionelle Berechnung des Fundaments mit Anwenden der FE-Methode erfordert zwei Hauptarten von Elementen. Die erste Art ist das Stabelement, das verwendet wird, um Streifenfundamente oder Trägerrostfundamente zu berechnen. Die zweite Art von finiten Elementen ist das Plattenelement, das verwendet wird, um Fundamente oder Platten zu berechnen. Die konventionellen Methoden zur Berechnung von Fundamenten berücksichtigen nur eine Art von Elementen.

Die kombinierten Probleme der Fundamente mit anderen Steifigkeiten wurden von vielen Autoren behandelt. *Deninger* (1964) zeigte eine Methode mit finiten Differenzmethoden zur Berechnung von rechteckigen Platten, die durch starre Wände gesteift werden. *Zienkiewicz/ Cheung* (1970) stellten eine Lösung für Deckenplatten mit Randbalken vor. *Lee/ Brown* (1972) analysierten ebenen Rahmen auf zweidimensionalen Fundamenten durch Verwenden von Stabelementen für die Rahmen und Plattenelementen für das Fundament. *Mikhaiel* (1978) berücksichtigte die Wirkung der Scheibenwände und der Starrheit der Deckplatte durch Verwenden einer Kombination zwischen Plattenbiegungselementen und Plattenspannungselementen. *Bazaraa/ Shaheen/ Sabry/ Krem* (1991) untersuchten die Wirkung von Verbindungsbalken auf das Verhalten der Fundamente. Die Fundamente werden von den Plattenelementen dargestellt, während die Verbindungsbalken von Stabelementen dargestellt werden. *Bazaraa/ Ghabrial/ Henedy* (1997) untersuchten die Wirkung von Grenzstützmauern auf das Verhalten der Platte durch Verwenden eines kombinierten Netzes von Plattenbiegungselementen und Plattenspannungselementen.

Die gerippte Platte kann verwendet werden für viele Bauten, die schwere Belastungen oder Längsspannen haben, wenn eine flache Ebene für das Erdgeschoss nicht erforderlich ist. Damit ist das Volumen des Betons reduziert. Solche Bauten sind Silos und erhobene Tanks. Obwohl diese Art des Fundaments viele Nachteile hat, wenn man sie in normalen Gebäuden verwendet, benutzen sie immer noch viele Statiker. Nachteile sind, dass die Platte eine große Gründungstiefe unter der Bodenoberfläche benötigt. Diese erfordert Füllmaterial auf der Platte und noch eine zusätzliche Platte auf dem Füllmaterial, um das Erdgeschoss zu bauen. Die Verwendung der gerippten Platten beruht auf der Einfachheit der Berechnung (Handberechnung).

Das Programm *ELPLA* wurde entwickelt, um eine gerippte Platte mit Verwenden einer Kombination von zwei finiten Elementarten zu berechnen. Die Platte wird von Plattenbiegeelementen entsprechend der zweidimensionalen Natur des Fundaments dargestellt. Es wird angenommen, dass Stabelemente die Träger entlang der Platte darstellen. Die gesamte Steifigkeitsmatrix der Platte mit Träger ist die Summe der zwei Steifigkeitsmatrizen der Platte und der Träger.

Die gerippte Platte kann mit Verwenden von Plattenelementen zusammen mit Stabelementen berechnet werden, die in die Region nahe den Plattenelementgrenzen gestellt werden, wie im Bild 1.29 gezeigt. Um die Kompatibilität der Verformung zwischen den Platten- und Stabelementen zu betrachten, wird ein Stabelement mit demselben Freiheitsgrad des Plattenelements am Schnittpunkt gewählt.

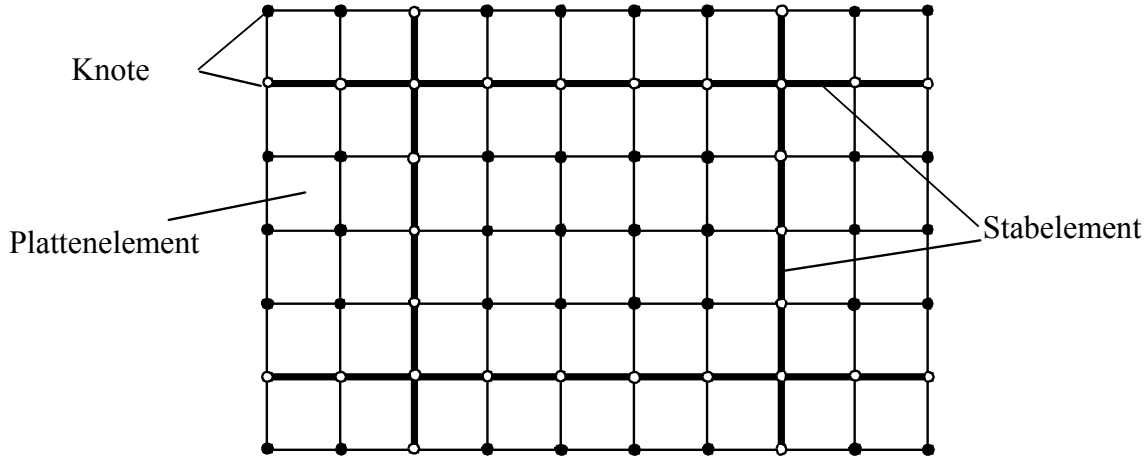


Bild 1.29 FE-Netz der gerippten Platte

Das Gleichgewicht des Fundaments für das Spannungstrapezverfahren wird ausgedrückt mit:

$$\left[\left[k_p\right]+\left[k_g\right]\right]\{\delta\}=\{P\}-\{Q\} \tag{1.151}$$

Für das Bettungsmodul- und Steifemodulverfahren wird das Gleichgewicht ausgedrückt mit:

$$\left[\left[k_p\right]+\left[k_g\right]+\left[k_s\right]\right]\{\delta\}=\{P\} \tag{1.152}$$

wobei:

$\{Q\}$ Vektor des Sohldrucks
$\{P\}$ Lastvektor aus Lasten und Momenten
$\{\delta\}$ Verformungsvektor
$[k_p]$ Steifigkeitsmatrix für die Platte
$[k_g]$ Steifigkeitsmatrix für den Träger
$[k_s]$ Steifigkeitsmatrix für den Baugrund

1.5 Nutzung der Symmetrie und Antimetrie
1.5.1 Nutzung der Symmetrie

Vorbemerkung

Bei vielen Problemstellungen der Praxis sind die Platte, der Baugrund und die Belastung symmetrisch. Durch Nutzung dieser Symmetrieeigenschaften bei Platten mit vielen Elementen ergibt sich eine wesentliche Reduktion der Rechenzeiten und des Speicherplatzbedarfs. Dann braucht die Berechnung nur für eine Plattenhälfte oder für einen Quadranten durchgeführt zu werden, je nachdem, ob eine einfache oder doppelte Symmetrieunterteilung von Platte, Lasten und Baugrund möglich ist. Auch können bei wenigstens einfach-symmetrischen Plattengrundrissen Zeitersparnisse durch symmetrische und antimetrische Lastkombinationen erzielt werden.

Für die Berechnung mit Symmetrie wurde von *Deninger* (1964) nach dem Differenzenverfahren, *Haung* (1974) nach dem FE-Verfahren und *Kany* (1974) für starre Rechteckplatten eine Berechnung vorgestellt.

Die Flexibilitätskoeffizienten der symmetrischen Fälle können wie folgt berechnet werden:

Die zu untersuchende Fundamentplatte wird rasterartig in $N \cdot M = n$ Teilknoten unterteilt, wie im Bild 1.30 gezeigt.

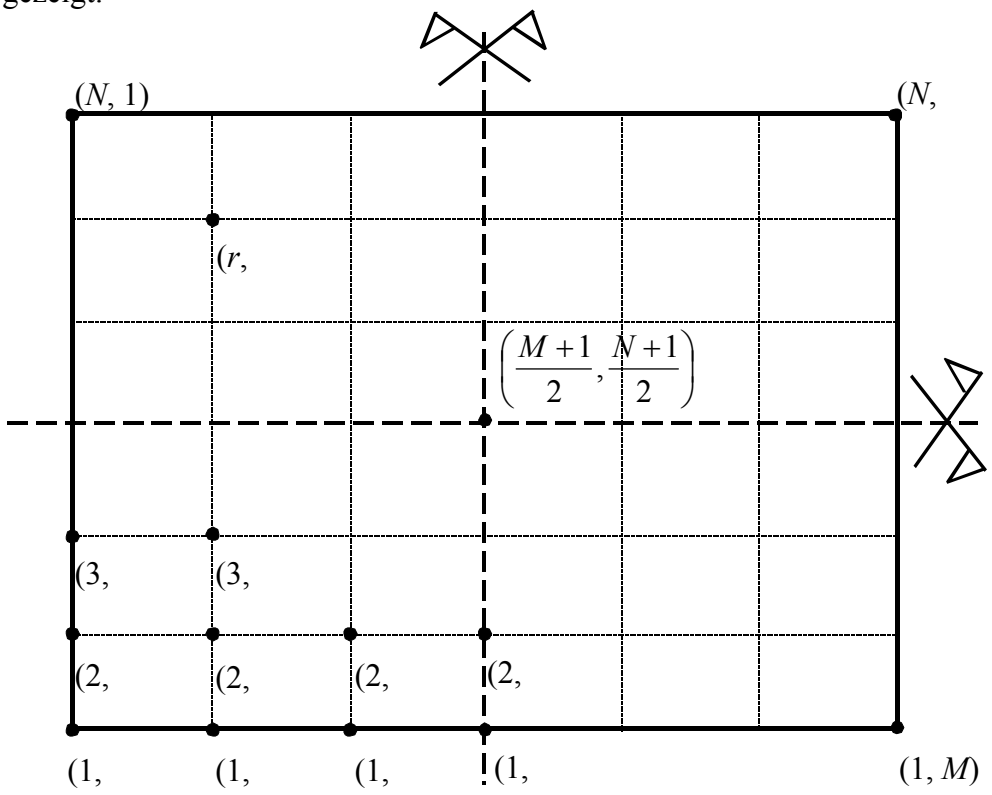


Bild 1.30 Numerierung der Knoten bei der Berechnung mit Symmetrie

Dann ergibt sich die Setzung $s_i = s_{(r,j)}$ des Knotens $i = (1, 1)$ bis $i = (N, M)$ unter den Sohlkräften $Q_{(1,1)}$ bis $Q_{(N, M)}$ analog den Summengleichungen der Setzungen im vorliegenden Fall bei Numerierung der Rasterknoten gemäß Bild 1.30 mit folgenden jeweils aus $N \cdot M$ Gliedern bestehenden Summengleichung:

$$s_i = \sum_{k=1}^{n} c_{i,k}\, Q_k = s_{(r,j)} = \sum_{(l,m)=(1,1)}^{(N,M)} c_{(r,j),(l,m)}\, Q_{(l,m)} \tag{1.153}$$

wobei:

$c_{(r,j),(l,m)}$ Flexibilitätskoeffizient [m/kN] für einen Punkt der Koordinate (r, j) infolge einer Einheitssohlkraft $Q_{(l,m)}$ [kN] an einem Knoten der Koordinaten (l, m)
l und r Raster Nr. in x- Richtung
m und j Raster Nr. in y- Richtung

Einfache Systemsymmetrie um die *x*- Achse

Aus Symmetriegründen um die x- Achse sind die folgenden Bedingungen geschrieben (Bild 1.31):

$$\left.\begin{array}{lll} Q_{(1,1)} = Q_{(N,1)} & Q_{(2,1)} = Q_{(N-1,1)} & \cdots \\ Q_{(1,2)} = Q_{(N,2)} & Q_{(2,2)} = Q_{(N-1,2)} & \cdots \\ Q_{(1,3)} = Q_{(N,3)} & Q_{(2,3)} = Q_{(N-1,3)} & \cdots \\ & & \\ & & \\ Q_{(1,M)} = Q_{(N,M)} & Q_{(2,M)} = Q_{(N-1,M)} & \cdots \end{array}\right\} \tag{1.154}$$

Damit erhält man für die $c_{(r,j),(l,m)}$-Werte entsprechend den Summengleichungen der Setzungen als Summengleichung:

$$\begin{aligned} s_{(r,j)} = &\left[c_{(r,j),(1,1)} + c_{(r,j),(N,1)}\right] Q_{(1,1)} + \left[c_{(r,j),(1,2)} + c_{(r,j),(N,2)}\right] Q_{(1,2)} + \\ &\ldots + \left[c_{(r,j),(\frac{N+1}{2},M)} + c_{(r,j),(\frac{N+1}{2},M)}\right] Q_{(\frac{N+1}{2},M)} \end{aligned} \tag{1.155}$$

Gl. 1.155 wird vereinfacht zu:

$$\begin{aligned} s_{(r,j)} = &\, c'_{(r,j),(1,1)}\, Q_{(1,1)} + c'_{(r,j),(1,2)}\, Q_{(1,2)} + \\ &\ldots + c'_{(r,j),(\frac{N+1}{2},M)}\, Q_{(\frac{N+1}{2},M)} \end{aligned} \tag{1.156}$$

In allgemeiner Form wird die Setzungsgleichung im Falle von Symmetrie um die x- Achse ausgedrückt:

$$s_{(r,j)} = \sum_{(l,m)=(1,1)}^{(\frac{N+1}{2},M)} c'_{(r,j),(l,m)}\, Q_{(l,m)} \tag{1.157}$$

wobei:

$C'_{(r,j),(l,m)}$ Summeneinflusszahl im Falle von Symmetrie um die x- Achse

Die Unbekannten in der Gl. 1.157 sind die Sohlkräfte $Q_{(1,\,1)}$ bis $Q_{([N+1]/2,\,M)}$, also insgesamt $M \times (N + 1) / 2$ Werte.

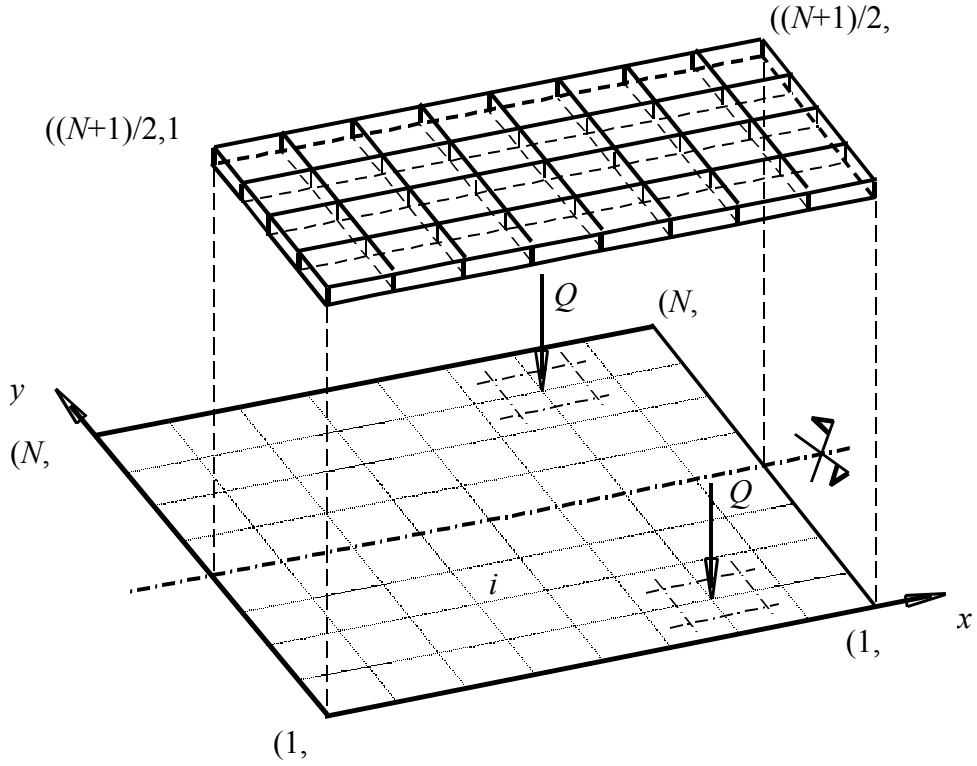


Bild 1.31 Flexibilitätskoeffizienten bei der Berechnung mit einfacher Systemsymmetrie um die x- Achse ($C_{i,\,j} = c_{i,\,j(1)} + c_{i,\,j(2)}$)

Einfache Systemsymmetrie um die *y*- Achse

Aus Symmetriegründen um die y- Achse sind die folgenden Bedingungen geschrieben (Bild 1.32):

$$\left.\begin{array}{lll} Q_{(1,1)} = Q_{(1,M)} & Q_{(1,2)} = Q_{(1,M-1)} & \cdots \\ Q_{(2,1)} = Q_{(2,M)} & Q_{(2,2)} = Q_{(2,M-1)} & \cdots \\ Q_{(3,M)} = Q_{(3,M)} & Q_{(3,2)} = Q_{(3,M-1)} & \cdots \\ & & \\ & & \\ Q_{(N,1)} = Q_{(N,M)} & Q_{(N,2)} = Q_{(N,M-1)} & \cdots \end{array}\right\} \qquad (1.158)$$

Damit erhält man für die $c_{(r,j),(l,\,m)}$-Werte entsprechend den Summengleichungen der Setzungen als Summengleichung:

$$s_{(r,j)} = \left[c_{(r,j),(1,1)} + c_{(r,j),(1,M)}\right] Q_{(1,1)} + \left[c_{(r,j),(1,2)} + c_{(r,j),(1,M\text{-}1)}\right] Q_{(1,2)} + \ldots + \left[c_{(r,j),(N,\frac{M+1}{2})} + c_{(r,j),(N,\frac{M+1}{2})}\right] Q_{(N,\frac{M+1}{2})} \quad (1.159)$$

Gl. 1.159 wird vereinfacht zu:

$$s_{(r,j)} = c'_{(r,j),(1,1)}\, Q_{(1,1)} + c'_{(r,j),(1,2)}\, Q_{(1,2)} + \ldots + c'_{(r,j),(N,\frac{M+1}{2})}\, Q_{(N,\frac{M+1}{2})} \quad (1.160)$$

Allgemein wird die Setzungsgleichung im Falle von Symmetrie um die *y*- Achse ausgedrückt:

$$s_{(r,j)} = \sum_{(l,m)=(1,1)}^{(N,\frac{M+1}{2})} c'_{(r,j),(l,m)}\, Q_{(l,m)} \quad (1.161)$$

wobei:
$C'_{(r,j),(l,m)}$ Summeneinflusszahl im Falle von Symmetrie um die *y*- Achse

Die Unbekannten in der Gl. 1.161 sind die Sohlkräfte $Q_{(1,1)}$ bis $Q_{(N,[M+1]/2)}$, also insgesamt $N \times (M + 1) / 2$ Werte.

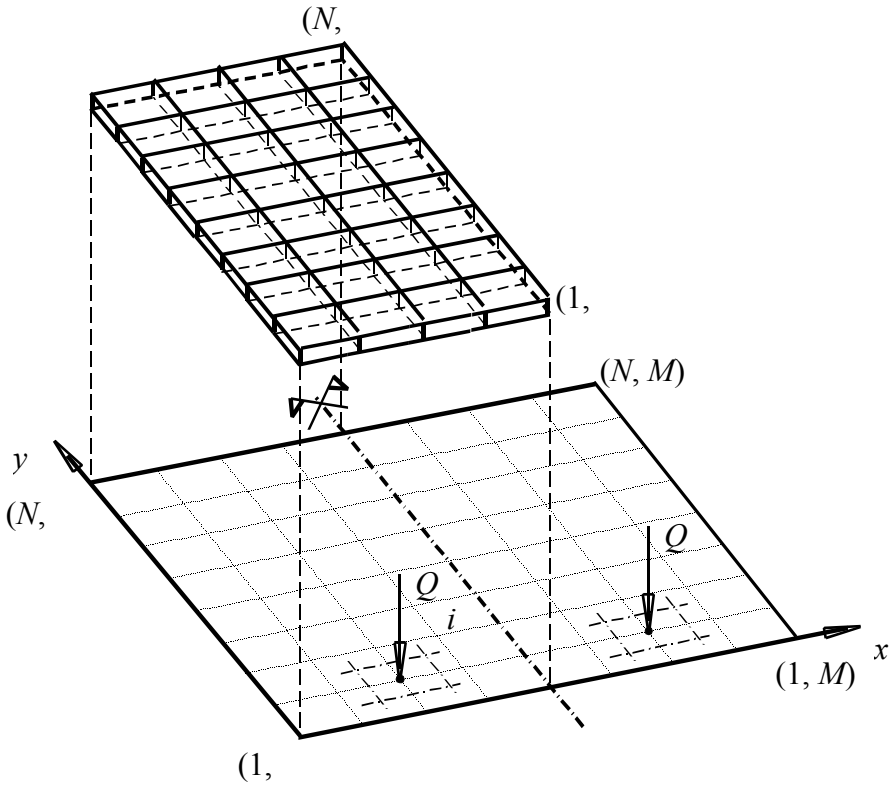


Bild 1.32 Flexibilitätskoeffizienten bei der Berechnung mit einfacher Systemsymmetrie um die *y*- Achse ($C_{i,j} = c_{i,j(1)} + c_{i,j(2)}$)

Doppelte Systemsymmetrie

Aus Symmetriegründen um die *x*- und *y*- Achse sind die folgenden Bedingungen geschrieben (Bild 1.33):

$$\left.\begin{array}{c} Q_{(1,1)} = Q_{(1,M)} = Q_{(N,1)} = Q_{(N,M)} \\ Q_{(1,2)} = Q_{(1,M-1)} = Q_{(N,2)} = Q_{(N,M-1)} \\ Q_{(1,3)} = Q_{(1,M-2)} = Q_{(N,3)} = Q_{(N,M-2)} \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{array}\right\} \qquad (1.162)$$

Damit erhält man für die $c_{(r,j),(l,m)}$-Werte entsprechend den Summengleichungen der Setzungen als Summengleichung:

$$s_{(r,j)} = \left[c_{(r,j),(1,1)} + c_{(r,j),(1,M)} + c_{(r,j),(N,1)} + c_{(r,j),(N,M)}\right] Q_{(1,1)}$$

$$+ \left[c_{(r,j),(1,2)} + c_{(r,j),(1,M\text{-}1)} + c_{(r,j),(N,2)} + c_{(r,j),(N,M\text{-}1)}\right] Q_{(1,2)} \qquad (1.163)$$

$$+ \ldots + \left[4\, c_{(r,j),(\frac{N+1}{2},\frac{M+1}{2})}\right] Q_{(\frac{N+1}{2},\frac{M+1}{2})}$$

Gl. 1.163 ist vereinfacht:

$$s_{(r,j)} = c'_{(r,j),(1,1)}\, Q_{(1,1)} + c'_{(r,j),(1,2)}\, Q_{(1,2)} + \ldots + c'_{(r,j),(\frac{N+1}{2},\frac{M+1}{2})}\, Q_{(\frac{N+1}{2},\frac{M+1}{2})} \qquad (1.164)$$

In allgemeiner Form wird die Setzungsgleichung im Falle von Symmetrie um die *x*- und *y*- Achse ausgedrückt:

$$s_{(r,j)} = \sum_{(l,m)=(1,1)}^{(\frac{N+1}{2},\frac{M+1}{2})} c'_{(r,j),(l,m)}\, Q_{(l,m)} \qquad (1.165)$$

wobei:

$C'_{(r,j),(1,m)}$ Summeneinflusszahl im Falle von Symmetrie um *x*- und *y*- Achse

Die Unbekannten in der Gl. 1.165 sind die Sohlkräfte $Q_{(1,1)}$ bis $Q_{([N+1]/2,[M+1]/2)}$, also insgesamt $(N + 1) \times (M + 1) / 4$ Werte.

Die Setzungsgleichungen der antimetrischen Fälle können auf ähnliche Weise von diesem symmetrischen Fall abgeleitet werden.

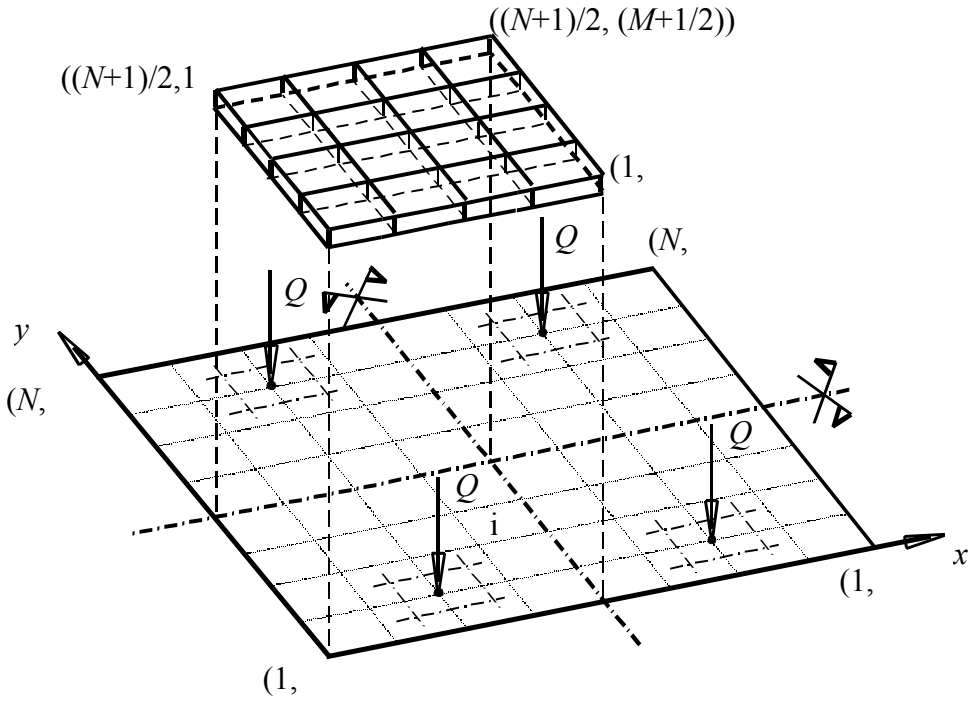


Bild 1.33 Flexibilitätskoeffizienten bei der Berechnung mit doppelter Systemsymmetrie um die *x*- und *y*- Achse ($C_{i,j} = c_{i,j(1)} + c_{i,j(2)} + c_{i,j(3)} + c_{i,j(4)}$)

1.5.2 Nutzung der Antimetrie

Bei allgemeiner Laststellung, also nicht symmetrischer Belastung der Platte, ergeben sich nach Bild 1.34 die Sohldruckverteilung, Setzungen und Schnittgrößen der Platte durch Superposition von zwei Einzelberechnungen (symmetrischer Lastfall A um die *x*- Achse und antimetrischer Lastfall B in Richtung der *x*- Achse). Man kann auch die Formeln der Berechnung antimetrischer Belastung, wie im Abschnitt 1.5.1 verwenden.

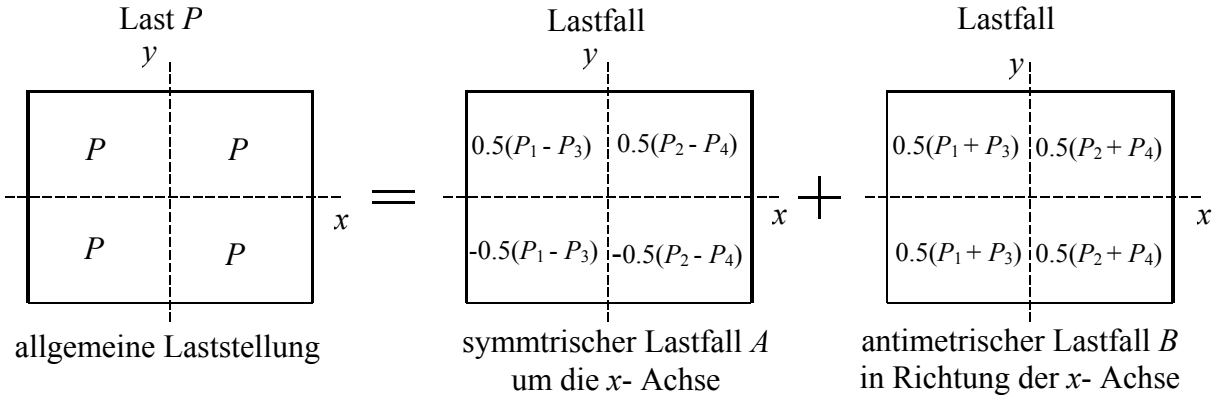


Bild 1.34 Lastgruppierung auf Platte bei allgemeiner Laststellung

Bei einer Knotenfeldaufteilung des Fundaments in N . M Teilflächen hat die Ursprungs-Flexibilitätsmatrix $[N.M]^2$ Einflusswerte. Es können die Einflusswerte durch Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften auf $[(N + 1/2) \times M]^2$, $[N \times (M + 1) / 2]^2$ und $[(N + 1) /2 \times (M + 1) / 2]^2$ für einfache Systemsymmetrie um die x- Achse, einfache Systemsymmetrie um die y- Achse und doppelte Systemsymmetrie reduziert werden.

1.5.3 Randbedingungen bei Symmetrie und Antimetrie

Allgemeine Randbedingungen zur Berechnung der Platteinbiegung sind null Verformungen w und Verdrehungen θ_x und θ_y entlang des festen Auflagers. Null Verdrehungen um die x- Achse ($\theta_x = 0$) oder y- Achse ($\theta_y = 0$) entlang des einfachen Auflagerrands sind anwendbar in Richtung x oder y. Null Verformungen bestehen am frei drehbar gelagerten Rand (Bild 1.35).

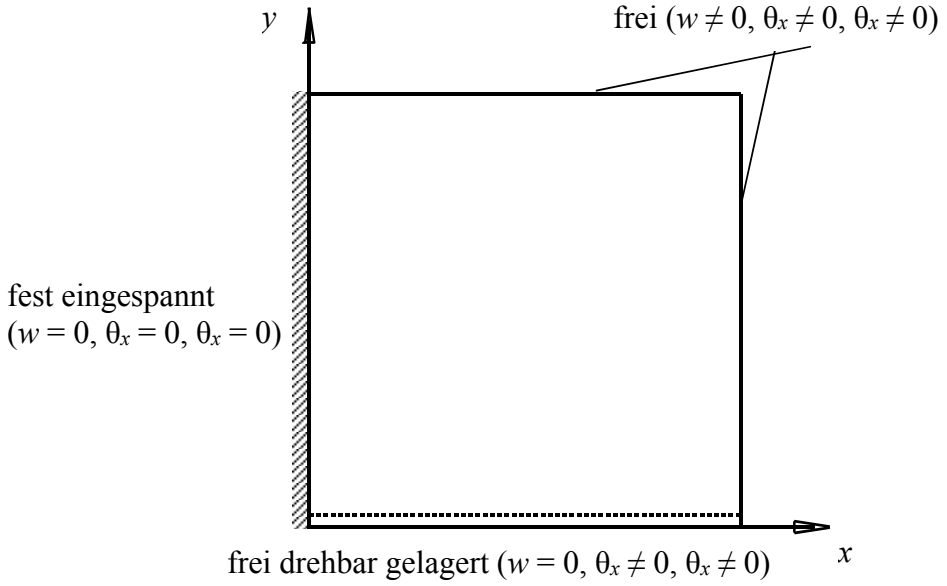


Bild 1.35 Geometrische Randbedingungen

Für symmetrische und antimetrische Fälle müssen einige entsprechende Randbedingungen zu allen Knoten auf der Symmetrie-Achse wie folgt angewandt werden:

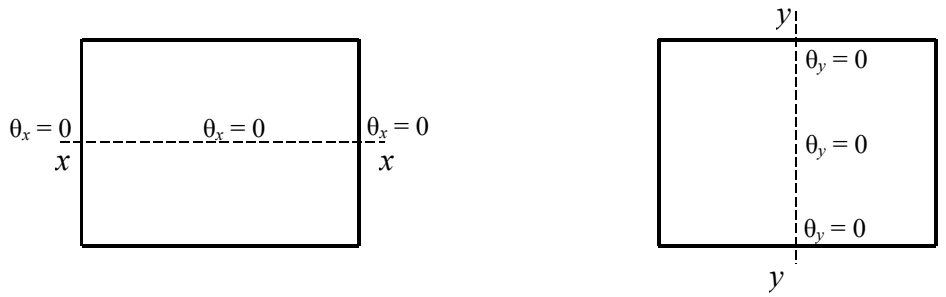
- liegt eine Symmetrie um die x- Achse vor, so wird für alle auf dieser Achse liegenden Knoten die Knotenverdrehung θ_x um diese Achse gesperrt (Bild 1.36a)

- liegt eine Symmetrie um die y- Achse vor, so wird für alle auf dieser Achse liegenden Knoten die Knotenverdrehung θ_y um diese Achse gesperrt (Bild 1.36b)

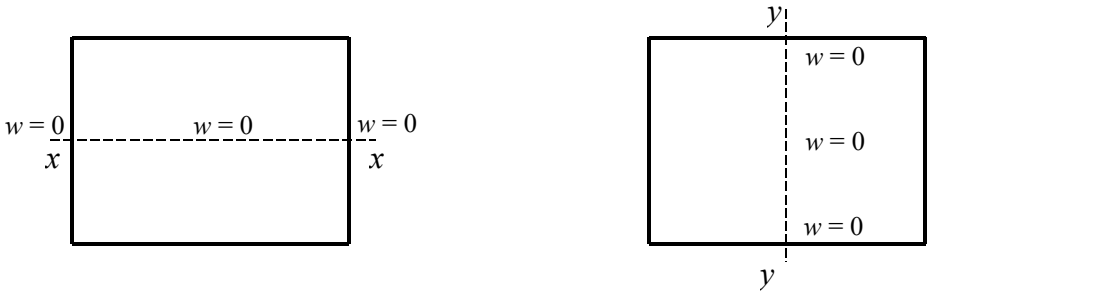
- besteht eine Antimetrie um die x- Achse, so wird für alle auf dieser Achse liegenden Knoten die Verschiebung w auf diese Achse gesperrt (Bild 1.36c)

- besteht eine Antimetrie um die y- Achse, so wird für alle auf dieser Achse liegenden Knoten die Verschiebung w auf diese Achse gesperrt (Bild 1.36d)

Dies kann erreicht werden, indem man die Elementwerte der entsprechenden Spalte und Zeile in der Gesamtsteifigkeitsmatrix = null setzt.



a) Fall der Symmetrie um die *x*- Achse b) Fall der Symmetrie um die *y*-



c) Fall der Antimetrie um die *x*- Achse d) Fall der Antimetrie um die *y*- Achse

Bild 1.36 Randbedingungen bei Symmetrie und Antimetrie

Abschnitt 2

Berechnung von Fundamenten auf unregelmäßigem Baugrund

Inhalt

2.1	Vorbemerkungen		2- 2
2.2	Aufteilung der Bohrergebnisse in Teilflächen		2- 2
2.3	Interpolationsmethode		2- 3
	2.3.1	Bestimmung der variablen Bettungsmoduli k_s	2- 4
	2.3.2	Bestimmung des dreidimensionalen Flexibilitätskoeffizienten	2- 6
	2.3.3	Nummerierung der Bohrprofile	2- 8
Beispiel 2.1		Berechnung einer quadratischen Platte auf unregelmäßigem Baugrund	2-12
Beispiel 2.2		Berechnung einer unregelmäßigen Platte auf unregelmäßigem Baugrund	2-20
Beispiel 2.3		Berechnung von Fundamentgruppen auf unregelmäßigem Baugrund	2-29

2 Berechnung von Fundamenten auf unregelmäßigen Baugrund

2.1 Vorbemerkungen

Meist gehen die Berechnungsverfahren zur Berechnung der Flexibilitätskoeffizienten oder Bettungsmoduli von der Annahme aus, dass der Untergrund aus einem Baugrund mit konstanten Steifemoduli und/ oder aus einem horizontal geschichteten Baugrund besteht.

In der Natur hat aber der Untergrund oft verschiedene Bodenkennwerte in horizontaler und vertikaler Richtung. In der Praxis wird deshalb der Untergrund durch eine Anzahl von Bohrprofilen definiert. In jedem Profil sind mehrere Schichten mit verschiedenen Bodenmaterialien vorhanden, welche als dreidimensionale Flexibilitätskoeffizienten oder unterschiedliche Bettungsmoduli berücksichtigt werden müssen.

Kany (1973) hat dieses Problem für den zweidimensionalen Balken gelöst, indem er die Flexibilitätskoeffizienten für Felder mit Bohrprofilen bestimmt und dann die anderen Koeffizienten durch Interpolation berechnet.

Kany/ El Gendy (1995) haben auch eine Methode vorgeschlagen, um den variablen Bettungsmodul zur Berechnung von Gründungsbalkenfundamenten, die auf einem elastischen zweidimensionalen Baugrundmodell ruhen, zu berechnen. Die Bettungsmoduli werden berechnet durch das Ermitteln des Bettungsmoduls für die bestehenden Bohrungen. Darauf können die anderen Bettungsmoduli außerhalb der Bohrungen durch Interpolation erhalten werden.

2.2 Aufteilung der Bohrergebnisse in Teilflächen

Die Anwendung der Interpolations-Methode bei Gründungsplatten mit unterschiedlichen Feldgrößen ist komplizierter. Hier müssen die Flexibilitätskoeffizienten für die in einzelne Elemente aufgeteilte Platte bestimmt werden.

El Gendy (1994) hat auch hierzu eine vereinfachte Methode vorgeschlagen, um die dreidimensionalen Flexibilitätskoeffizienten oder die variablen Bettungsmoduli für ein Plattenfundament von beliebigem Grundriss zu erhalten. Der gesamte Fundamentbereich wird dabei in eine Anzahl von Teilflächen aufgeteilt, wobei jede Teilfläche einem der Bohrprofile zugeordnet wird.

Die Zuteilung der Bohrprofile zu den einzelnen Knoten der in Elemente aufgeteilten Plattenfläche im Programm *ELPLA* ist auf Bild 2.1 dargestellt.

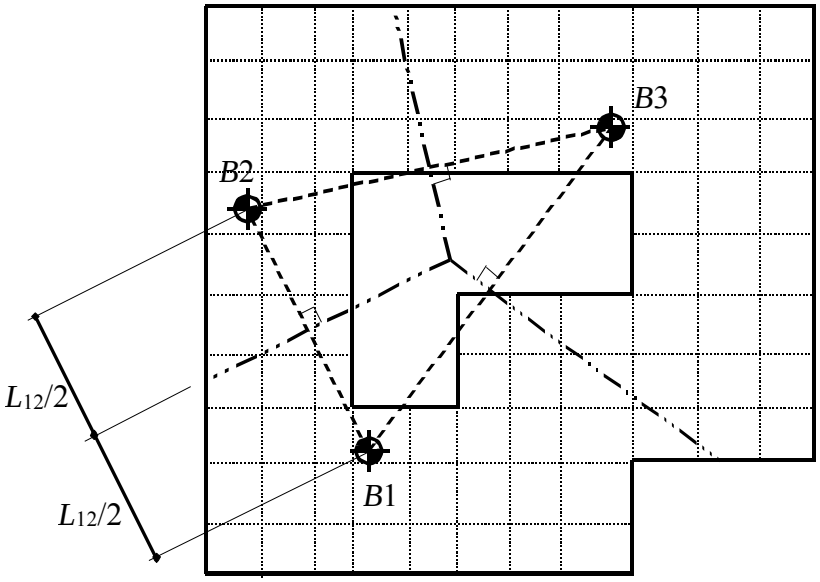


Bild 2.1 Lage der Bohrpunkte mit Zuteilung zu den Feldern

2.3 Interpolationsmethode

Kany/ *El Gendy* (1995) haben auch eine genauere Methode vorgeschlagen, um den dreidimensionalen Flexibilitätskoeffizienten zu erhalten oder den variablen Bettungsmodul, zur Berechnung von Gründungsplattenfundamenten, die auf einem elastischen dreidimensionalen Baugrundmodell ruhen. Die Koeffizienten werden berechnet durch das Ermitteln der Flexibilitätskoeffizienten oder des Bettungsmoduls für die bestehenden Bohrungen. Danach können die anderen Koeffizienten oder Moduli außerhalb der Bohrungen durch Interpolation berechnet werden.

Bei diesem Verfahren werden, wie in Bild 2.3 gezeigt ist, drei verschiedene Feldtypen unterschieden:

Typ I: Liegt der Knotenpunkt einer in Elemente aufgeteilten Fundamentfläche in einem Dreieck zwischen drei Bohrpunkten (z.B. die punktierte Fläche in Bild 2.3), so wird bilinear interpoliert

Typ II: Liegt der Knotenpunkt am Rand zwischen zwei Randbohrpunkten (z.B. die schraffierte Fläche zwischen den Bohrpunkten B1 und B4 in Bild 2.3), so wird linear interpoliert

Typ III: Liegt der Bohrpunkt außerhalb an einer Ecke, so wird das Bohrprofil der Ecke der Berechnung zugrunde gelegt (z.B. schraffierte Fläche rechts oben in Bild 2.3)

2.3.1 Bestimmung der variablen Bettungsmoduli k_s

In diesem Fall werden unterschiedliche Bettungsmoduli k_i an den einzelnen Knoten *i* berechnet.

i) Hierbei wird eine lineare Sohldruckverteilung q_i (Spannungstrapez) zugrunde gelegt (Bild 2.2)

ii) Berechnung der Setzungen s_i (aus linearem Sohldruck) im Knoten *i*.
Es ergibt sich folgende Formel nach *Ohde* (1942)

$$s_i = \sum_{j=1}^{n} c_{i,j}\, q_j \tag{2.1}$$

Hierbei bedeuten $c_{i,j}$ die Flexibilitätskoeffizienten für die Stelle *i* infolge Einheitsbelastung im Feld *j*

iii) Mit den errechneten Setzungen s_i werden gemäß Bild 2.2 für alle Knoten *i* die Bettungsmoduli k_i berechnet, *Winkler* (1867)

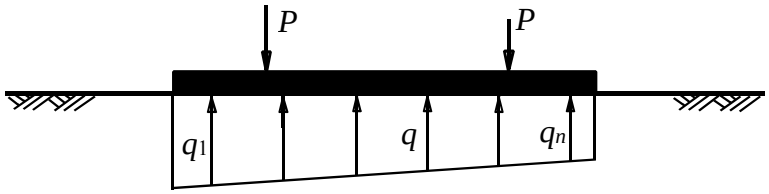
$$k_i = \frac{q_i}{s_i} \tag{2.2}$$

iv) Der mittlere Bettungsmodul k_m für die ganze Platte ergibt sich dann aus

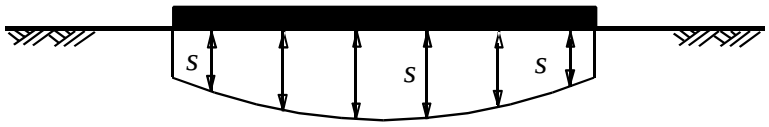
$$k_{sm} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} k_i \tag{2.3}$$

mit n = Anzahl der Knoten

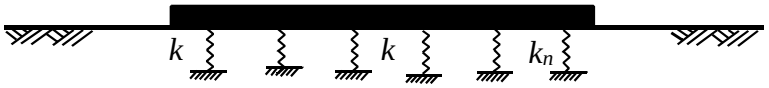
Die Schritte i bis iv werden für jede Bohrung wiederholt.



Lineare Sohldruckverteilung



Setzungen aus linearem



unterschiedliche Bettunngsmoduli

Bild 2.2 Bestimmen der Bettungsmoduli

Wenn man die mittleren Bettungsmodulwerte k_m aus der Gl. 2.3 benutzt, wird eine Festlegung des variablen Bettungsmoduls für alle Knoten auf der Unterseite des Fundaments wie folgt ermöglicht:

Es wird angenommen, dass der Fundamentbereich in drei Zonentypen aufgeteilt wird:

Typ I
Diese Zone ist dreieckig. Eine solche Zone wird begrenzt von drei Bohrungen. Um den Bettungsmodul k_s für einen Knoten, der auf einem Punkt (x, y) in der dreieckigen Zone liegt, zu ermitteln, wird der Bettungsmodul k_s als eine bilineare Funktion aufgefasst, die durch die drei Bohrungen verläuft.

$$k_s = a + bx + cy \tag{2.4}$$

Eine solche Funktion hat die drei unbekannten Koeffizienten a, b und c. Diese können bestimmt werden durch den bekannten Wert von k_{sm} und die Abstandskoordinaten (x, y) für die drei Bohrungen, die zu einem System von 3 linearen Gleichungen führen.

Typ II
Diese Zone wird begrenzt von einer oder mehreren Seiten des Fundaments und zwei Bohrungen. Der Bettungsmodul k_s für einen Knoten, der in dieser Zone liegt, kann erhalten werden durch die Annahme einer linearen Interpolation zwischen den Werten von k_{sm} für zwei Bohrungen.

$$k_s = k^1{}_{sm} + \frac{\eta}{l}\left(k^2{}_{sm} - k^1{}_{sm}\right) \tag{2.5}$$

Typ III

Diese Zone ist begrenzt durch eine oder mehrere Seiten des Fundaments und eine Bohrung. Der Bettungsmodul k_s für einen Knoten, der in dieser Zone liegt, ist gleich dem Bettungsmodul der Bohrung k_{sm}.

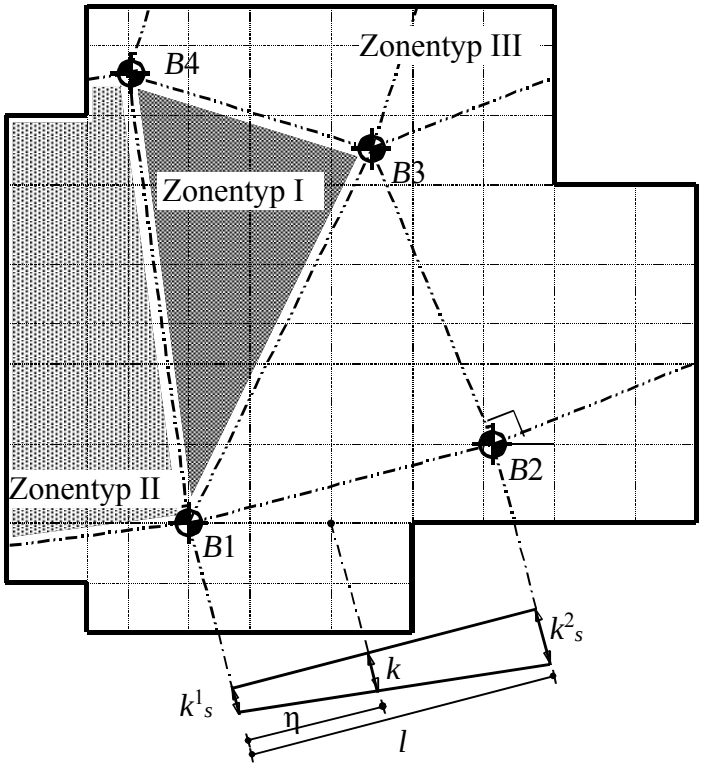


Bild 2.3 Lage der Bohrpunkte und Zonentypen

2.3.2 Bestimmung des dreidimensionalen Flexibilitätskoeffizienten

In ähnlicher Weise wie die frühere Lösung für den Bettungsmodul wird der Fundamentbereich in die gleichen drei Zonentypen aufgeteilt. Gl. 2.4 für Zonentyp I kann wie folgt geschrieben werden:

$$c_{i,j} = a + bx + cy \tag{2.6}$$

Die unbekannten Koeffizienten a, b und c können in diesem Fall durch die bekannten Werte von $c_{i,j}$ erhalten werden, die durch das Bohrprofil der drei Bohrungen and deren Koordinaten (x, y) festgelegt werden. Gl. 2.5 für Zonentyp II kann wie folgt geschrieben werden:

$$c_{i,j} = {c^1}_{m\,i,j} + \frac{\eta}{l}\left({c^2}_{m\,i,j} - {c^1}_{m\,i,j}\right) \tag{2.7}$$

wobei ${c^1}_{m\,i,j}$ und ${c^2}_{m\,i,j}$ die Hauptflexibilitätskoeffizienten sind, die durch das Bohrungsmaterial $B1$ bzw. $B2$ festgelegt werden können.

Zonentyp III ist der einfachste; bei diesem wird der Flexibilitätskoeffizient $c_{i,j}$ aus dem Bohrprofil seiner zugehörigen Bohrung bestimmt.

Es ist wichtig zu bemerken:

- Wenn nur zwei Bohrprofile den Baugrund unter dem Fundament definieren oder die Bohrprofile auf derselben Linie liegen, wird Zonentyp I entfernt

- Die oben genannte Berechnung des dreidimensionalen Baugrunds ist für Einzelfundamente abgeleitet, aber es ist auch möglich, die Berechnung für Systeme von Platten oder Fundamenten zu verwenden, wie im Bild 2.4 gezeigt

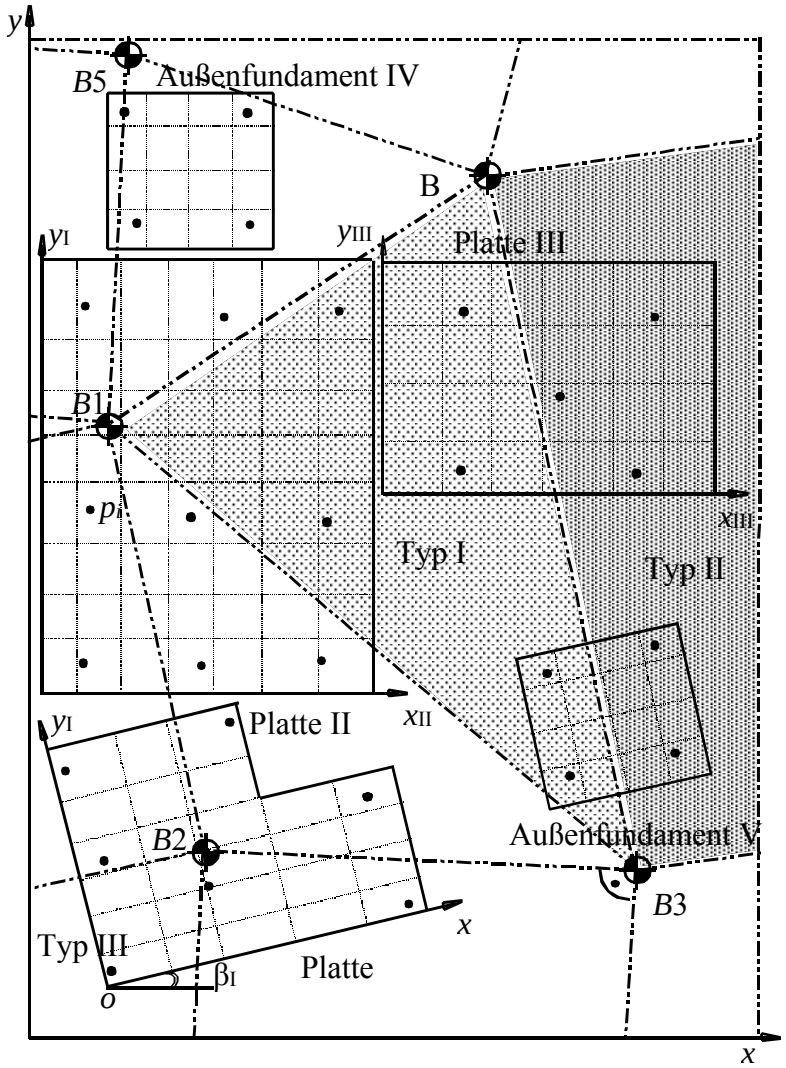


Bild 2.4 System von 3 Platten (I bis III) und 2 Außenfundamenten IV und V auf unregelmäßigem Untergrund

2.3.3 Nummerierung der Bohrprofile

Das Bohrprofil Nr. 1 sollte für die Bohrung immer eine möglichst zentrale Lage haben, wenn mit mehr als 3 Bohrprofilen gerechnet wird. Damit wird erreicht, dass die Aufteilung in Teilflächen und Bildung der Dreiecke für die bilineare Interpolation gut funktioniert, Bild 2.5. Bei der Nummerierung der Bohrpunkte sollten die Nummern so gewählt werden, dass die Dreiecke stets entgegen dem Uhrzeigersinn um den Bohrpunkt *B*1 angeordnet sind. Liegen die Bohrprofile sehr ungünstig, so sollte man von Hand die Zuteilung von Bohrprofilen zu den Knotenpunkten vornehmen.

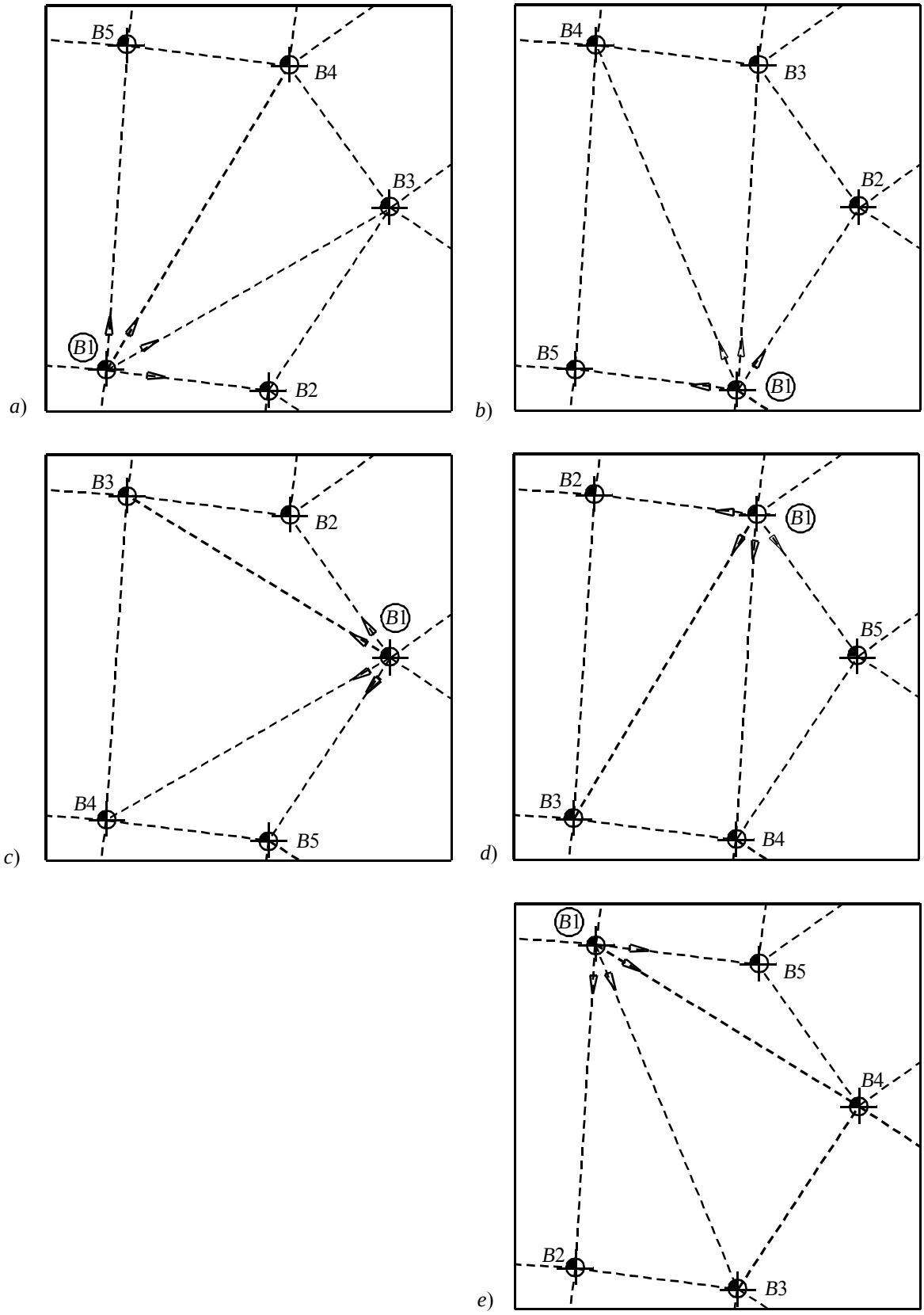


Bild 2.5 a) bis e) Verschiedene Anordnungen von Dreieckszonen

Die Annahme des isotropen elastischen Halbraummodells erfordert eine unendliche zusammendrückbare Bodenschicht unter dem Fundament. Praktisch besteht der Untergrund aus vielen Schichten mit verschiedenen Bodenmaterialien. Für den geschichteten Baugrund ist die Anzahl der Schichten zu berücksichtigen. In einem Bohrprofil hängt die Berechnung des Flexibilitätskoeffizienten $c_{i,j}$ von der Tiefe des festen Untergrunds oder von der Grenztiefe z_g ab, wobei keine Setzung auftritt. Die Grenztiefe z_g des Setzungseinflusses ist abhängig von dem Verhältnis ξ = Zusatzspannung/ Vorbelastung des Bodens, wobei als Grenztiefe z_g die Tiefe angenommen wird, wo der Wert ξ erreicht wird, wie im Bild 2.6 und Gl. 2.8 aufgezeigt.

$$\sigma_U = \zeta \ \sigma_V \tag{2.8}$$

wobei:

$\sigma_U = \sigma_E + \sigma_D$	Spannung aus Fundamentlast und Außenfundamentlasten	[kN/m^2]
σ_E	Spannung aus Fundamentlast	[kN/m^2]
σ_D	Spannung aus Außenfundamentlasten	[kN/m^2]
$\sigma_V = \Sigma\gamma z$	Vorbelastung	[kN/m^2]
γ	Wichte der Bodenschicht	[kN/m^3]
z	Tiefe der Bodenschicht	[m]

Eine Untersuchung von *Amman*/ *Breth* (1972) zeigt, dass die Werte $\xi = 0.8$ angenommen werden können, besonders für Wiederbelastungsboden. In DIN 4019 Teil 1 wird $\xi = 0.2$ empfohlen.

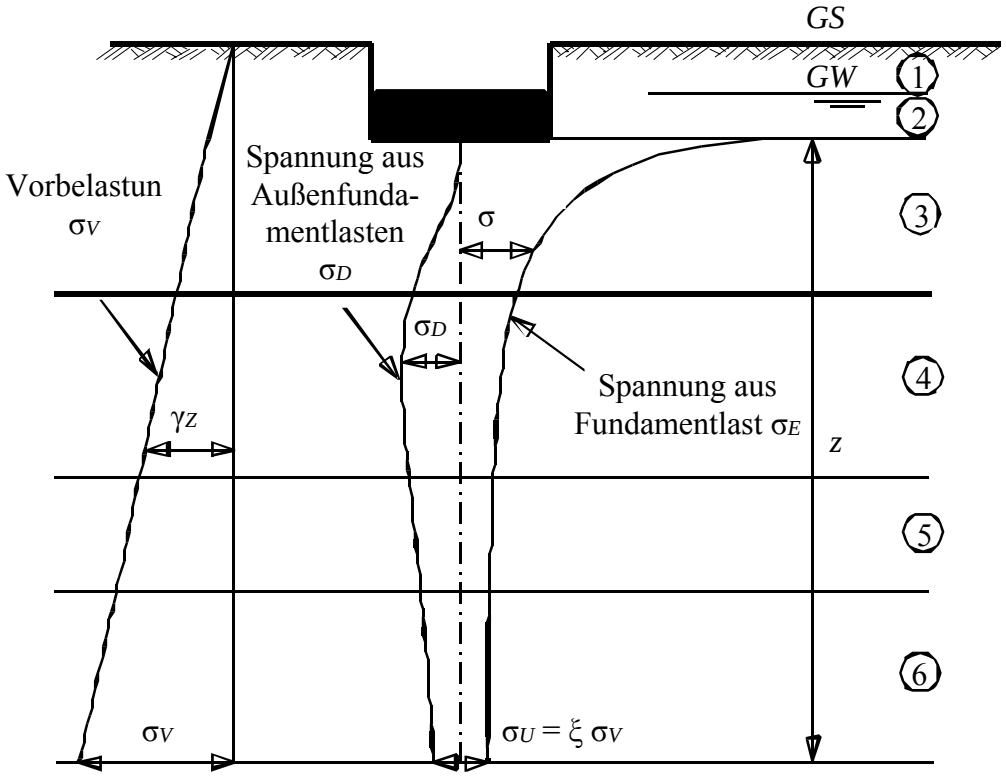


Bild 2.6 Grenztiefe z_g unter einem Fundament

Das Problem beim dreidimensionalen Untergrundmodell ist, dass viele Bohrprofile den Boden unter dem System von Fundamenten charakterisieren. *Kany/ El Gendy* (1997) lösten dieses Problem für das dreidimensionale Untergrundmodell, in welchem Hauptgrenztiefen für jedes Fundament bestimmt werden sollten. Jede Grenztiefe entspricht einem der Bohrprofile und einem Fundament. Es wird aus dem Material dieses Bohrprofils und der Spannung unter diesem Fundament bestimmt. Es wird angenommen, dass die Sohldrücke unter den Fundamenten bekannt sind und gleichförmig auf den Seiten der Fundamente verteilt werden.

Um die Unregelmäßigkeit des Untergrundmaterials in *x*- und *y*- Richtung mit Betrachtung der effektiven Bodenschichten zu berücksichtigen, müssen die Flexibilitätskoeffizienten $c_{i,\,j}$ mit Benutzung der Grenztiefen bestimmt werden.

Beispiel 2.1 Berechnung einer quadratischen Platte auf unregelmäßigem Baugrund

1 Aufgabenstellung

In diesem Beispiel wird der Einfluss von unregelmäßigem Baugrund auf die Setzungen, Sohldrücke und Momente einer quadratischen Fundamentplatte (Bild 2.7) untersucht.

Die Berechnung der Platte wird durchgeführt mit folgenden drei Berechnungsmodellen:

Verfahren 3: Berechnung mit von Knoten zu Knoten unterschiedlichen Bettungsmoduli
Verfahren 7: Steifemodulverfahren für den beliebig geschichteten Baugrund
Verfahren 8: Steifemodulverfahren für die starre Platte

Es wird eine quadratische Platte von $10 \times 10 = 100$ [m^2] Größe untersucht. Sie wird in $4 \times 36 = 144$ quadratische Elemente mit jeweils 0.833×0.833 [m^2] Fläche unterteilt, wie in Bild 2.7a dargestellt. Die Plattendicke beträgt $d = 0.4$ [m].

2 Bodenkennwerte

Der Baugrund unter der Platte ist durch drei Bohrprofile definiert (Bilder 2.8 und 2.9). In jeder Bohrung liegt eine Schicht von 10 [m] Mächtigkeit ($Z = A$) auf festem Untergrund (Bild 2.7b). Die Unregelmäßigkeiten des Baugrunds in x- und y- Richtung werden beschrieben durch den Steifemodul E_s, der in diesem Beispiel variabel ist. Die Steifemoduli bei den drei Bohrprofilen sind

E_{s1}	=	6666.67	[kN/m^2]
E_{s2}	=	$1.5 \times E_{s1}$	[kN/m^2]
E_{s3}	=	$2.0 \times E_{s1}$	[kN/m^2]
mit mittlerem E_s		= 10 000	[kN/m^2]

Dies führt zu den Bettungsmoduli für die drei Bohrprofile

k_{sm1}	=	1448	[kN/m^3]
k_{sm2}	=	$1.5 \times k_{sm1}$	[kN/m^3]
k_{sm3}	=	$2.0 \times k_{sm1}$	[kN/m^3]

Die *Poisson*zahl wird mit $\nu_s = 0.2$ [-] für das Bodenmaterial angesetzt.

3 Materialkennwerte des Betons

Für das Plattenmaterial gilt:

Elastizitätsmodul	$E_b = 2 \times 10^7$	[kN/m^2]
*Poisson*zahl	$\nu_b = 0.25$	[-]
Wichte	$\gamma_b = 0.0$	[kN/m^3]

Das Eigengewicht wird in diesem Beispiel vernachlässigt**.**

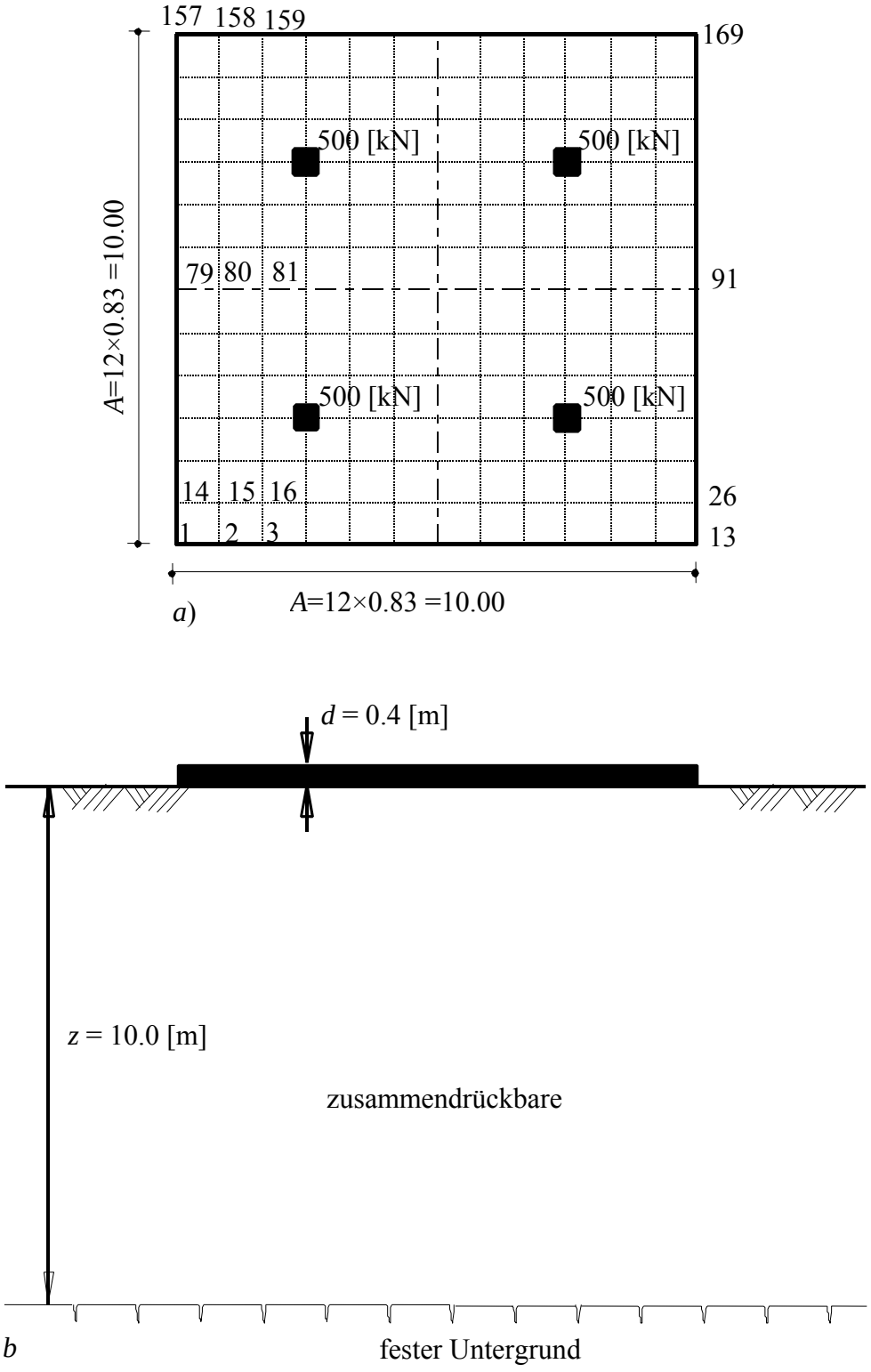


Bild 2.7 a) Numerierung der Platte, Belastung und Grundriss
b) Schichtung des Baugrunds

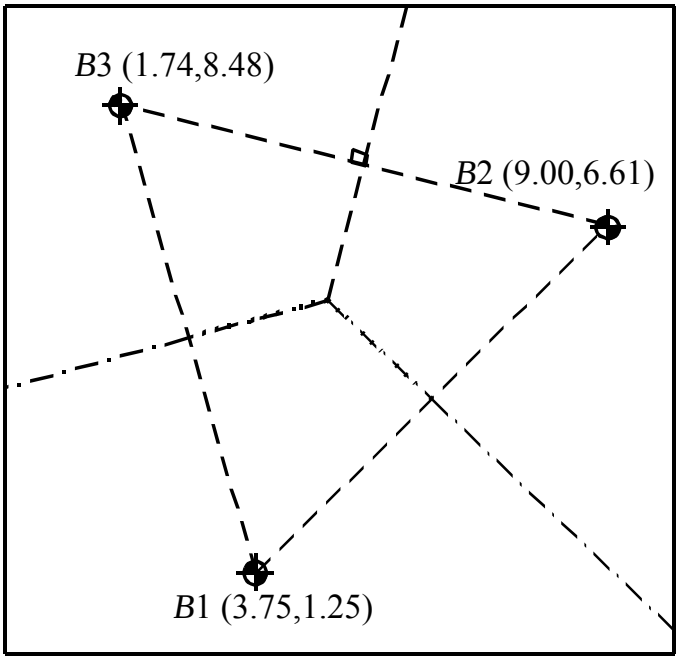


Bild 2.8 Lage der Bohrpunkte mit Zuteilung zu den Feldern

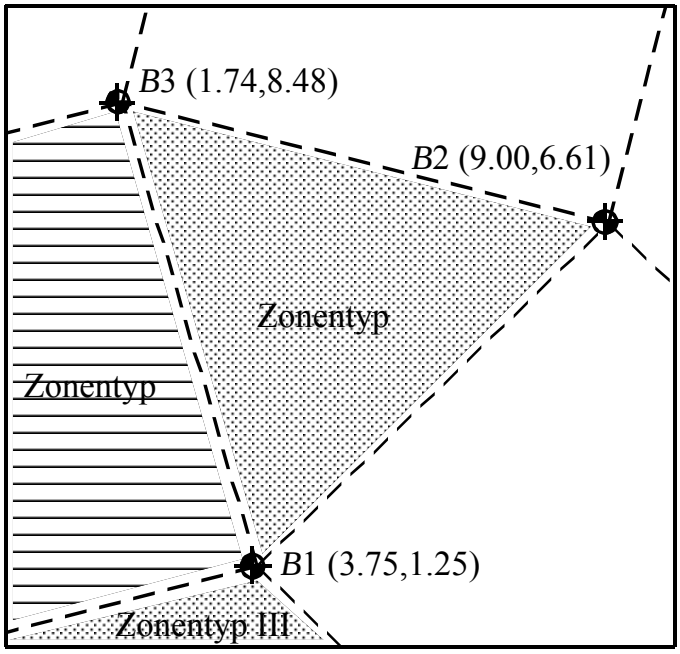


Bild 2.9 Lage der Bohrpunkte und Zonentypen

4 Lasten

Die Lasten sind symmetrisch zu den Plattenachsen angeordnet (Bild 2.7a). Es sind 4 symmetrisch verteilte Einzellasten P = 500 [kN] vorhanden.

5 Lösung der Aufgabe

Bei Anwendung der drei Bohrprofile zur Berechnung der Flexibilitätskoeffizienten und Bettungsmoduli werden zum Vergleich folgende zwei im Programm *ELPLA* programmierte Methoden verwendet:

- Aufteilung in die Teilflächen-Methode (Bild 2.8)
- Interpolationsmethode (Bild 2.9)

6 Ergebnisse und Auswertung

Die Bilder 2.10 bis 2.11 zeigen die Isolinien der Setzungen für das Bettungsmodulverfahren 3 und das Steifemodulverfahren 7 für die elastische Platte und das Steifemodulverfahren 8 für die starre Platte bei ungleichem Baugrund. Die dreidimensionalen Flexibilitätskoeffizienten für die drei Berechnungsfälle wurden durch die Interpolationsmethode erhalten. Diese Bilder zeigen auch, dass der Boden mit dem kleinsten E_s-Wert (Bohrprofil 1) die größte Setzung an den Knoten nahe der Bohrung bedingt.

Bild 2.13 zeigt die Isolinien der Setzungen, wenn der Baugrund unter der Platte aus einer regelmäßigen Schicht besteht, die einen konstanten Wert von E_s = 10 000 [kN/m^2] hat. Ein Vergleich zwischen Bild 2.12 und 2.13 zeigt einen großen Unterschied in der Setzungsform, wenn variable E_s-Werte benutzt werden. Obwohl die Platte symmetrisch belastet wird, kommt es zu unsymmetrischen Setzungen. Das bedeutet, dass die Variabilität der Bodenmaterialen in vertikaler und horizontaler Richtung von grundsätzlicher Bedeutung ist und berücksichtigt werden muss. Ein Vergleich zwischen den Ergebnissen, die mit der Interpolationsmethode, und denen, die mit der Aufteilung in die Teilflächen-Methode berechnet werden, ist in den Bildern 2.14 bis 2.17 gezeigt.

Die Bilder 2.14 bis 2.16 zeigen die Sohldrücke am Rand der Platte (Knoten 157 bis 169) für das Bettungsmodulverfahren 3 und das Steifemodulverfahren für die elastische Platte (Verfahren 7) und das Steifemodulverfahren für die starre Platte (Verfahren 8). Bild 2.17 zeigt die Momente im Schnitt I-I der Platte beim Steifemodulverfahren für die elastische Platte (Verfahren 7). Aus obigem Vergleich kann geschlossen werden, dass es zwischen den benachbarten Bohrprofilen keine kontinuierlichen Übergänge des Bodenmaterials gibt, wenn man die Methode mit Aufteilung in Teilflächen benutzt. Deshalb kann man erwarten, dass die Ergebnisse bei Aufteilung in Teilflächen nicht so genau sind, wie die Ergebnisse der Interpolationsmethode, besonders wenn es einen großen Unterschied im Bodenmaterial gibt. Dies wird in den Bilder 2.14 bis 2.17 illustriert, in denen die Aufteilung in die Teilflächen-Methode zu einer plötzlichen Änderung der Sohldrücke und Momente zwischen zwei jeweils benachbarten Teilflächen führt. Dies ist zurückzuführen auf die plötzliche Änderung des Bodenmaterials.

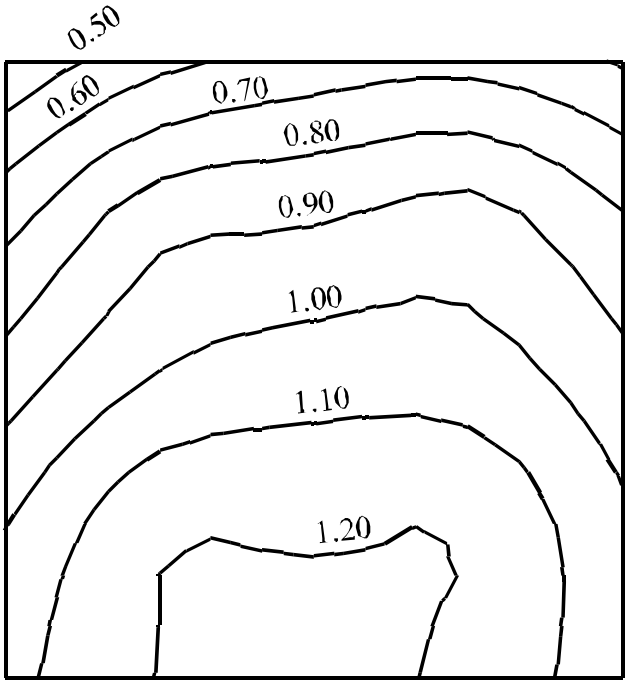


Bild 2.10 Isolinien der Setzungen [cm] (Bettungsmodulverfahren 3)

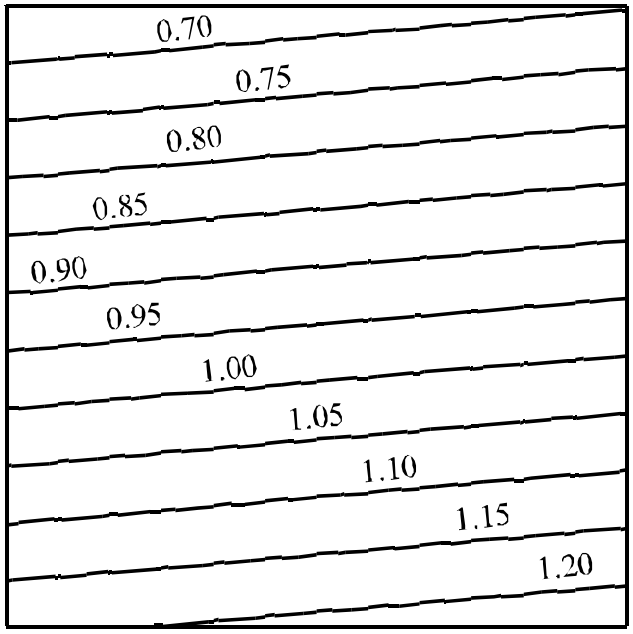


Bild 2.11 Isolinien der Setzungen [cm] (starre Platte, Verfahren 8)

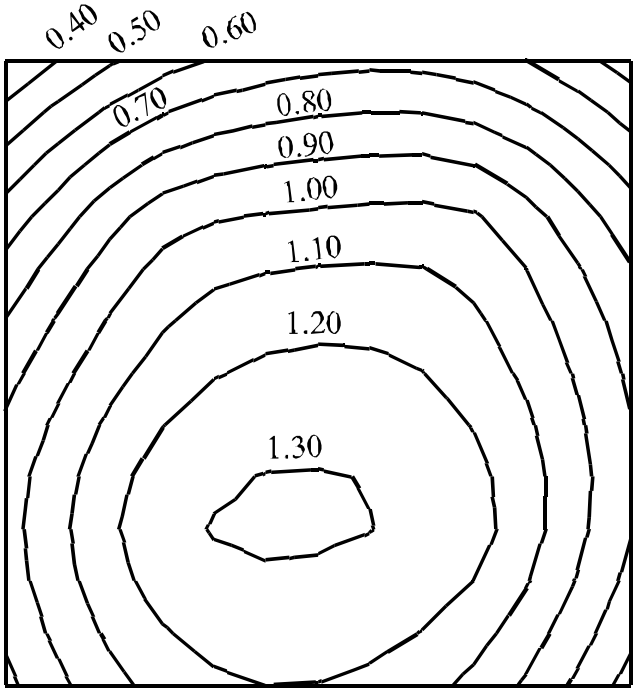


Bild 2.12 Isolinien der Setzungen [cm] (Steifemodulverfahren 7)

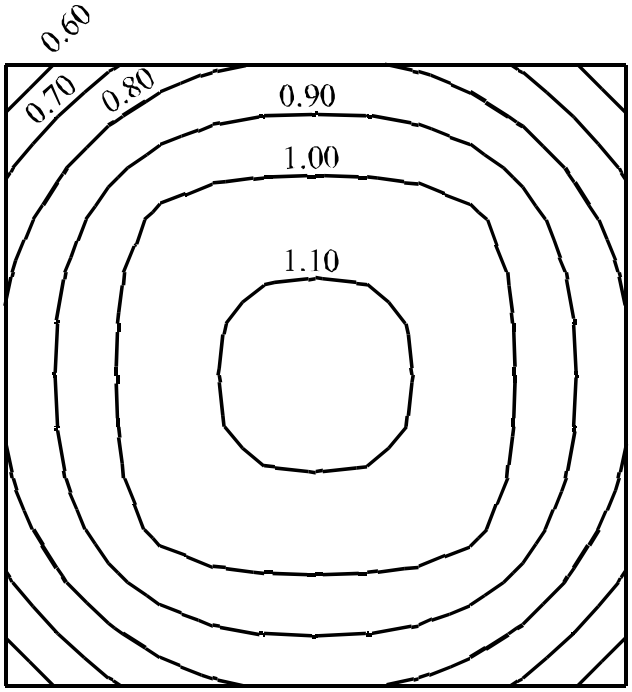


Bild 2.13 Isolinien der Setzungen [cm] (Steifemodulverfahren 7 mit E_s = konstant)

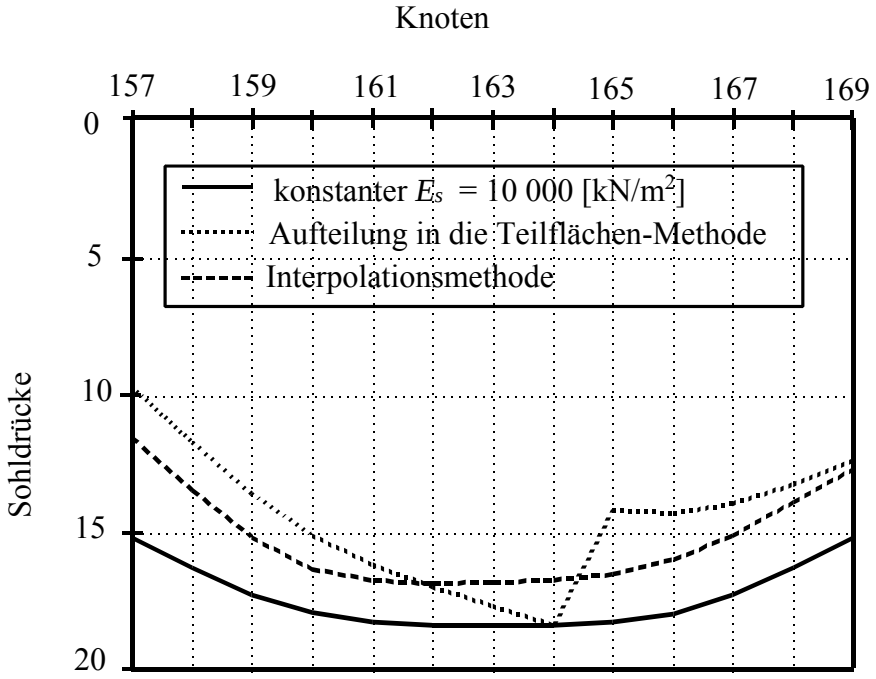


Bild 2.14 Sohldrücke [kN/m²] am Rand der Platte (Bettungsmodulverfahren)

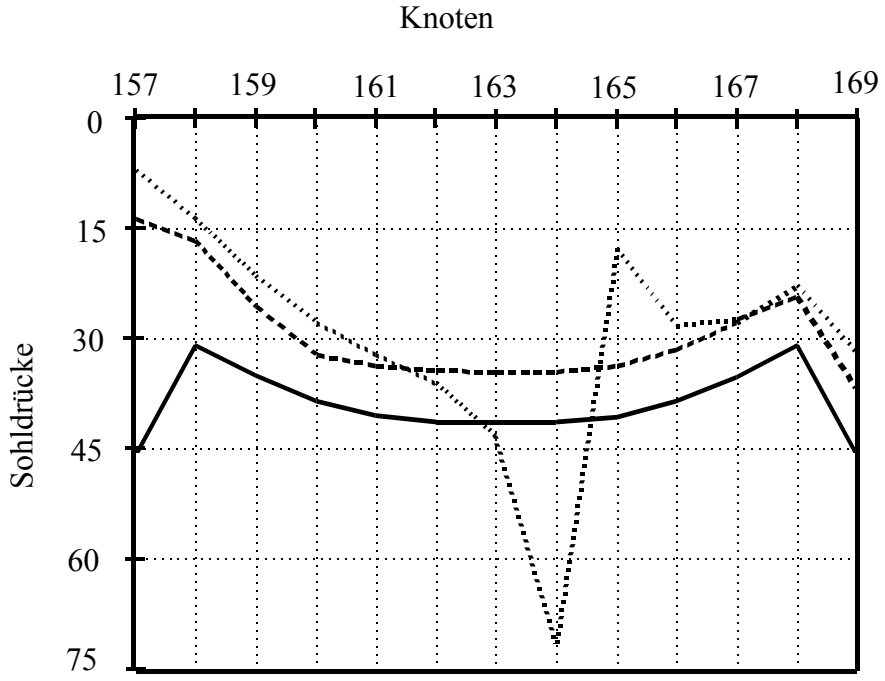


Bild 2.15 Sohldrücke [kN/m²] am Rand der Platte (Steifemodulverfahren)

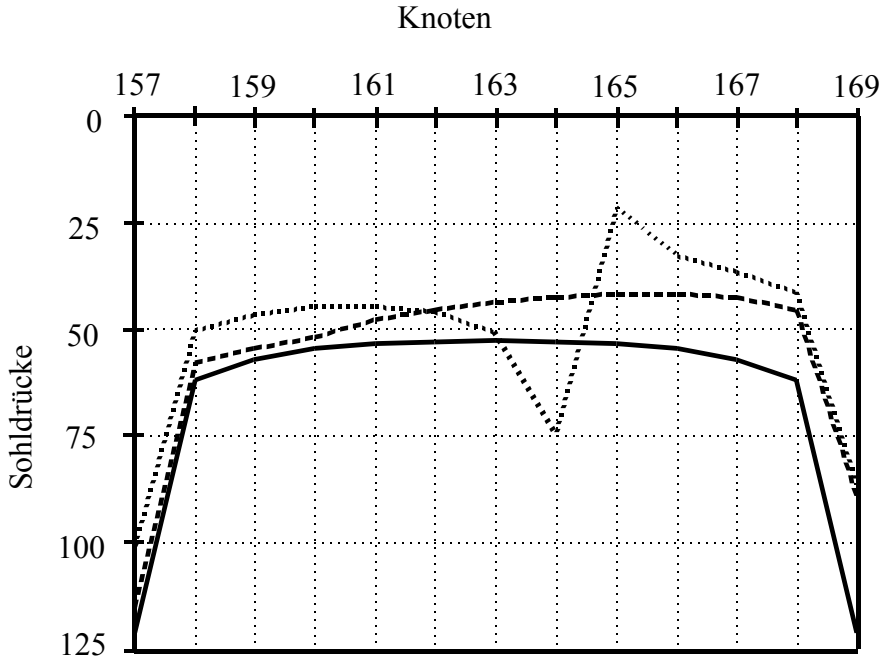


Bild 2.16 Sohldrücke [kN/m^2] am Rand der Platte (starre Platte)

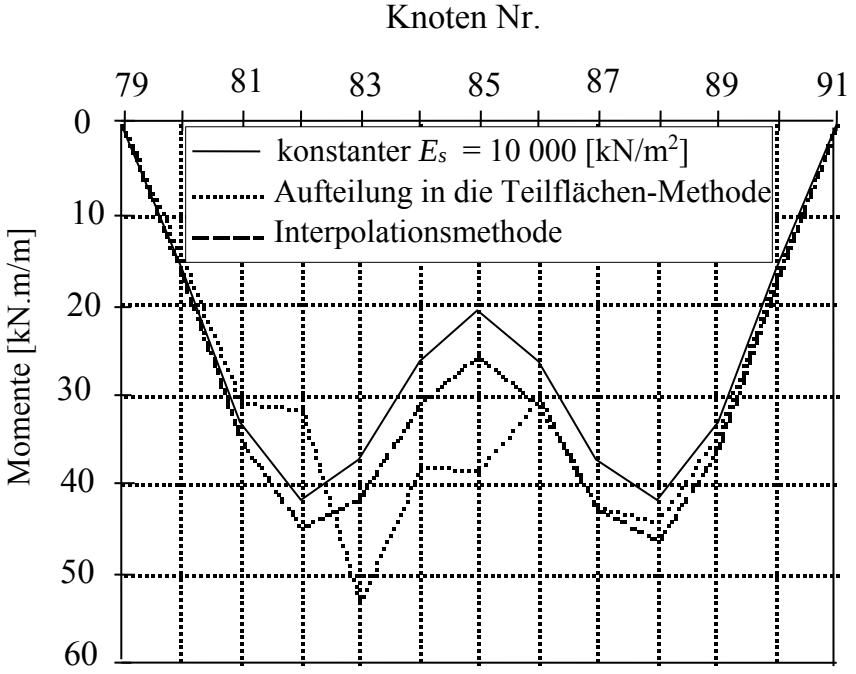


Bild 2.17 Biegemomente [kN.m/m] im Mittelschnitt der Platte (Steifemodulverfahren)

Beispiel 2.2 Berechnung einer unregelmäßigen Platte auf unregelmäßigem Baugrund

1 Aufgabenstellung

Nachfolgend wird in einem allgemeinen Beispiel (Bilder 2.18 und 2.19) gezeigt, wie sich die verschiedenen mathematischen Modelle zur Berechnung von Sohlplatten mit unregelmäßiger Grundrissform (z.B. Buchtecken und Löcher) verhalten. Im untersuchten Fall ist die Platte verschiedenen äußeren Einwirkungen ausgesetzt: Einzellasten, Linienlasten, gleichförmig verteilten Lasten und Momenten in *x*- und *y*- Richtung (Bild 2.18).

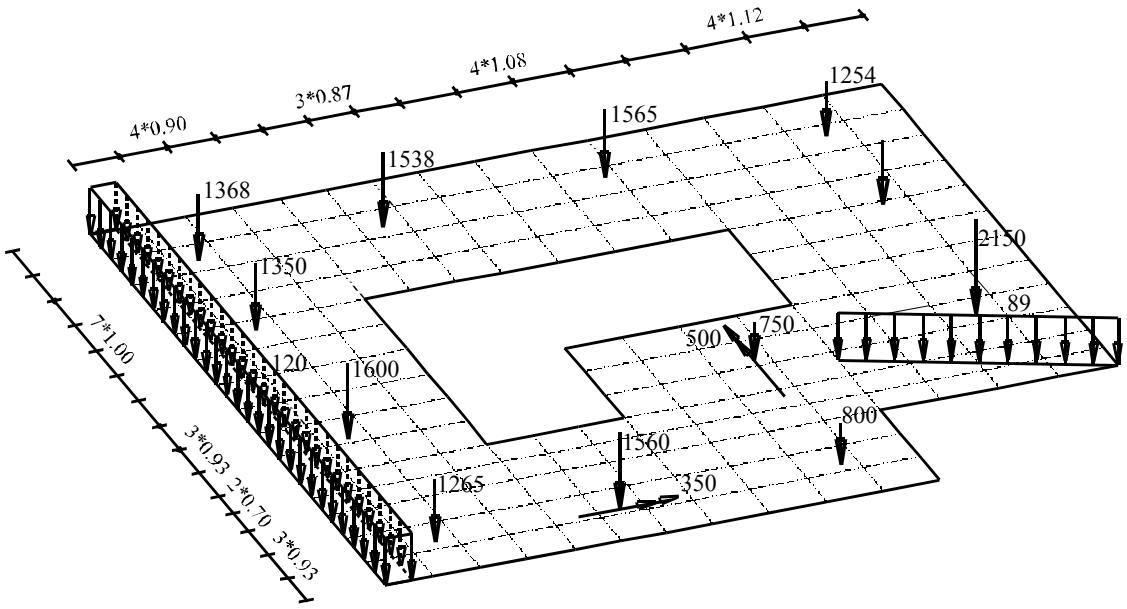
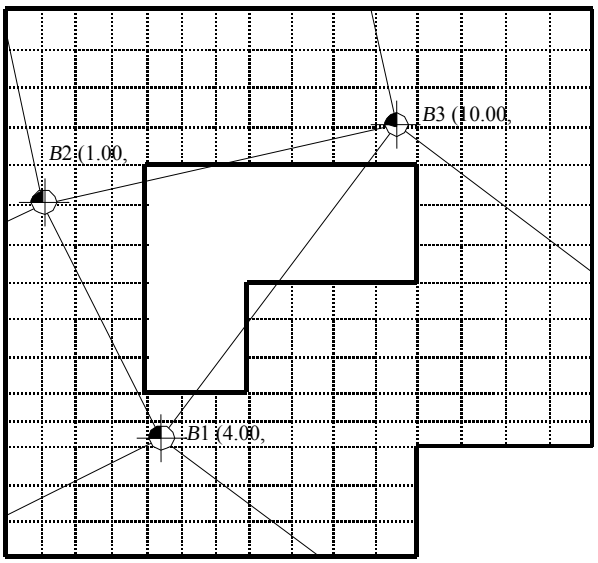


Bild 2.18 Bauwerksgrundriss und Lasten

2 Bodenkennwerte

Der Baugrund unter der Platte wird durch drei unterschiedliche Bohrprofile definiert. In jedem Bohrprofil sind mehrere Schichten mit verschiedenen Bodenmaterialien, wie in Bild 2.19 dargestellt, vorhanden. Im Programm *ELPLA* wird durch Interpolation zwischen den Bohrprofilen (Bild 2.19a) jedem Knoten ein Bettungsmodul oder ein Flexibilitätskoeffizient zugewiesen. Die *Poisson*zahl wird $\nu_s = 0.0$ [-] gesetzt und ist konstant für alle Bodenmaterialien. Der Einfluss von Erst- und Wiederbelastung und der Auftriebsdruck werden berücksichtigt. Die Gründungstiefe der Platte beträgt 2.70 [m].

a)



b)

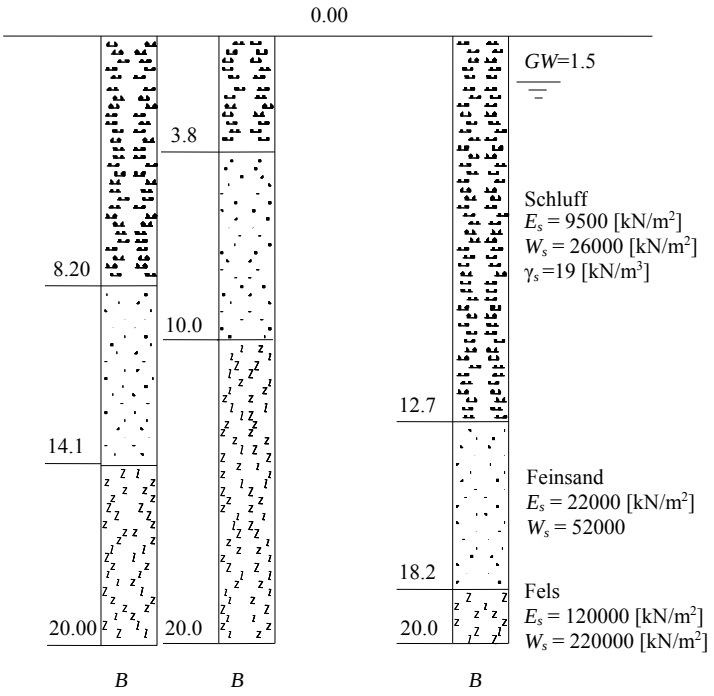


Bild 2.19 a) Lage der Bohrungen und Interpolationszonen
b) Bohrungen *B*1 bis *B*3 mit Schichtenfolgen und Bodenkenngrößen (Steifemoduli E_s, W_s und Wichten γ_s)

3 Materialkennwerte des Betons

Für Plattenmaterial und Plattendicke werden die folgenden Parameter angenommen:

Elastizitätsmodul	E_b	$= 2 \times 10^7$	[kN/m^2]
*Poisson*zahl	ν_b	= 0.25	[-]
Wichte des Betons	γ_b	= 0.0	[kN/m^3]
Plattendicke	d	= 0.5	[m]

Eigengewicht des Betons wird vernachlässigt

4 Berechnung

Die Platte wird nach 8 Berechnungsverfahren berechnet (Tabelle 2.1). Die Verfahren werden bei drei Baugrundmodellen dargestellt: Einfache Annahme, *Winkler*-Modell und Kontinuum-Modell.

Tabelle 2.1 Berechnungsverfahren

Verfahren Nr.	Verfahren
1	Einfache Annahme
2	Konstanter Bettungsmodul
3	Variabler Bettungsmodul
4	Iterativ verbesserter Bettungsmodul
5	Halbraumverfahren
6	Iteratives Steifemodulverfahren
7	Steifemodulverfahren
8	Starre Platte

Um die verschiedenen Berechnungsverfahren vergleichen zu können, wird dasselbe Beispiel mit der Plattenstatik nach der FE-Methode und mit den vorstehend genannten Berechnungsverfahren für das System Baugrund/ Bauwerk gelöst. Es werden die nachstehenden elastischen Parameter für den Boden und die Platte angenommen:

Die äquivalenten elastischen Parameter sind:

für das Halbraumverfahren 5
E_{sm} = 9500 [kN/m^2]

für den konstanten Bettungsmodul, Verfahren 2
k_{sm} = 3517 [kN/m^3]

für variable Bettungsmoduli, Verfahren 3
k_{sm1} = 5254 [kN/m^3] für Bohrprofil 1
k_{sm2} = 2982 [kN/m^3] für Bohrprofil 2
k_{sm3} = 2315 [kN/m^3] für Bohrprofil 3

5 Ergebnisse und Auswertung

Die Extremwerte der Ergebnisse sind zunächst in der Tabelle 2.2 zusammengestellt. Die Bilder 2.20 bis 2.28 zeigen die Verteilung des Sohldrucks und der Setzungen unter der Gründungsplatte für die acht benutzten Berechnungsverfahren.

Tabelle 2.2 Maximale und minimale Werte für Setzung s und Sohldruck q mit verschiedenen Berechnungsverfahren (Bild 2.20 bis Bild 2.28)

Verfahren	Nr.	$s_{max.}$ [cm]	$s_{min.}$ [cm]	$q_{max.}$ [kN/m^2]	$q_{min.}$ [kN/m^2]
Einfache Annahme	1	-	-	127	65
Konstantes Bettungsmodulverfahren	2	5.38	0.46	189	16
Variables Bettungsmodulverfahren	3	6.52	0.47	194	18
Iterativ verbessertes Bettungsmodulverfahren	4	4.42	1.15	586	19
Halbraumverfahren	5	11.28	8.51	572	16
Steifemodulverfahren	6 und 7	4.42	1.15	586	19
Starre Platte	8	4.24	1.51	560	48

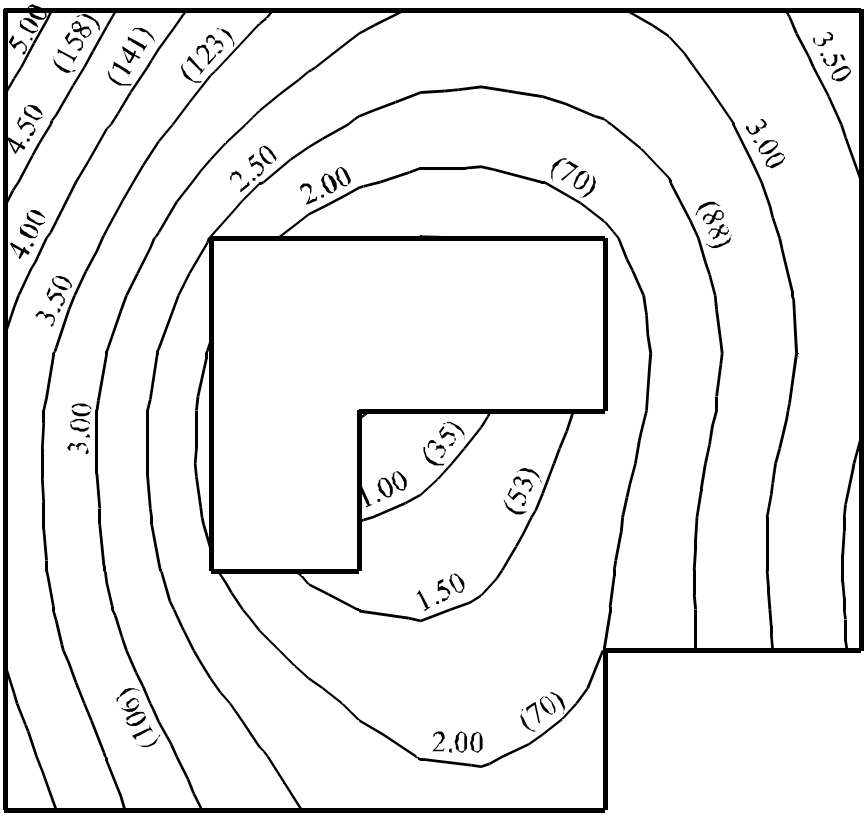


Bild 2.20 Isolinien der Setzung [cm] und der Sohldrücke [kN/m^2] bei konstantem Bettungsmodul (Verfahren 2)

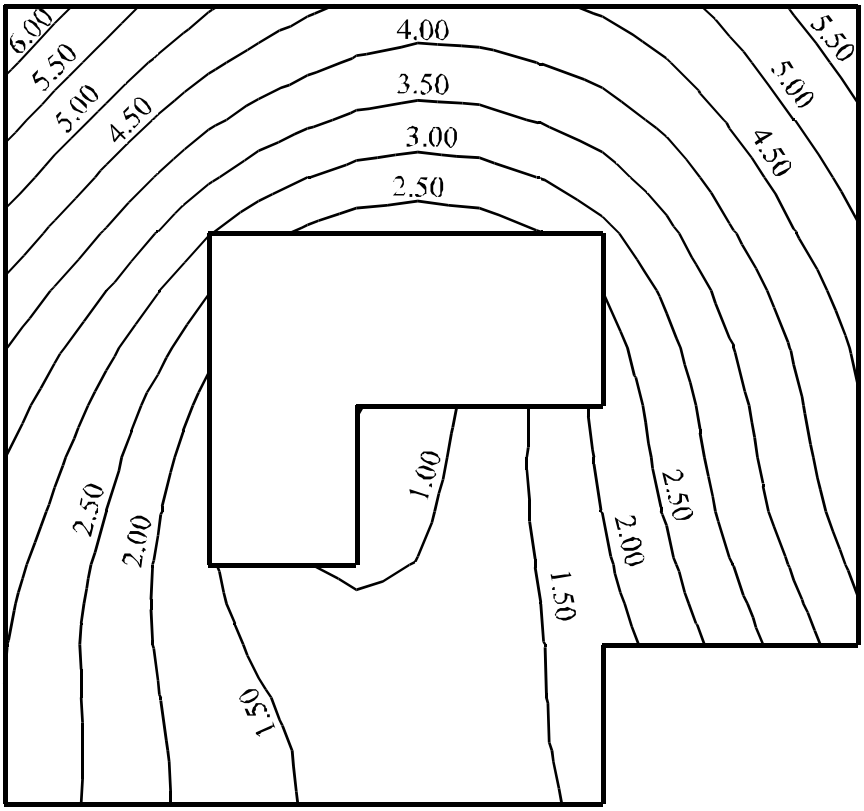


Bild 2.21 Isolinien der Setzung [cm]
Variable Bettungsmoduli (Verfahren 3)

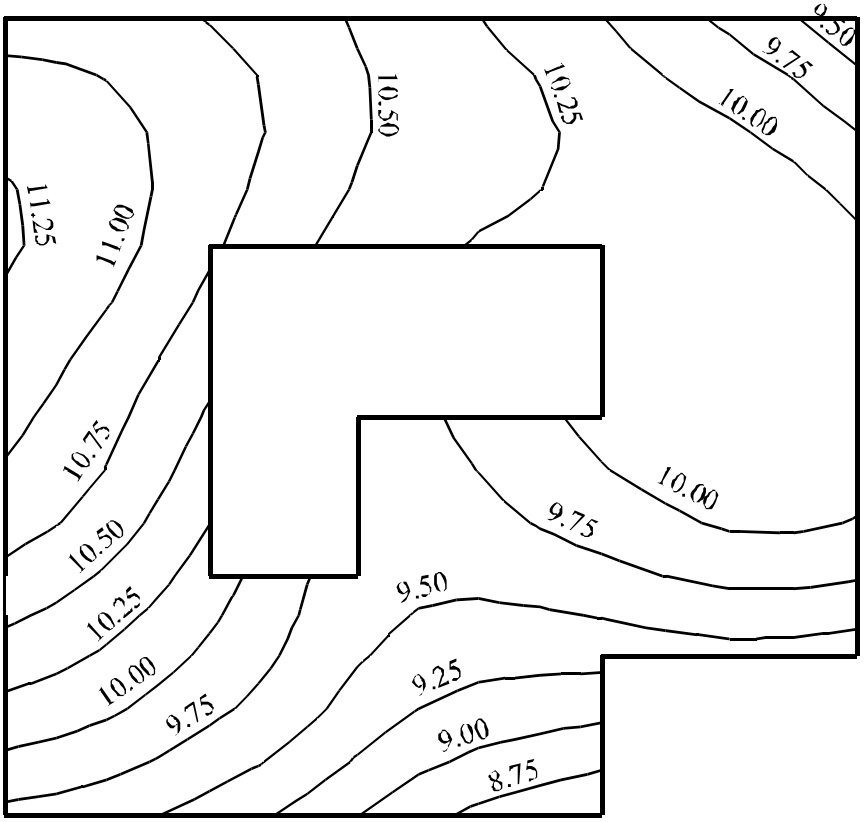


Bild 2.22 Setzungen [cm] für das Halbraumverfahren 5

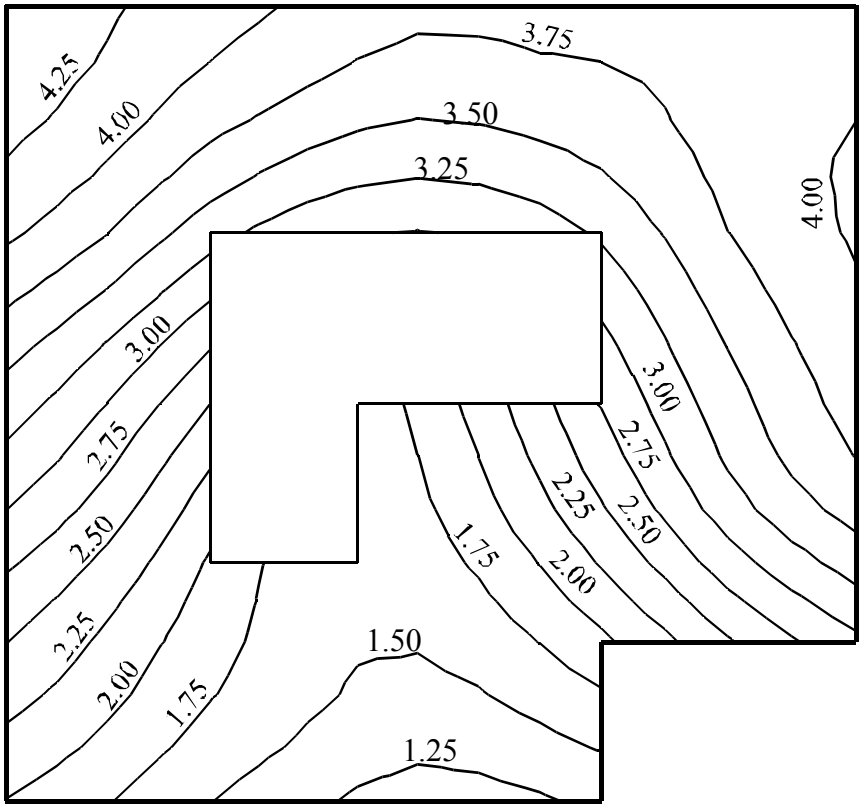


Bild 2.23 Setzungen [cm] für das Steifemodulverfahren 4, 6 und 7

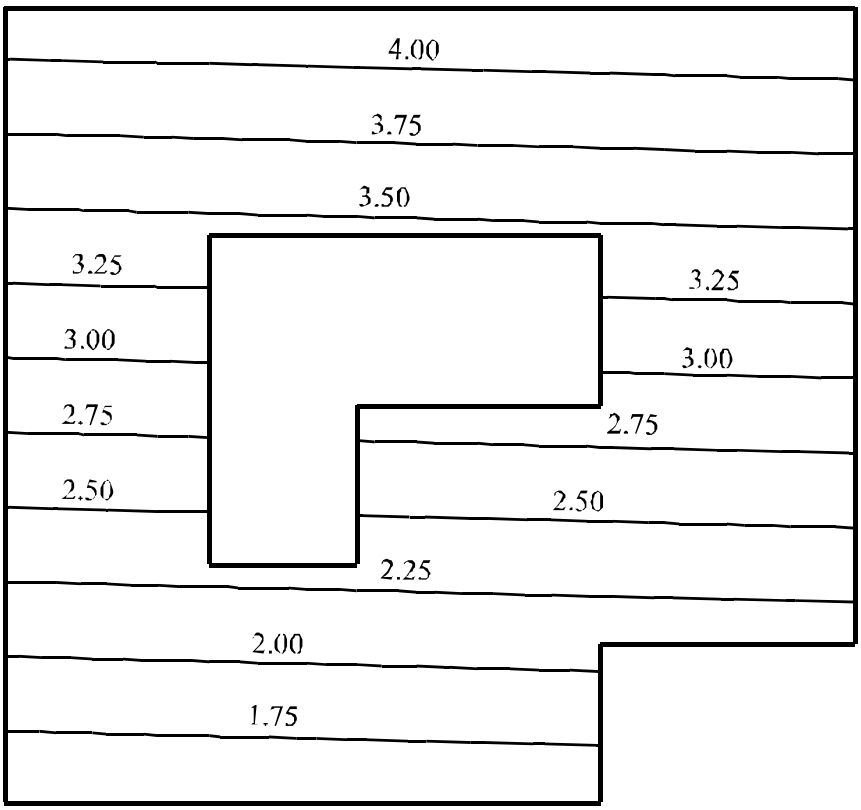


Bild 2.24 Setzungen [cm] unter der starren Platte (Verfahren 8)

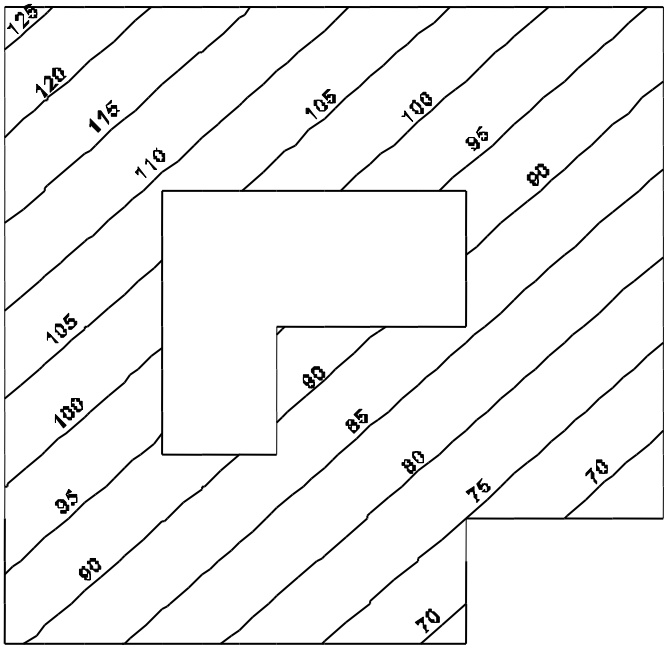


Bild 2.25 Isolinien der Sohldruckverteilung [kN/m^2] bei einfacher Annahme Spannungstrapez (Verfahren 1)

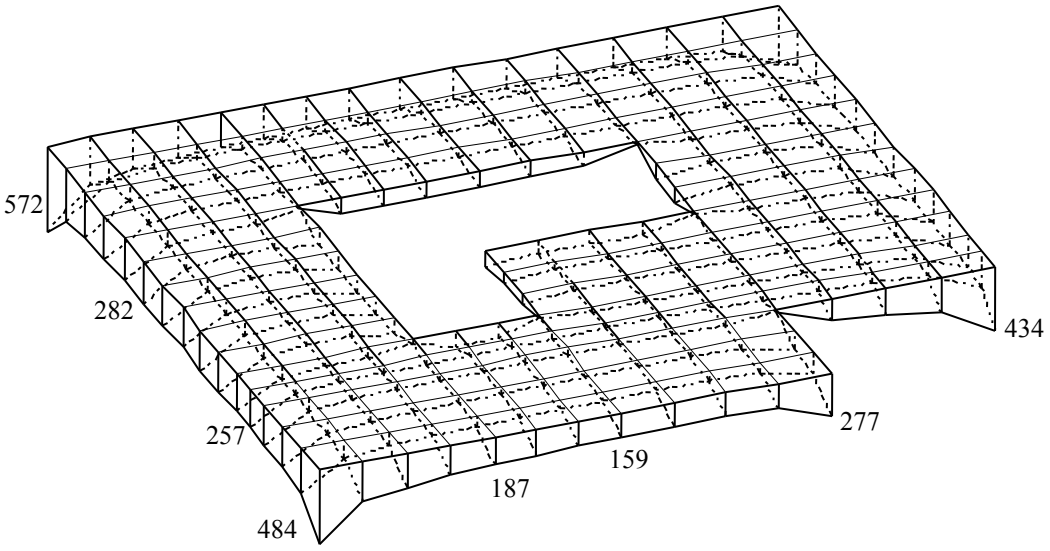


Bild 2.26 Isometrische Darstellung der Sohldrücke [kN/m^2] für das Halbraumverfahren 5

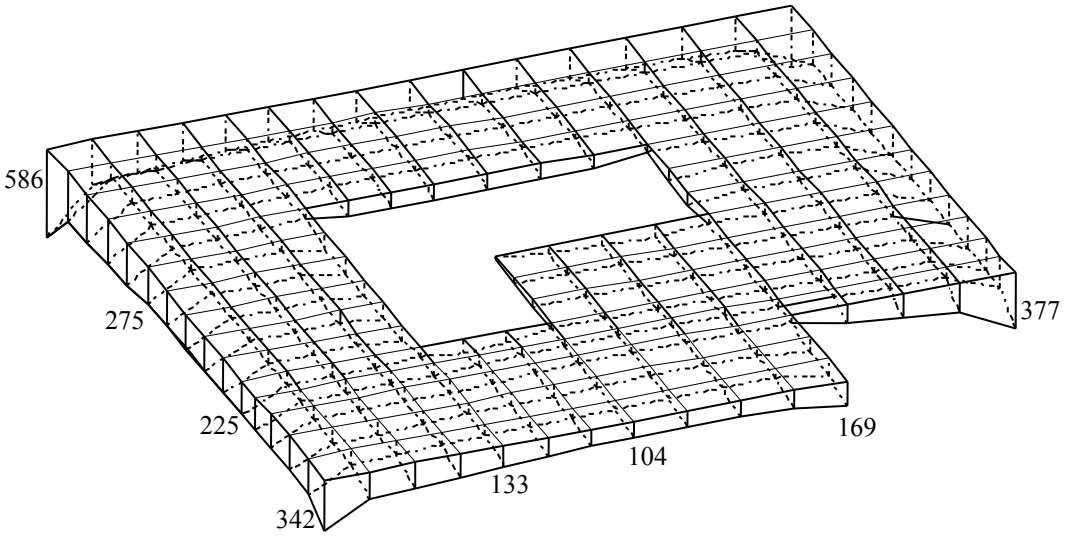


Bild 2.27 Sohldrücke [kN/m^2] für das Steifemodulverfahren 4, 6 und 7

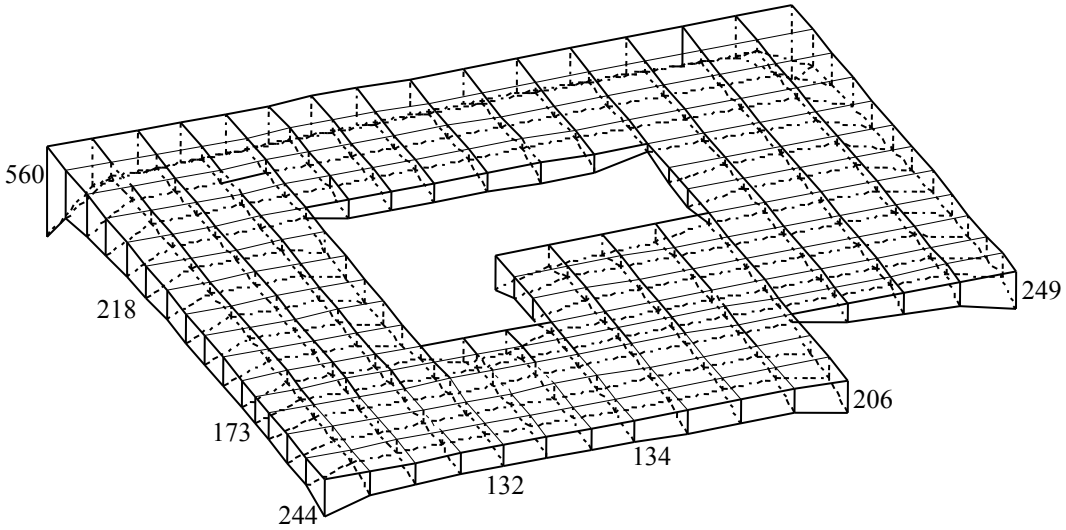


Bild 2.28 Sohldrücke [kN/m^2] unter der starren Platte (Verfahren 8)

Es wird darauf hingewiesen, dass bei der Einfachen Annahme keine Abhängigkeit des Verhaltens der Baugrundmasse von der Plattenverformung besteht und auch kein Zusammenhang zwischen der Plattenverschiebung und der Setzung. Die elastischen Parameter für den Halbraum (Verfahren 5) und für die konstanten Bettungsmoduli (Verfahren 2) gelten für die ganze Baugrundmasse. Bei dem Verfahren 3 sind die variablen Bettungsmoduli jedoch von Knoten zu Knoten verschieden. Für die beiden iterativen Verfahren 4 und 6 und für die starre Platte (Verfahren 8) auf elastischem Baugrund (Schichtenmodell) sind die elastischen Parameter dieselben und können unverändert übernommen werden. Der Einfluss der Nachbarbauwerke und der benachbarten Lasten kann nur im Fall der Verwendung des Kontinuumsmodells (Verfahren 4 bis 8) berücksichtigt werden. Der Einfluss sowohl der Bauwerkssteifigkeit als auch der Temperaturänderung wird im Fall der Einfachen Annahme (Verfahren 1) nicht berücksichtigt. Auch der Einfluss der Wiederbelastung kann nur bei Berechnungen mit Schichtenmodellen (Verfahren 4, 6, 7 und 8) berücksichtigt werden. Das Ergebnis der Berechnung der Platte ändert sich nicht für Plattendicken von $d = d_{starr}$ bis $d = \infty$ im Fall der starren Platte auf elastischem Baugrund.

Beim Bettungsmodulverfahren mit iterativer Verbesserung (Verfahren 4) und dem iterativen Steifemodulverfahren 6 bekommt man rasch Ergebnisse nach nur wenigen Schritten des Iterationsprozesses, insbesondere bei Verfahren 6. Die Ergebnisse stimmen mit denen des Eliminationsverfahrens 7 (Gleichungssystem) gut überein.

Bei Annahme des Halbraummodells (Verfahren 5) geht der Baugrund unter der Platte bis in unendliche Tiefe. Damit sind die Setzungen von der Form her ähnlich, im Einzelnen jedoch i.a. größer als bei Verwendung des Schichtenmodells (Verfahren 7), Bilder 2.22 und 2.23. Bei dem Kontinuumsmodell (Verfahren 4, 5, 6, 7 und 8) zeigt sich, dass bei nicht zu stark in der Mitte der Platte konzentrierten Lasten und nicht zu dünnen Platten die Sohldrücke in der Mitte der Platte minimal und am Rand maximal sind (Bilder 2.26, 2.27 und 2.28). Bei einfacher Annahme (Verfahren 1) nimmt die Sohldruckverteilung unter der Platte lineare Form an (Bild 2.25). Es wird darauf hingewiesen, dass die Bodensetzungen mit diesem Verfahren nicht berechnet werden können.

Nach der Annahme des *Winkler*-Modells ist die Sohldruckverteilung q_i an jedem Punkt i gleich der Setzung w_i an diesem Punkt, multipliziert mit der entsprechenden Bettungszahl k_i. Die Isolinien für die Sohldruckverteilung auf dem Baugrund werden ähnlich wie für die Setzungsverteilung sein, allerdings sollten die Werte für s_i mit k_i multipliziert werden. Deshalb werden die Isolinien sowohl für die Sohldruck- als auch für die Setzungsverteilung in eine Figur gezeichnet (Bild 2.20).

Aus Tabelle 2.2 wird ersichtlich, dass die Maximums- und Minimumswerte der Setzungen und Sohldrücke für den konstanten Bettungsmodul und den variablen Bettungsmodul fast gleich sind.

Beispiel 2.3 Berechnung von Fundamentgruppen auf unregelmäßigem Baugrund

1 Aufgabenstellung

Der Einfluss von Unregelmäßigkeiten des Baugrundmaterials auf das Verhalten von Fundamenten wird durch die Untersuchung der differentiellen Setzungen für ein System von 9 Einzelfundamenten erläutert. Von der in Bild 2.29 und Tabelle 2.3 dargestellten Fundamentgruppe sollen die Setzungen berechnet werden. Die Fundamente sind mittig belastet (einschließlich Fundamentgewicht). Die Fundamentdicke ist $d = 0.5$ [m]. Wichte des Fundaments ist $\gamma_f = 25$ [kN/m^3].

Tabelle 2.3 Belastung, Abmessungen und Ursprungskoordinaten der Fundamente

Fundament Nr.	Auflast	Abmessungen		Ursprungskoordinaten		
	P [kN]	Länge [m]	Breite [m]	x [m]	y [m]	β [°]
1	2500	2.0	2.0	1.00	1.00	0
2	900	1.5	1.5	6.25	1.25	0
3	800	1.5	1.5	11.25	1.25	0
4	2500	2.0	2.0	1.50	6.00	0
5	5400	3.0	3.0	5.00	6.00	0
6	950	1.5	1.5	11.25	6.25	0
7	5400	4.5	2.0	2.12	8.7	45
8	3000	2.5	2.0	5.75	11.00	0
9	2000	2.0	1.5	10.00	10.25	0

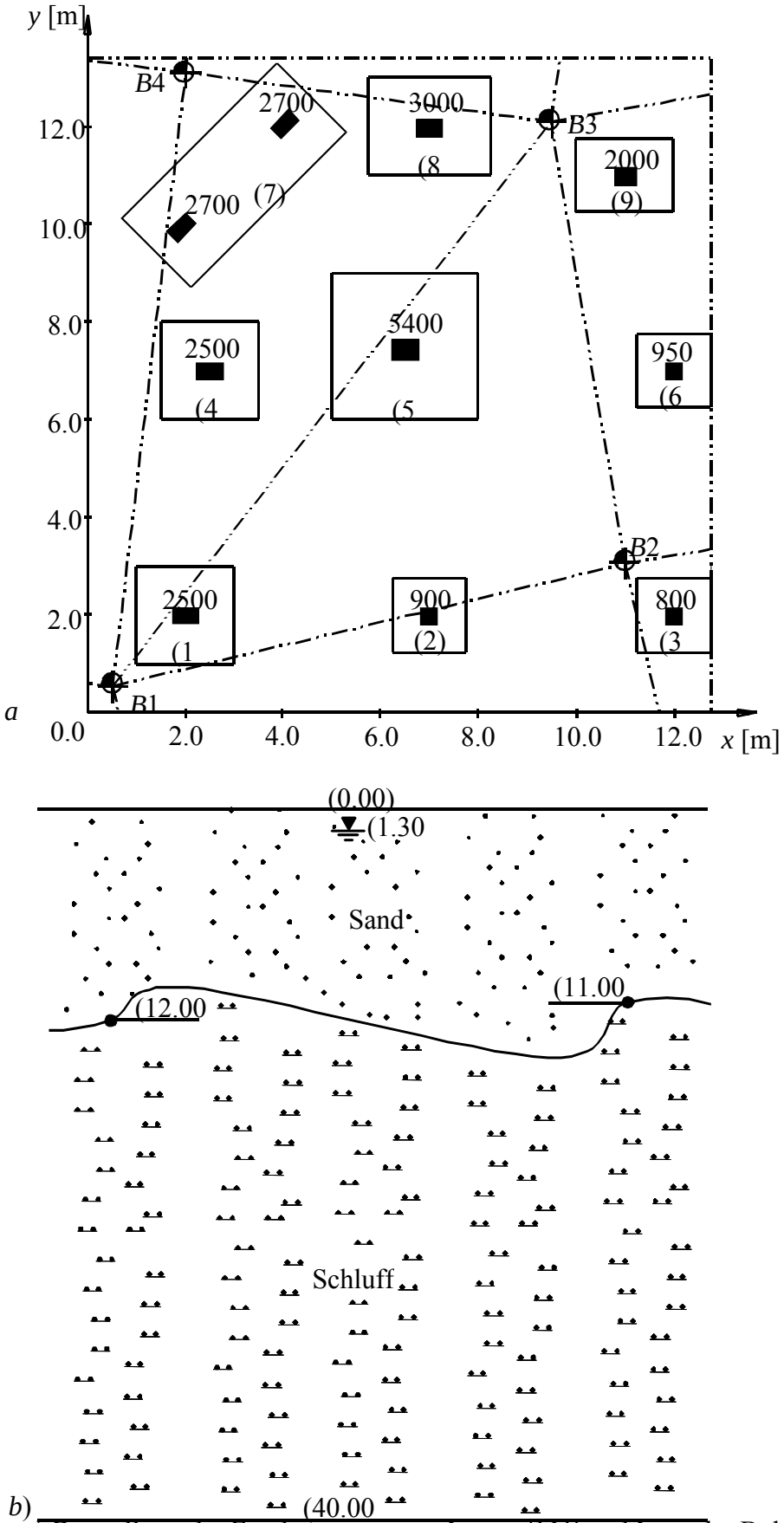


Bild 2.29 a) Darstellung der Fundamentgruppe, Lasten [kN] und Lage der Bohrprofile
b) Schnitt durch *B*1-*B*2

2 Bodenkennwerte

Der Baugrund ist ungleichförmig gelagert. Der Baugrund unter den Fundamenten wird durch vier unterschiedliche Bohrprofile definiert. In jedem Bohrprofil sind drei Schichten mit verschiedenen Bodenmaterialien vorhanden, wie in Tabelle 2.4 und Bild 2.29 dargestellt.

Die *Poisson*zahl wird $\nu_s = 0.3$ [-] gesetzt und ist konstant für alle Bodenschichten. Der Einfluss von Erst- und Wiederbelastung und der Auftriebsdruck werden berücksichtigt. Das Grundwasser steht in $GW = 1.3$ [m] Tiefe unter Gelände, während die Gründungstiefe für alle Fundamente $t_f = 2.2$ [m] beträgt. Lage der Bohrprofile und Schnitt durch *B*1-*B*2 werden in Bild 2.29 gezeigt.

Tabelle 2.4 Bodenkennwerte und Tiefe der Schichten für die vier Bohrprofile

Schicht Nr.	Benennung des Bodens	Tiefe der Schicht unter Gelände [m]	Steifemoduli für		Wichte
			Erstbelastung E_s [kN/m^2]	Wiederbelastung W_s [kN/m^2]	γ_s [kN/m^3]
1	Sand	1.3	98 000	135 000	19
2	Sand	12/11/14/10	98 000	135 000	11.2
3	Schluff	40	9 500	12 000	12

3 Berechnung und Ergebnisse

Weil die Fundamentabmessungen relativ klein sind, können die Fundamente als starre Fundamente behandelt werden, die auf zusammendrückbarem Baugrund ruhen. In diesem Fall genügt es, die Bodensetzung an den Fundamentmitten zu bestimmen. Zur guten Beurteilung der vorgeschlagenen Berechnung wurde die Fundamentgruppe viermal mal wie folgt berechnet:

i) Die Grenztiefen für alle Bohrprofile werden erhalten infolge maximaler Fundamentbelastung (Fundament 5)
ii) Die Grenztiefen für alle Bohrprofile werden erhalten infolge minimaler Fundamentbelastung (Fundament 3)
iii) Ohne Grenztiefen, die letzte Schicht für jedes Bohrprofils wird verlängert zu einer Tiefe bis 40 [m] unter Gelände
iv) Die Grenztiefen werden durch Interpolation erhalten

Es wird die Grenztiefenberechnung durchgeführt, wobei die Tiefe angenommen wird, an welcher der Wert $\zeta = 0.2$ erreicht wird.

Die Grenztiefen der Bohrprofile *B*1 bis *B*4 infolge der Fundamentbelastung 3 werden im Bild 2.30

gezeigt, während jene infolge der Belastung von Fundament 5 im Bild 2.31 gezeigt werden. Die Grenztiefen infolge der maximalen Fundamentbelastung (Fundament 5) werden von 16.90 [m] bis 17.00 [m] gezählt, während jene infolge der minimalen Fundamentbelastung (Fundament 3) von 11.31 [m] bis 11.39 [m] gezählt werden. Tabelle 2.5 zeigt die zentralen Setzungen der Fundamente für die vier Fälle. Wie erwartet, zeigen die numerischen Ergebnisse, dass die Grenztiefen einen erheblichen Einfluss auf die Setzung der Fundamente haben. Es ist aus der Tabelle 2.5 zu erkennen, dass es einen großen Unterschied zwischen den Setzungswerten bei Anwenden der vier Fälle gibt. Fall i) gibt hohe Werte der Setzung, während diese im Fall ii) klein sind, und im Fall iii) sehr hoch. Dies beweist, dass die Berechnung mit Interpolation ein geeignetes Verfahren ist, um die Wechselwirkung einer Gruppe von Fundamenten zu untersuchen. Tabelle 2.5 zeigt auch, dass die Fälle i) und ii) nur die genauen Setzungen unter den Fundamenten 5 und 3 ergeben.

Die Setzung unter dem Fundament 5 beträgt $s_5 = 3.70$ [cm], während sie unter dem Fundament 3 $s_3 = 0.48$ [cm] ist.

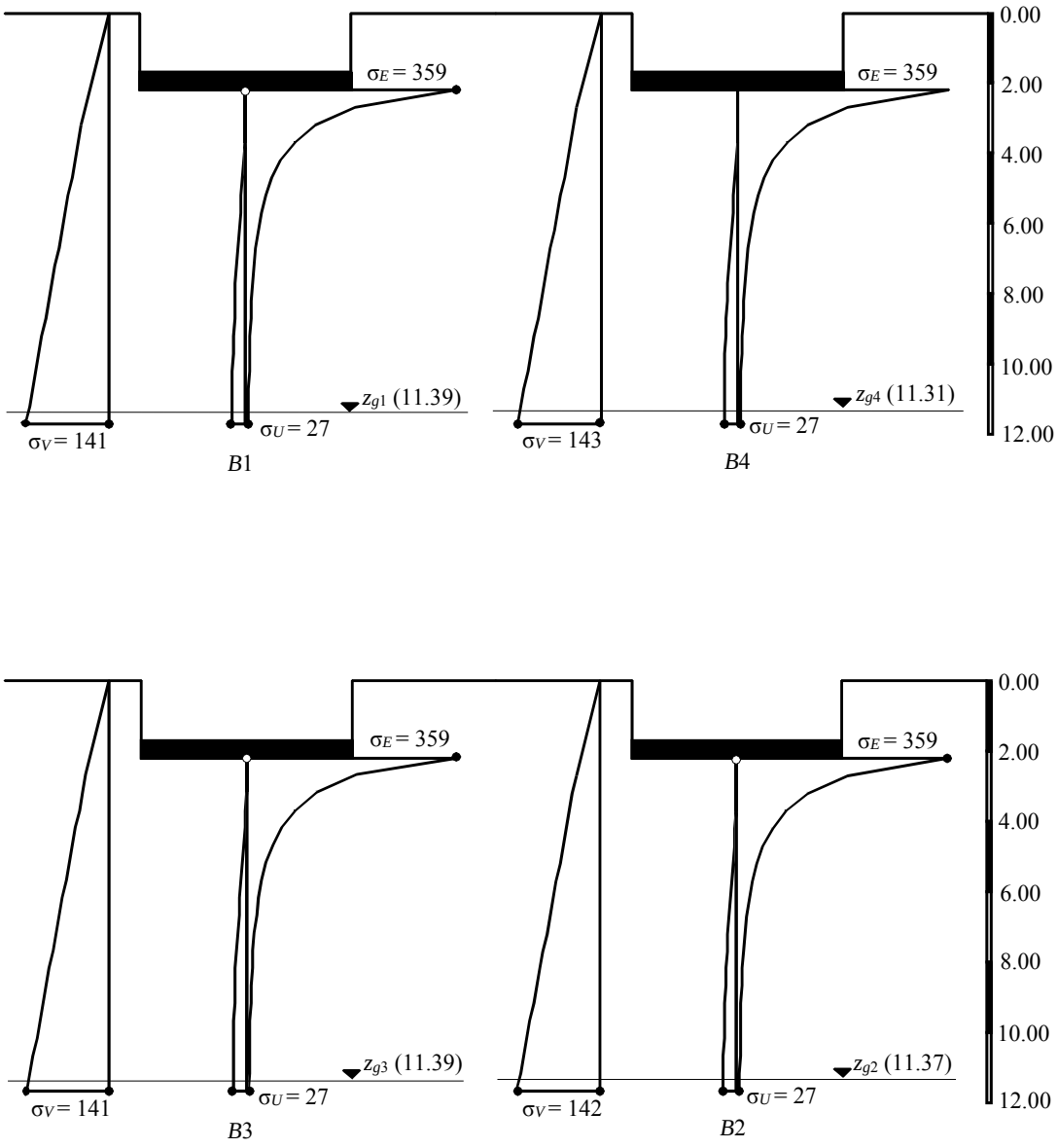


Bild 2.30 Grenztiefen der Bohrprofile *B*1 bis *B*4 infolge Belastung des Fundaments 3

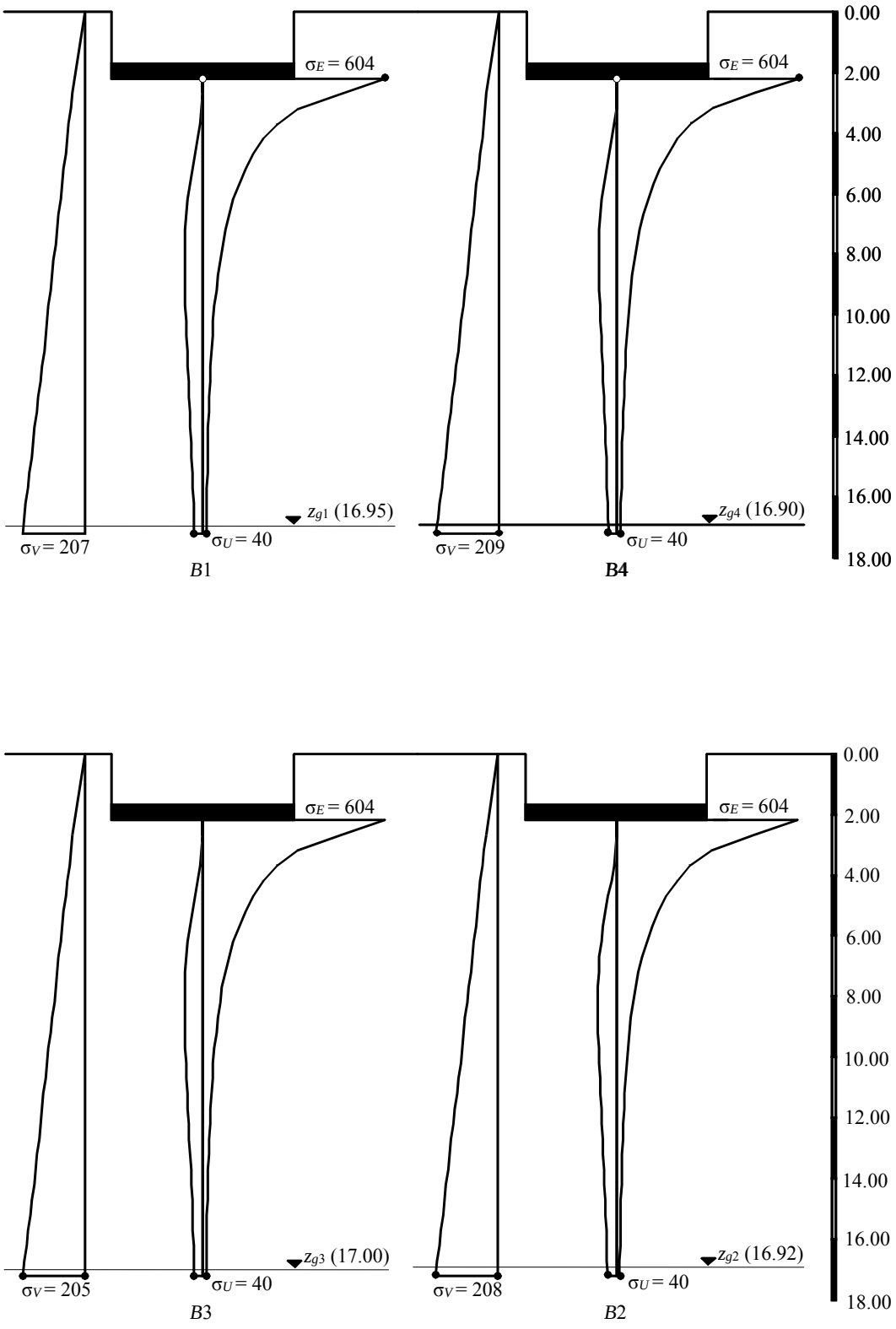


Bild 2.31 Grenztiefen der Bohrprofile *B*1 bis *B*4 infolge Belastung des Fundaments 5

Tabelle 2.5 Zentrale Setzung der Fundamente

Fundament Nr.	Berechnung der Zentralen Setzung [cm] basierend auf			
	Grenztiefen bezogen auf Fundament 5	Grenztiefen bezogen auf Fundament 3	ohne Grenztiefen z = 40 [m]	Grenztiefen bezogen auf das entsprechende Fundament
1	2.58	0.65	6.07	1.74
2	2.55	0.51	6.19	1.80
3	1.81	0.48	4.86	0.48
4	4.15	1.13	8.35	3.99
5	3.70	0.44	8.05	3.70
6	2.30	0.27	5.91	1.55
7	4.56	1.62	8.67	4.34
8	3.48	0.53	7.59	3.26
9	2.33	0.03	6.05	1.72

Abschnitt 3

Einfluss von Nachbarbauwerken und Bodensenkungen

Inhalt

3.1	Vorbemerkungen	3- 2
3.2	Einfluss von Nachbarbauwerken	3- 2
3.3	Einfluss von Bodensenkungen	3- 5
Beispiel 3.1	Setzungen außerhalb der Kontaktflächen	3- 6
Beispiel 3.2	Einfluss eines Nachbarbauwerks II auf ein bestehendes Fundament I	3-11
Beispiel 3.3	Interaktion durch Senkung der Sohlfläche eines Gebäudes bei Untertunnelung	3-17

3 Einfluss von Nachbarbauwerken und Bodensenkungen

3.1 Vorbemerkungen

In der Praxis kommt es wie bei dem Außenfundament häufig vor, dass nach Baubeginn Bauwerkslasten im Bereich der Nachbargrundstücke auf den Baugrund aufgelagert werden. Diese können einen Einfluss auf das zu untersuchende Bauwerk haben, wenn infolge der schrägen Druckausbreitung Setzungen entstehen.

Zuerst muss zwischen zwei Arten der Probleme von Nachbarbauwerken unterschieden werden:

- Das erste Problem tritt auf, wenn ein neues Bauwerk neben ein bestehendes Bauwerk gebaut wird. In diesem Fall verursacht das neue Bauwerk aufgrund der Zunahme von Spannung im Baugrund eine zusätzliche Setzung unter dem bestehenden Bauwerk

- Das zweite Problem tritt auf, wenn die Bauwerke gleichzeitig gebaut werden. In diesem Fall gibt es aufgrund der Überlappung der Spannung Wechselwirkung zwischen Fundamenten durch den Baugrund, obwohl die Bauwerke nicht statisch zusammenhängen. Die Wechselwirkung von Fundamenten verursacht zusätzliche Setzungen unter allen Fundamenten

Die Untersuchung der Wechselwirkung zwischen einem Fundament und einem Nachbarfundament oder einer externen Belastung ist von mehreren Autoren berücksichtigt worden. *Mikhaiel* (1978) zeigt eine Anwendung mit Verwendung des Halbraummodells in der Bestimmung der Wirkung von Nachbarbelastungen auf dem bestehenden Bauwerk. *Selvadurai* (1983) untersuchte die Wechselwirkung zwischen einem starren Kreisfundament und einer externen Belastung.

In diesem Abschnitt wird der Einfluss von Nachbarbauwerken und Bodensenkungen auf die Setzungen und Sohldruckverteilung untersucht.

3.2 Einfluss von Nachbarbauwerken

In Bild 3.1 ist ein Nachbarfundament *B* eingezeichnet. Dieses Fundament verursacht einen zusätzlichen Setzungsanteil auf das untersuchte Fundament *A*. Der Einfluss auf die Setzung und Sohldruckverteilung soll nachfolgend untersucht werden.

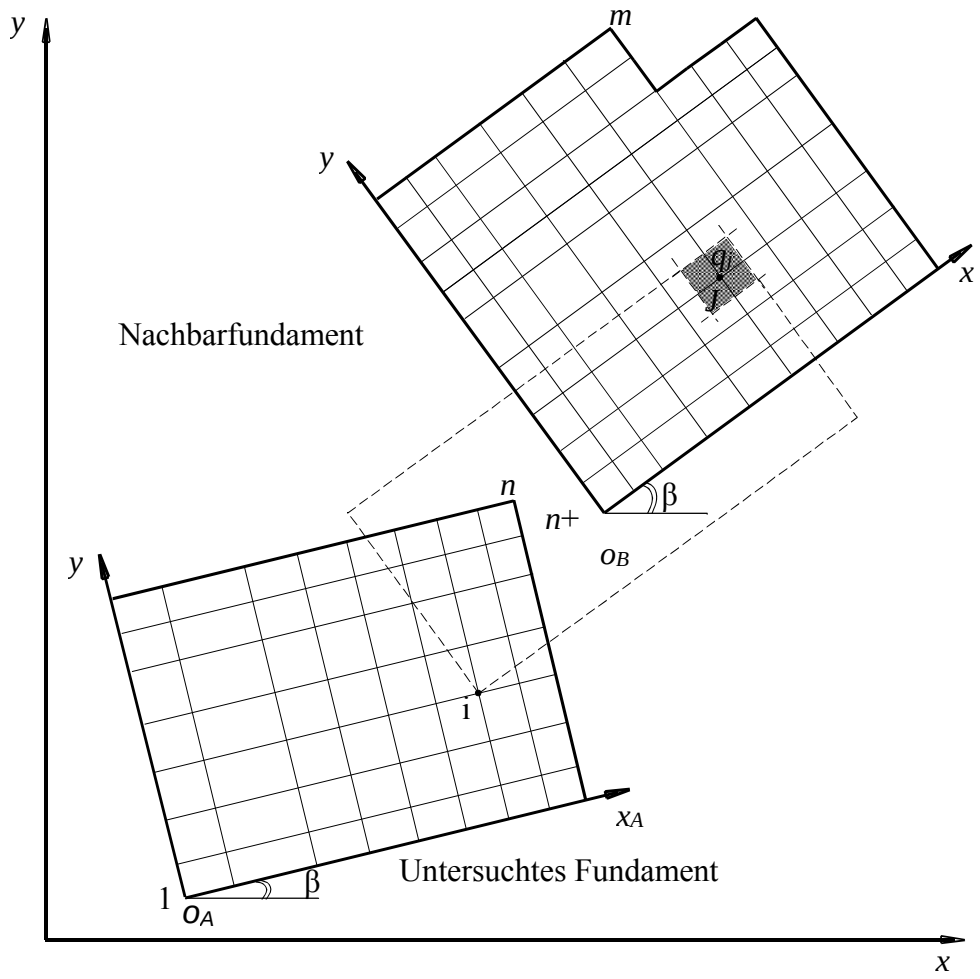


Bild 3.1 Grundriss des zu untersuchenden Fundaments mit Nachbarfundament

Zunächst wird für den *i*-ten Knoten der Setzungsanteil $s_{i.D}$ aus der Drucküberschneidung der Nachbarbauwerke errechnet:

$$s_{i.D} = \sum_{r=n+1}^{r=m} c_{i,\,n+1}\, Q_{n+r} \tag{3.1}$$

wobei:

$c_{i,\,n+r}$ Flexibilitätskoeffizienten für die Stelle *i* infolge Einheitsbelastung im Feld $n + r$ [m/kN]
Q_{n+r} Sohlkraft im Knoten $n + r$ [kN]
r Knoten-Nr. im Nachbarfundament *B*

Im Bild 3.1 ist die Nummer des Nachbarbauwerks $a = 1$ und läuft von den Element-Nummern $j = n + 1$ bis *m*.

Die Gesamtsetzung s_i des Fundaments *A* im Knoten *i* ist:

$$s_i = s_{i.o} + s_{i.D} \tag{3.2}$$

wobei:

$s_{i.o}$ Setzung im Knoten *i* aufgrund der Spannung aus untersuchtem Fundament *A*

Summengleichungen der Setzungen:

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= c_{1,1}Q_1 + c_{1,2}Q_2 + c_{1,3}Q_3 + \ldots + c_{1,n}Q_n + s_{1.D} \\ s_2 &= c_{2,1}Q_1 + c_{2,2}Q_2 + c_{2,3}Q_3 + \ldots + c_{2,n}Q_n + s_{2.D} \\ s_3 &= c_{3,1}Q_1 + c_{3,2}Q_2 + c_{3,3}Q_3 + \ldots + c_{3,n}Q_n + s_{3.D} \\ &\\ s_n &= c_{n,1}Q_1 + c_{n,2}Q_2 + c_{n,3}Q_3 + \ldots + c_{n,n}Q_n + s_{n.D} \end{aligned}\right\} \quad (3.3)$$

oder in Matrizenform geschrieben:

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \\ \\ \ldots \\ s_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & \ldots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & \ldots & c_{2,n} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & \ldots & c_{3,n} \\ & & & & \\ & & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & c_{n,3} & \ldots & c_{n,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \\ \\ \ldots \\ Q_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} s_{1.D} \\ s_{2.D} \\ s_{3.D} \\ \\ \\ \ldots \\ s_{n.D} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

oder:

$$\{s\} = [c]\{Q\} + \{s_D\} \quad (3.5)$$

wobei:
$\{s\}$ Gesamtsetzungsvektor des untersuchten Fundaments *A*
$\{s_D\}$ Vektor der zusätzlichen Setzung aufgrund der Spannung aus Nachbarfundament *B*
$\{Q\}$ Vektor der Sohlkräfte des untersuchten Fundaments *A*
$[c]$ Flexibilitätsmatrix des Bodens des untersuchten Fundaments *A*

Durch Inversion der Matrix $[c]$ erhält man:

$$\{Q\} = [k_s]\{s\} + [k_s]\{s_D\} \quad (3.6)$$

Dann ist die Systemgleichung des untersuchten Fundaments *A* aufgrund der Einflüsse vom Nachbarfundament in Matrizenform:

$$\left[[k_p] + [k_s]\right]\{\delta\} = \{P\} + [k_s]\{s_D\} \quad (3.7)$$

wobei:
$[k_p]$ Steifigkeitsmatrix des untersuchten Fundaments *A*
$[k_s]$ Steifigkeitsmatrix des Bodens für das untersuchte Fundament *A*
$\{\delta\}$ Vektor der Knotenverschiebungen für untersuchtes Fundament *A*
$\{P\}$ Vektor der Auflasten auf untersuchtem Fundament *A*

3.3 Einfluss von Bodensenkungen

Es können ferner Bodensenkungen $s_{i.V}$ des Baugrunds im Knoten i infolge lotrechter Verschiebungen durch den Einfluss unterirdischer Hohlraumbauten (z.B. durch Bergbau, Untertunnelungen oder lastunabhängige Kriechverformungen des Baugrunds) auftreten. Dann ist die Gesamtsenkung $s_{i.A}$ des Fundaments A im Knoten i aus Außeneinflüssen:

$$s_{i.A} = s_{i.V} + s_{i.D} \tag{3.8}$$

Dann wird Gl. 3.7 allgemein geschrieben:

$$\left[\left[k_p\right]+\left[k_s\right]\right]\{\delta\} = \{P\}+\left[k_s\right]\{s_A\} \tag{3.9}$$

wobei:
$\{s_A\}$ Vektor der Gesamtsenkung des Fundaments A aus Außeneinflüssen

Beispiel 3.1 Setzungen außerhalb der Kontaktflächen

1 Aufgabenstellung

Neben der Möglichkeit zur Erfassung der gegenseitigen Beeinflussung verschiedener benachbarter Konstruktionen lässt sich der beschriebene Algorithmus auch zur Berechnung von Setzungen außerhalb der Kontaktflächen heranziehen. Durch die Verwendung von zwei verschiedenen und voneinander völlig unabhängigen Netzen zur Berechnung der Platte und eines bestimmten zu untersuchenden unbelasteten Bereiches außerhalb der Kontaktfläche kann den jeweiligen Bedürfnissen durch entsprechende Diskretisierung Rechnung getragen werden.

Bild 3.2 zeigt eine unregelmäßige Platte mit Kontaktbereich I und einem Loch darin. Es ist erforderlich, die Setzungen an der Fläche II um die Platte herum und am Loch der Fläche III zu berechnen.

2 Bodenkennwerte

Die Plattengründung (Kontaktfläche I) und die Nahbereiche II und III liegen auf einem gleichmäßigen Untergrund mit Steifemodul $E_s = 9\,500$ [kN/m^2]. Die *Poisson*zahl wird $\nu_s = 0.0$ [-] gesetzt.

3 Materialkennwerte des Betons und Plattendicke

Für Plattenmaterial und Plattendicke werden die folgenden Parameter angenommen:

Elastizitätsmodul	$E_b = 2 \times 10^7$	[kN/m^2]
*Poisson*zahl	$\nu_b = 0.25$	[-]
Wichte	$\gamma_b = 0$	[kN/m^3]
Fundamentdicke	$d = 0.7$	[m].

Eigengewicht des Betons wird vernachlässigt

4 Lasten

Die Platte wird durch 12 Einzellasten beansprucht (Bild 3.2).

5 Mathematisches Modell

Die Beeinflussung von umliegenden Strukturen und externen Belastungen kann nur für das Kontinuum-Modell (Verfahren 4, 5, 6, 7 und 8) betrachtet werden. Dieses basiert darauf, dass die Setzung an einem Knoten von Sohldrücken an all den anderen Knoten beeinflusst wird. In diesem Beispiel wurde das Halbraumverfahren (Verfahren 5) gewählt, um die Platte I und die Außenbereiche II und III zu berechnen.

6 Berechnung

Um die Berechnung durchzuführen, werden die Platte I und die Außenbereiche II und III in zwei unabhängige Elementnetze unterteilt, wie im Bild 3.2b gezeigt. Zwei unabhängige Namen werden gewählt, um die Daten der Platte und die Außenbereiche zu definieren. Die Ursprungskoordinaten der Platte sind $(x_o, y_o) = (8.0, 8.0)$, hingegen für die Außenbereiche (0.0, 0.0).

Die Berechnung der Platte I wird zuerst durchgeführt, um die Sohldrücke darunter zu erhalten. Aufgrund dieser Sohldrücke treten Setzungen nicht nur unter der Platte I auf, sondern auch an der Außenseite unter den Bereichen II und III. Dann sind die Setzungen der Außenbereiche II und III bestimmt.

7 Ergebnisse

In den Bildern 3.3 und 3.4 sind die zu erwartenden Setzungen und die Sohldruckverteilung der Gründungsplatte (Kontaktfläche I) dargestellt.

Die Isolinien der Setzungen der Nahbereiche II und III sind in dem Bild 3.5 dargestellt. Im Bild 3.5a werden die Setzungen in einem Mittelschnitt durch die Platte I und des Nahbereiches II und III (Schnitt s-s) dargestellt.

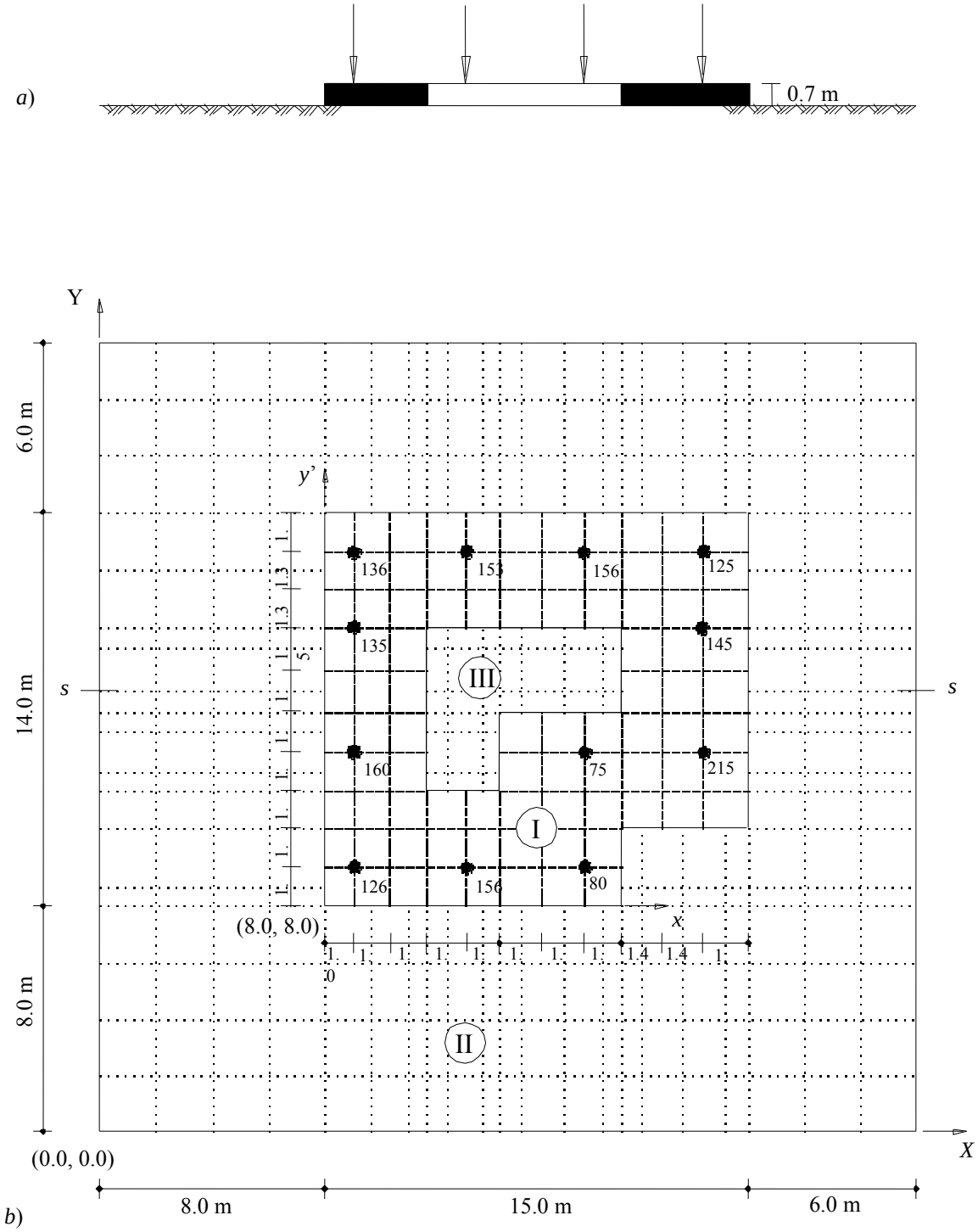


Bild 3.2 a) Längsschnitt *s*-*s* durch die Sohlplatte
b) Diskretisierung der Kontaktfläche I mit Lasten [kN] und der Nahbereiche II und III

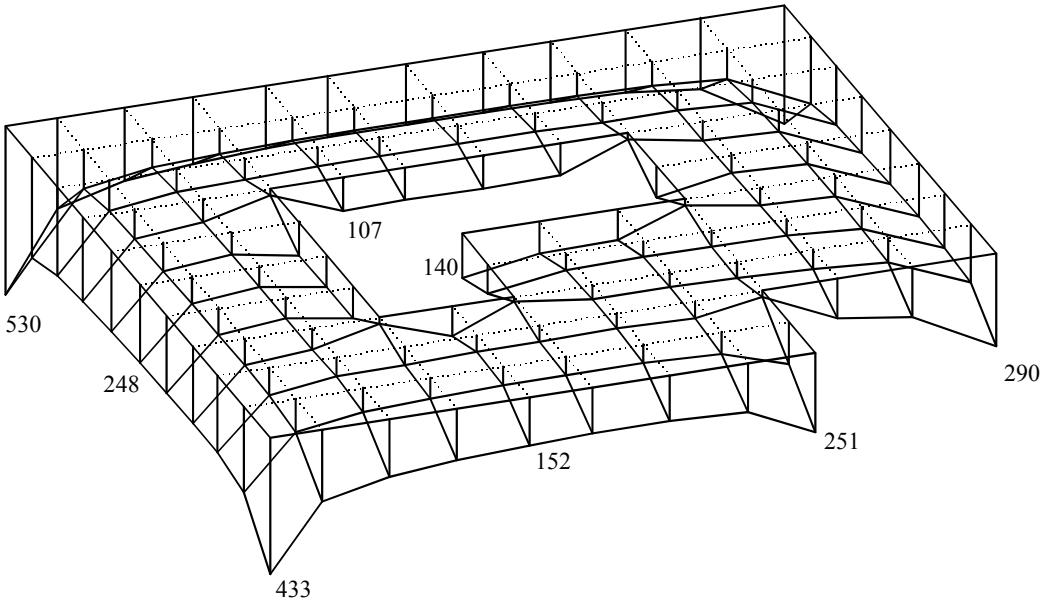


Bild 3.3 Sohldrücke [kN/m^2] unter der Platte

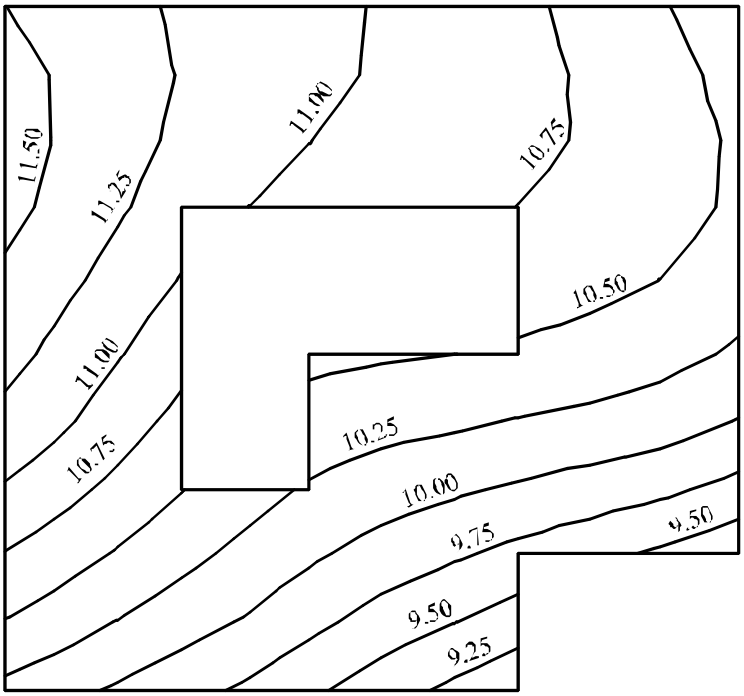
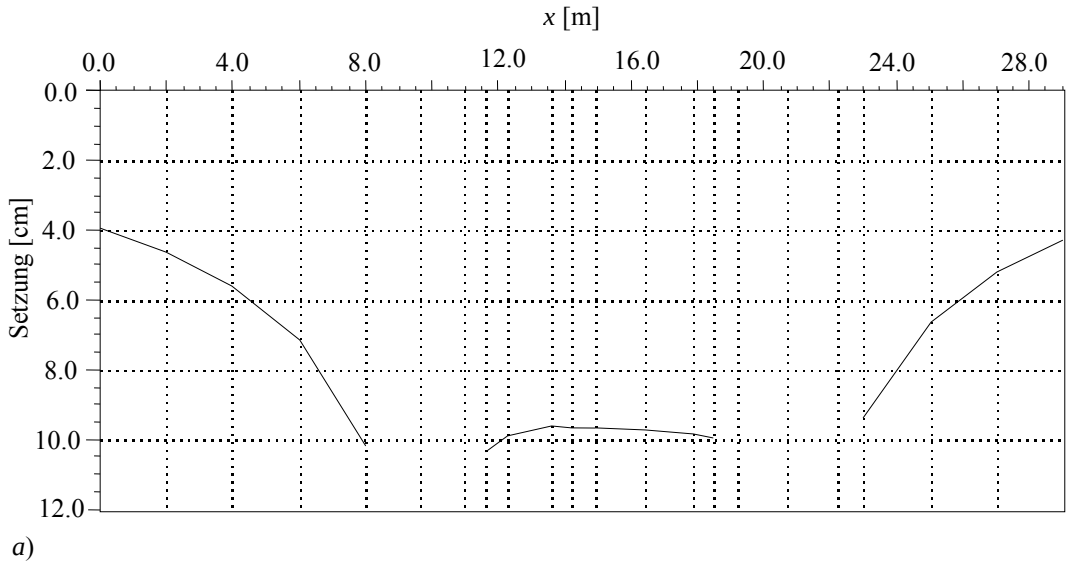
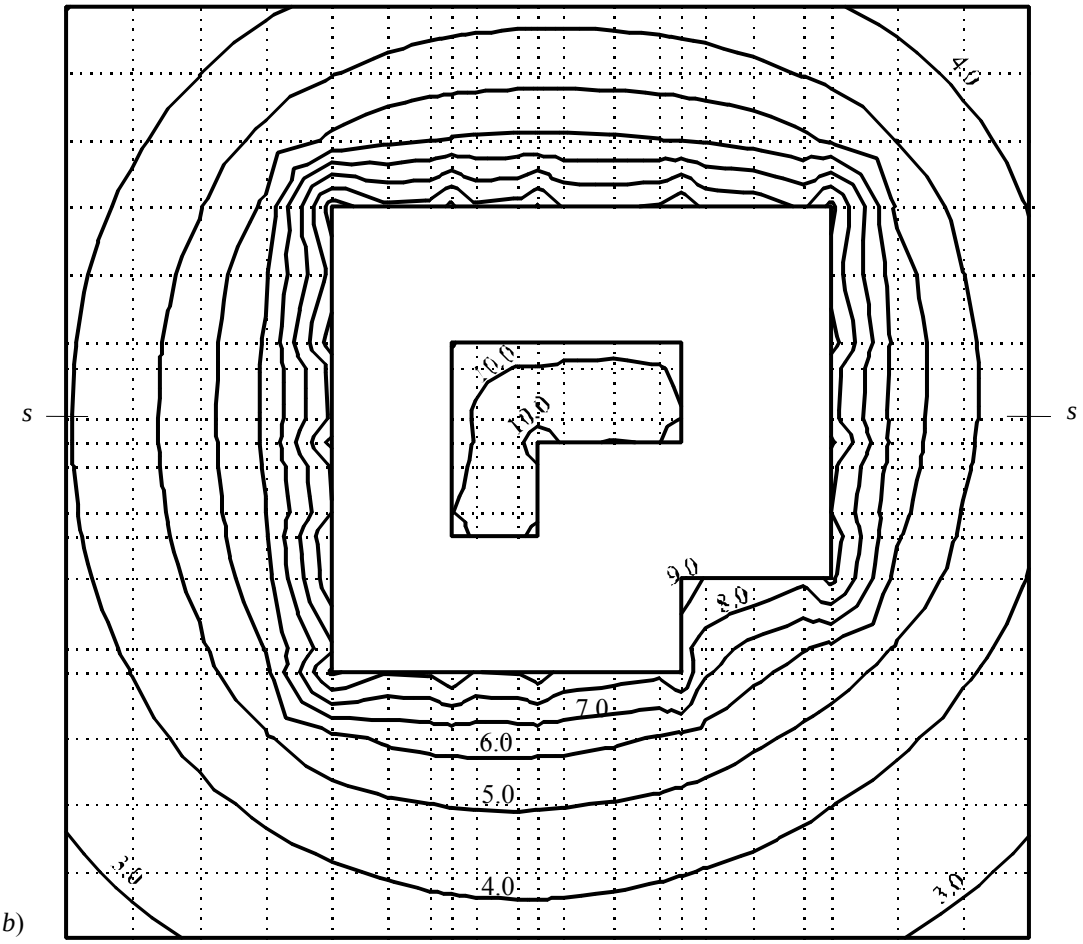


Bild 3.4 Isolinien der Setzungen [cm] unter der Platte



a)



b)

Bild 3.5 a) Setzungen aus benachbarten Platten im Schnitt *s-s*
b) Isolinien der Setzungen [cm] der Nahbereiche II und III

Beispiel 3.2 Einfluss eines Nachbarbauwerks II auf ein bestehendes Fundament I

1 Aufgabenstellung

Zur Erläuterung des Einflusses eines Nachbarbauwerks werden im Beispiel die Einflüsse eines Neubaus auf einen Altbau untersucht. Die Aufgabenstellung geht aus dem Bild 3.6 hervor.

2 Bodenkennwerte

Die Bauwerke sind auf steifplastischem Ton (Mächtigkeit 5.70 [m]) gegründet, Bild 3.6a.
Für die Bodenkennwerte gilt:

Steifemodul für Erstbelastung	E_s	= 5 000	[kN/m^2]
Steifemodul für Wiederbelastung	W_s	= 15 000	[kN/m^2]
Wichte	γ_s	= 18	[kN/m^3]
*Poisson*zahl	ν_s	= 0.0	[-]

3 Materialkennwerte des Betons

Für Plattenmaterial und Plattendicke werden die folgenden Parameter angenommen:

Elastizitätsmodul	E_b	= 2 × 10^7	[kN/m^2]
*Poisson*zahl	ν_b	= 0.25	[-]
Wichte des Betons	γ_b	= 0.0	[kN/m^3]
Plattendicke	d	= 1.0	[m]

Eigengewicht des Betons wird vernachlässigt

4 Mathematisches Modell

Die Beeinflussung von umliegenden Strukturen und externen Belastungen kann nur für das Kontinuum-Modell (Verfahren 4 bis 8) betrachtet werden. Dieses basiert darauf, dass die Setzung an einem Knoten von Sohldrücken an all den anderen Knoten beeinflusst wird. In diesem Beispiel wurde das iterative Steifemodulverfahren für die elastische Platte (Verfahren 7) gewählt, um die zwei Gebäude zu berechnen.

5 Berechnung

Zur Berechnung wird jedes Fundament in Elemente mit 189 Knoten aufgeteilt, wie im Bild 3.6b gezeigt. Zwei unabhängige Namen definieren die Daten der zwei gewählten Fundamente. Die Daten für die zwei Fundamente sind außer den Ursprungskoordinaten ganz ähnlich. Der Koordinatenursprung ist $(x_o, y_o) = (10.28, 0.0)$ für den Neubau I und $(x_o, y_o) = (0.0, 0.0)$ für den Altbau II. Obwohl die beiden Fundamente ohne Abstand zueinander liegen, wird zwischen ihnen eine kleine Entfernung von 20 [cm] angenommen, um Überlappen ihrer Knoten zu vermeiden.

Es wird zuerst die Berechnung des Neubaus II durchgeführt, um die Sohldrücke unter dem Fundament zu erhalten. Aufgrund dieser Sohldrücke treten Setzungen nicht nur unter dem Neubau II, sondern auch unter dem Altbau I auf. Ferner werden unter der Annahme, dass links neben dem Altbau ein Neubau in gleicher Konstruktionsform und Belastung errichtet wird, die Sohldrücke und Setzungen des Altbaus untersucht. Hierbei werden zusätzlich zu den 189 Knoten des Altbaus von weiteren 189 Knoten des Neubaus die Setzungseinflüsse auf den Altbau berechnet und ihr Einfluss auf die Sohldruckverteilung und die Setzungen untersucht.

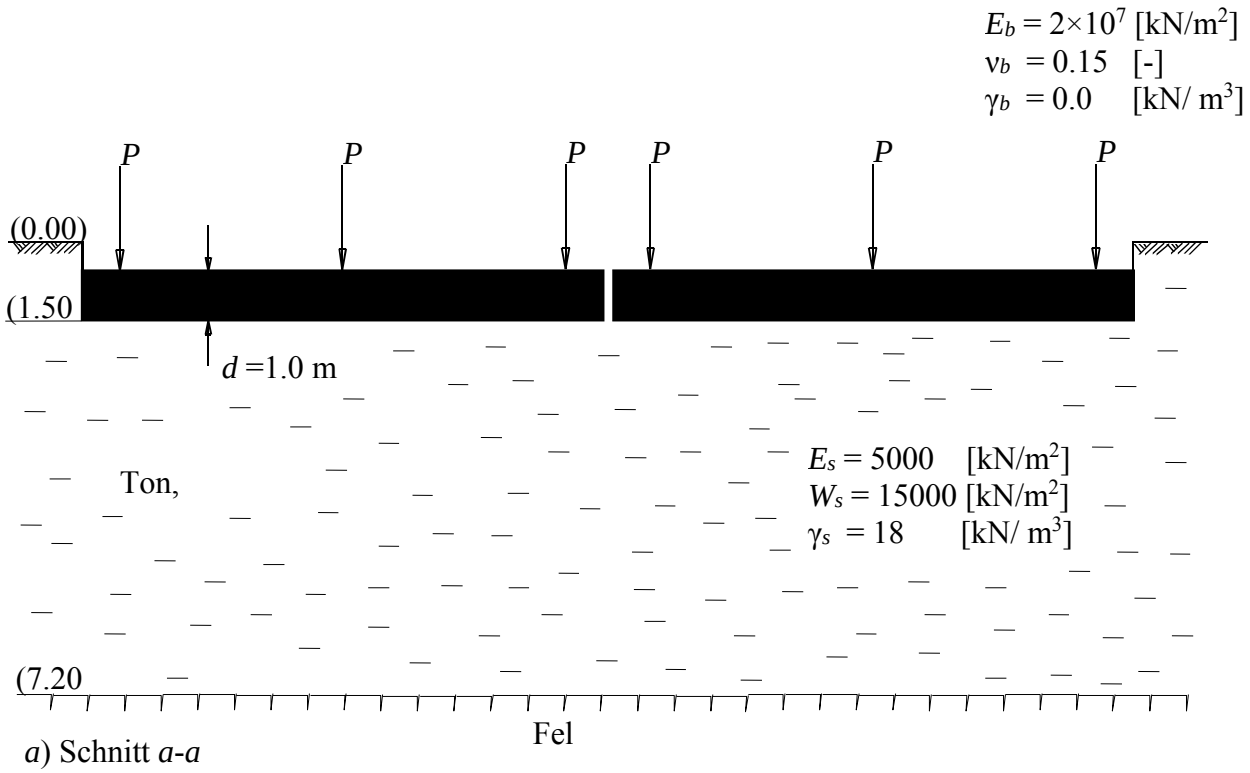
6 Ergebnisse und Auswertung

Im Bild 3.7a sind die Ergebnisse der Sohldruckberechnung zu sehen. Auf dem oberen Teil des Bildes sind die Sohldrücke aufgezeichnet, die ursprünglich im Altbau vorhanden waren. Wie zu erkennen ist, sind die Sohldrücke den Erwartungen entsprechend symmetrisch verteilt, weil das Bauwerk unter der Annahme berechnet wurde, dass die Resultierende R der Lasten zentrisch angreift.

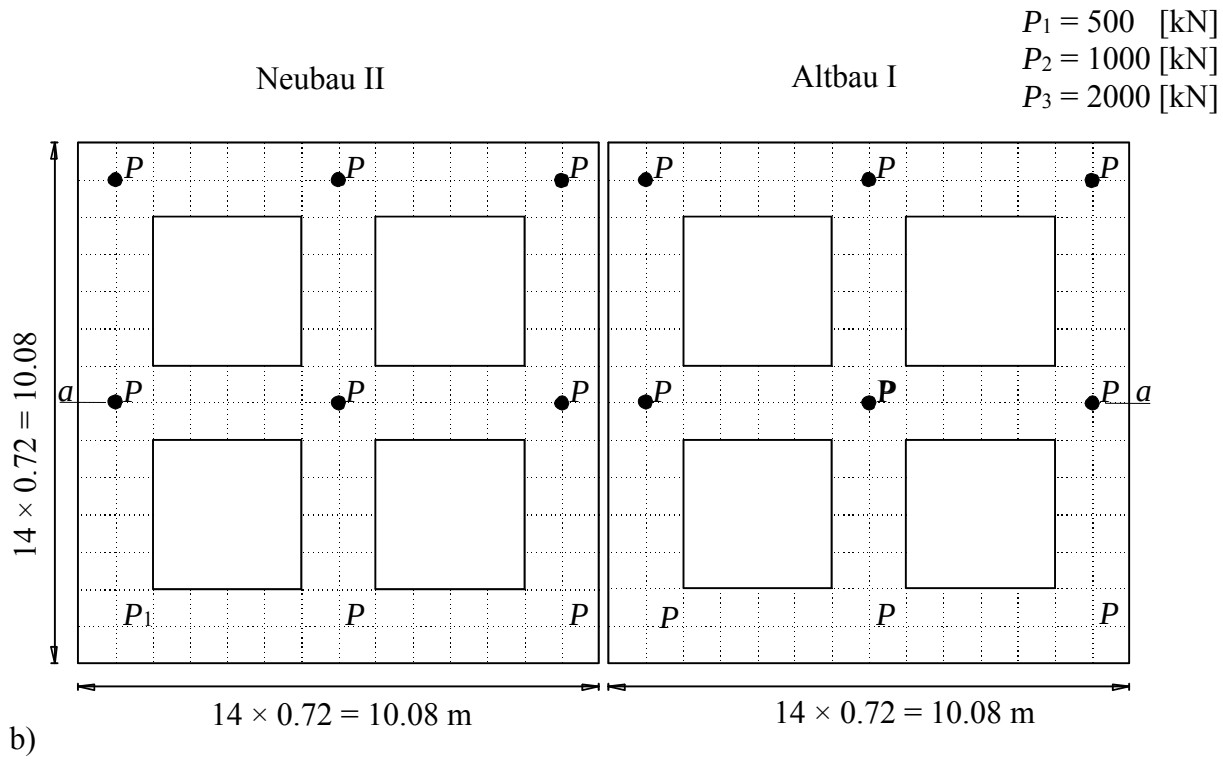
Im Bild 3.7b sind die gegenüber Bild 3.7a veränderten Sohldrücke unter dem Altbau und die Sohldrücke unter dem Neubau angegeben. Es ist durch Vergleich mit Bild 3.7a zu erkennen, dass teilweise erhebliche Unterschiede in der Sohldruckverteilung unter dem Altbau vorhanden sind. Es ist daraus klar zu erkennen, dass entsprechend den Erwartungen die Sohldrücke an der Grenzmauer zwischen Neubau und Altbau kleiner geworden sind, da durch den Einfluss der sich bildenden Setzungsmulde zusätzliche Setzungen an der Grenzmauer entstanden sind. Aus Gleichgewichtsgründen sind die Sohldrücke in der Mitte des Altbaus größer geworden. Aufgrund dieses Ergebnisses können nun die Zusatzbeanspruchung des Altbaus infolge der Baugrundbelastung durch den Neubau rechnerisch verfolgt und dementsprechend konstruktive Maßnahmen zur Verhinderung von Schäden am Altbau vorgenommen werden.

Auf dem Bild 3.8 sind ferner die Setzungen als Isolinien wiedergegeben. Da eine zentrische Belastung vorliegt, sind die Setzungen symmetrisch. Im Bild 3.8b sind rechts die Setzungen des Altbaus und links die Setzungen des Neubaus angegeben. Es ist zu erkennen, dass sich entsprechend den Erwartungen der Altbau an der Grenzmauer zum Neubau zusätzlich gesetzt hat, sodass eine Verkantung des Bauwerks auftritt. Auf der rechten Seite des Altbaus sind dagegen die Setzungen rückläufig. Bei dem Neubau stimmen die Setzungen überein mit den für den Altbau errechneten und in Bild 3.8a dargestellten Setzungen.

Bild 3.9 zeigt die Setzungen s, Sohldrücke q und Momente m_x in der Mitte der Platte. Aus den Ergebnissen ist weiterhin zu erkennen, dass die Setzungen der Randknoten des Altbaus in der Nähe des Neubaus stark zunehmen (Bild 3.9a). So erhöht sich die Setzung von 4.79 [cm] auf 7.31 [cm]. In den Kurven des Bildes 3.9c macht sich der Einfluss des Nachbarbauwerks deutlich bemerkbar. Während das größte positive Moment (Stützmoment bei Last P = 2000 [kN]) von 787 [kN.m/m] (nur Neubau) auf 654 [kN.m/m] ansteigt, ändert sich das Vorzeichen des Feldmoments. So beträgt das Feldmoment (nur Neubau) 20 [kN.m/m], während bei Einwirkung des Einflusses eines Nachbarbauwerks an der gleichen Stelle ein Moment von -200 [kN.m/m] auftritt.

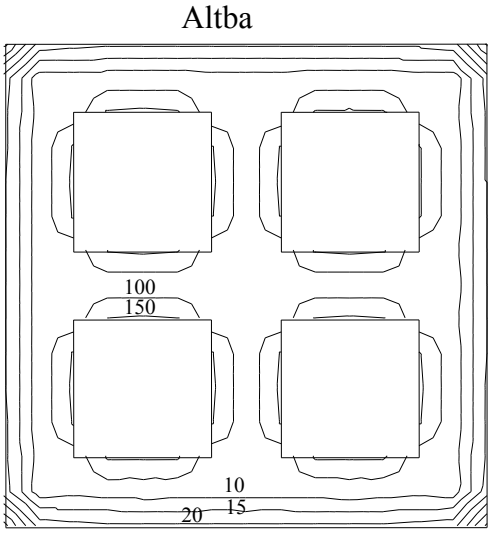


a) Schnitt *a-a*

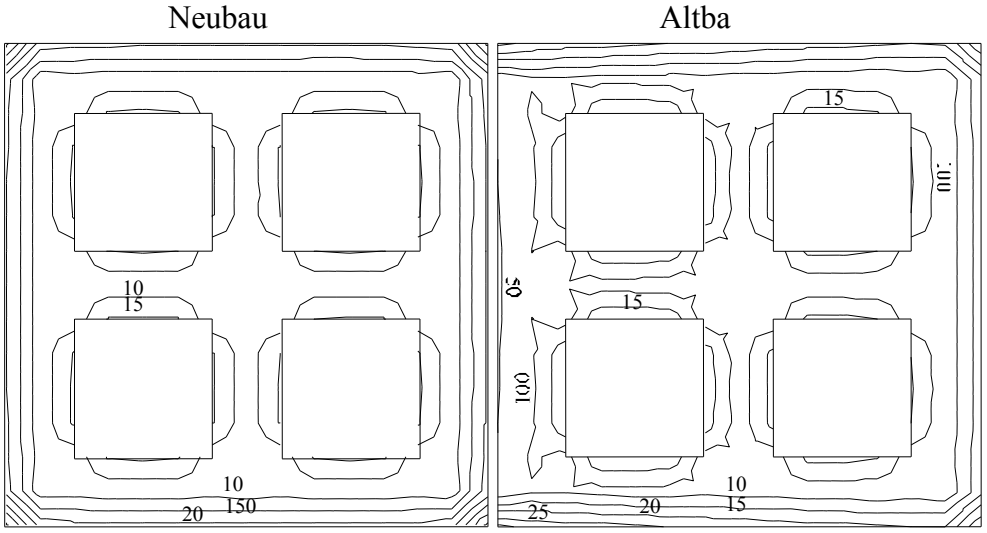


b)

Bild 3.6 Einwirkung des Neubaus auf den Altbau

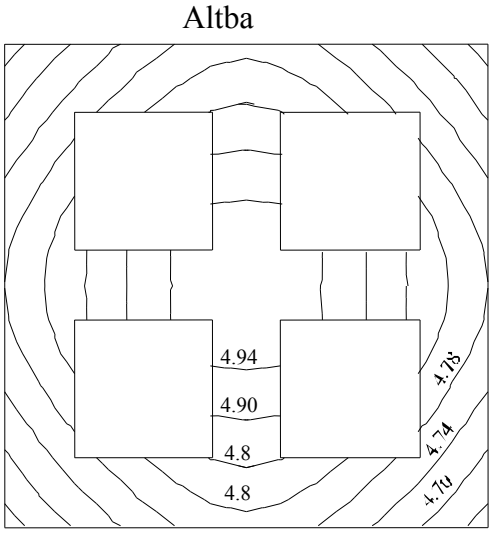


a) nur

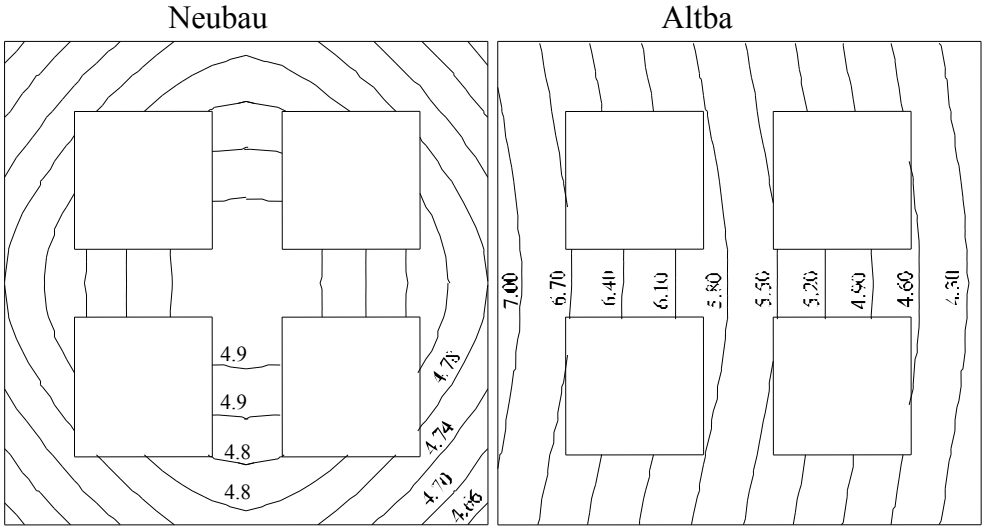


b) Neubau +

Bild 3.7 Isolinien der Sohldrücke [kN/m^2] unter Neubau und Altbau
a) nur Altbau
b) Neubau + Altbau



a) nur



b) Neubau +

Bild 3.8 Isolinien der Setzungen [cm] unter Neubau und Altbau
a) nur Altbau
b) Neubau + Altbau

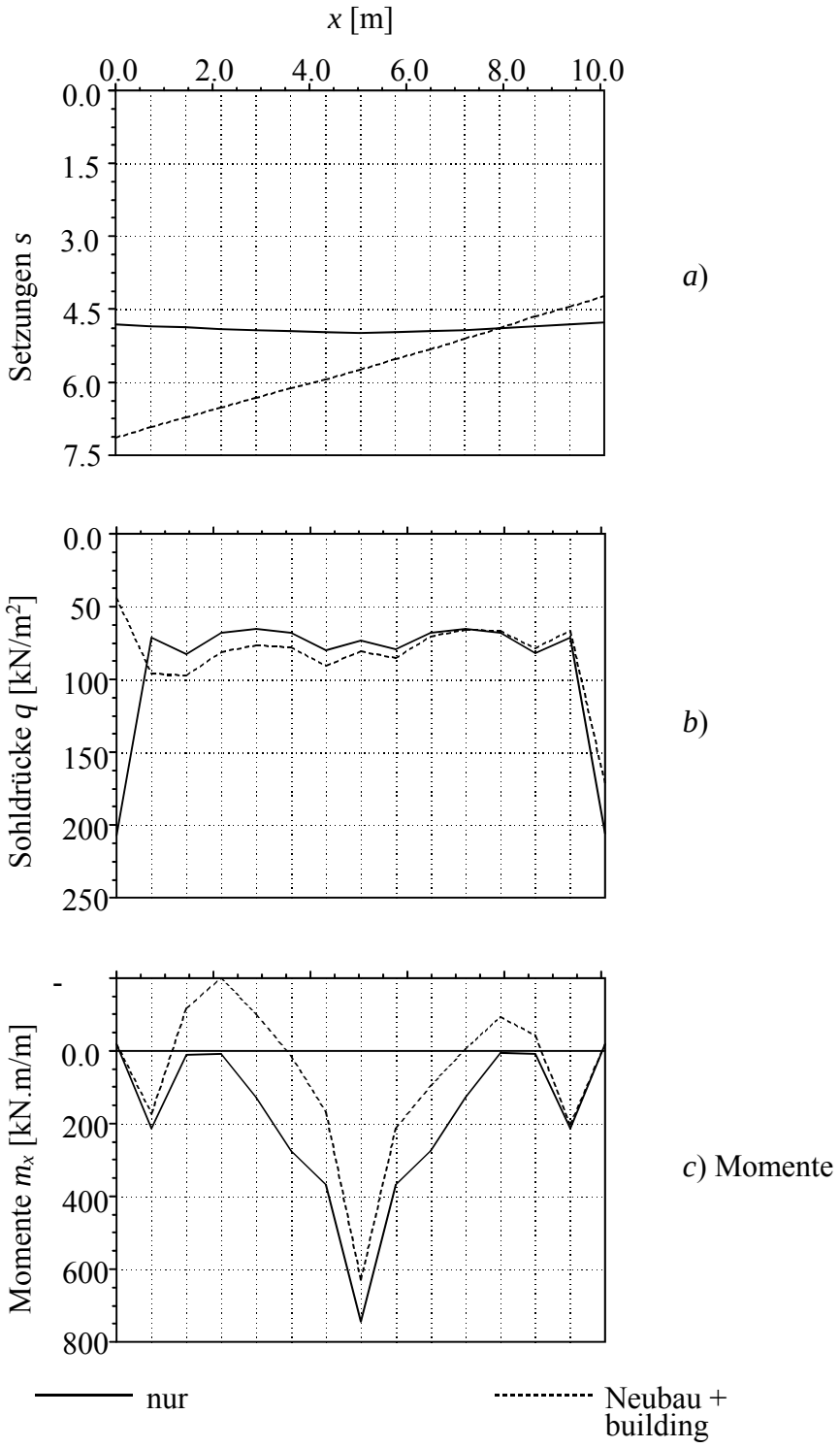


Bild 3.9 Setzungen, Sohldrücke und Momente m_x im Mittelschnitt der Platte

Beispiel 3.3 Interaktion durch Senkung der Sohlfläche eines Gebäudes bei Untertunnelung

1 Aufgabenstellung

Das Gebäude hat den in Bild 3.10 dargestellten Grundriss, der aus zwei fugenlos verbundenen Rechtecken besteht. Die Sohlplatte ist 50 [cm] dick und ist 2.5 [m] tief gegründet. Die geplante Untertunnelung verläuft schräg zur Bauwerksachse. Sie wird nach Vorausschätzungen eine etwa 9 [m] breite Setzungsmulde mit einer maximalen Einsenkung von 3 [cm] verursachen. Die Setzungsmulde ist in Bild 3.10a durch die symmetrisch zur Tunnelachse verlaufenden Linien gleicher Setzungsbeträge markiert. Sie werden als Einwirkungen in die Berechnung eingesetzt. Die Bauwerkslasten bestehen aus 2 Einzelstützen mit $P = 18\,000$ [kN] und Linienlasten $p = 300$ [kN/m] aus den Außenwänden.

2 Bodenkennwerte

Der Baugrund wurde durch 3 Bohrungen B1 bis B3 bis 14 [m] unter der Sohle erkundet. Er ist nicht horizontal geschichtet. Der Baugrund besteht gemäß Tabelle 3.1 aus zwei Schichten mit unterschiedlichen Bodenkennwerten. Als *Poisson*zahl des Bodens wird $\nu_s = 0.3$ [-] angesetzt und ist konstant für beide Bodenmaterialen (Bild 3.10b) und Tabelle 3.1).

Tabelle 3.1 Bodenkennwerte

Schicht Nr.	Benennung des Bodens	Tiefe der Schicht unter Gelände z [m]	Steifemodul für		Wichte des Bodens γ_s [kN/m^3]
			Erstbelastung E_s [kN/m^2]	Wiederbelastung W_s [kN/m^2]	
1	Ton	5.5/ 6.3/ 7.0	10 000	30 000	18
2	Sandstein	14	160 000	400 000	21

3 Materialkennwerte des Betons

Für das Plattenmaterial werden die folgenden Parameter angenommen:

Elastizitätsmodul	$E_b = 3 \times 10^7$	[kN/m^2]
Schubmodul	$G_b = 1.25 \times 10^7$	[kN/m^2]
*Poisson*zahl	$\nu_b = 0.2$	[-]
Wichte	$\gamma_b = 25$	[kN/m^3]

Die Steifigkeiten der Außenwände (Dicke 30 [cm], Höhe 3 [m]) werden durch Stabelemente entlang des Plattenrands simuliert mit folgenden Daten:

Trägheitsmoment I	= 0.675	[m^4]
Torsionsmoment J	= 0.0253	[m^4]

4 Berechnung

Die Sohlplatte wird für die FE-Berechnung in 112 quadratische Elemente mit je 1.5 [m] Seitenlänge unterteilt (Bild 3.10) und dann mit dem Steifemodulverfahren (Verfahren 7) berechnet. Zwischen den Bohrprofilen wird die Schichtgrenze zwischen Ton und Sandstein mit dem Programm *ELPLA* bilinear interpoliert. Zunächst wird eine Berechnung ohne Berücksichtigung des späteren Tunnels vorgenommen. Danach erfolgt die analoge Berechnung für die vorgegebenen Setzungswerte.

5 Ergebnisse

Die Ergebnisse der Setzungen, Sohldrücke und Biegemomente sind in den Bildern 3.11 bis 3.13 dargestellt. Es zeigt sich Folgendes:

- Wenn der Baugrund wie im Beispiel oben aus einer weichen Schicht besteht, ist der Einfluss der durch den Tunnel verursachten Sohldruckänderung nicht besonders groß: die Drücke werden unter den Stützen größer, während sie an den Ecken kleiner werden

- Die Setzungen werden nach der Untertunnelung unter den Stützen infolge der Interaktion kleiner, während sie an den Ecken größer werden

- Die Biegemomente werden unter den Stützen größer, in den Feldern kleiner

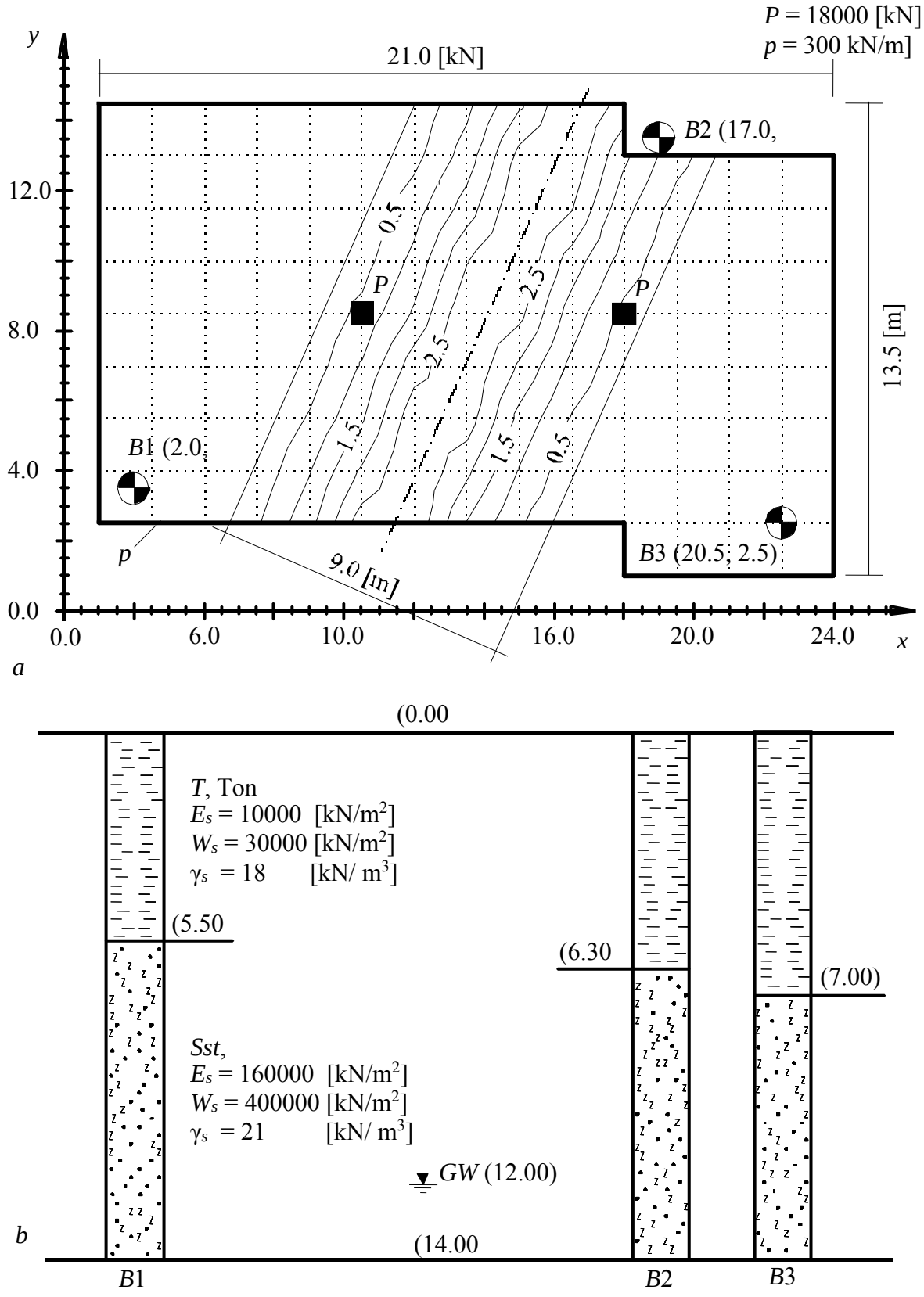


Bild 3.10 a) Lageplan mit Setzungslinien durch Untertunnelung und Bohrpunkte
b) Bohrprofile B1 bis B3

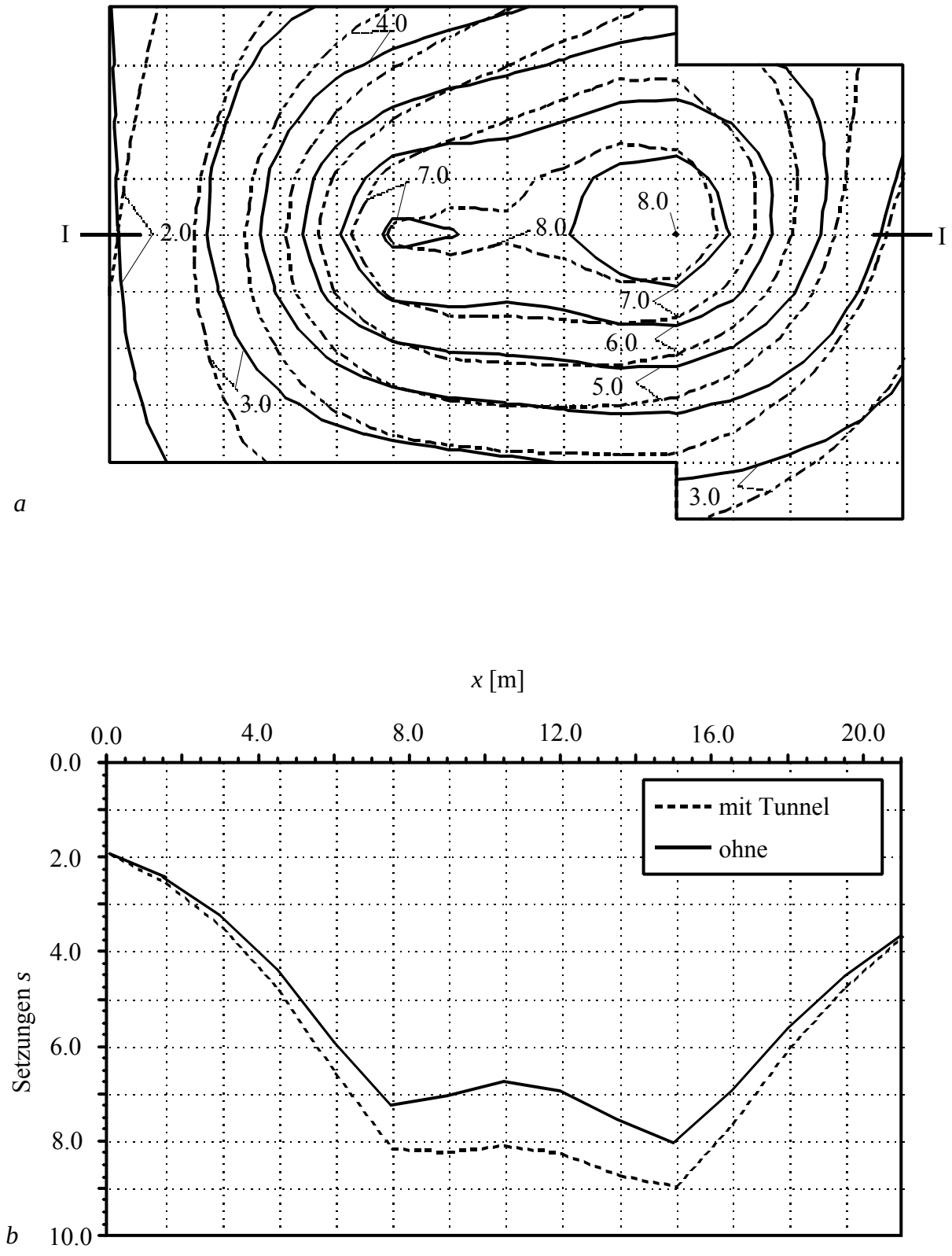
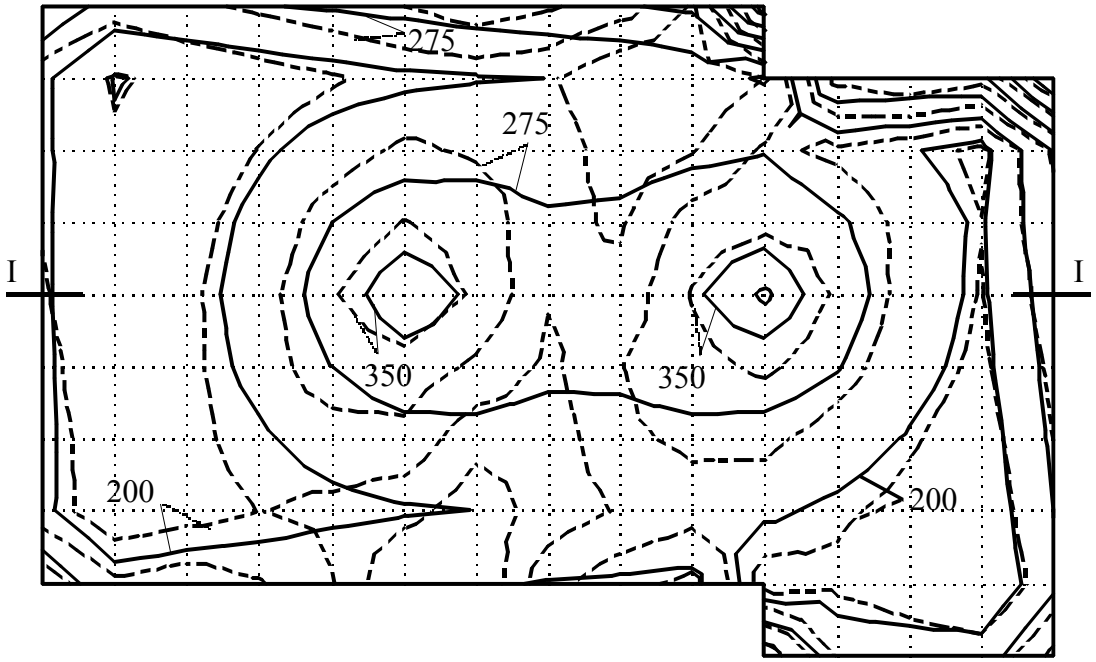
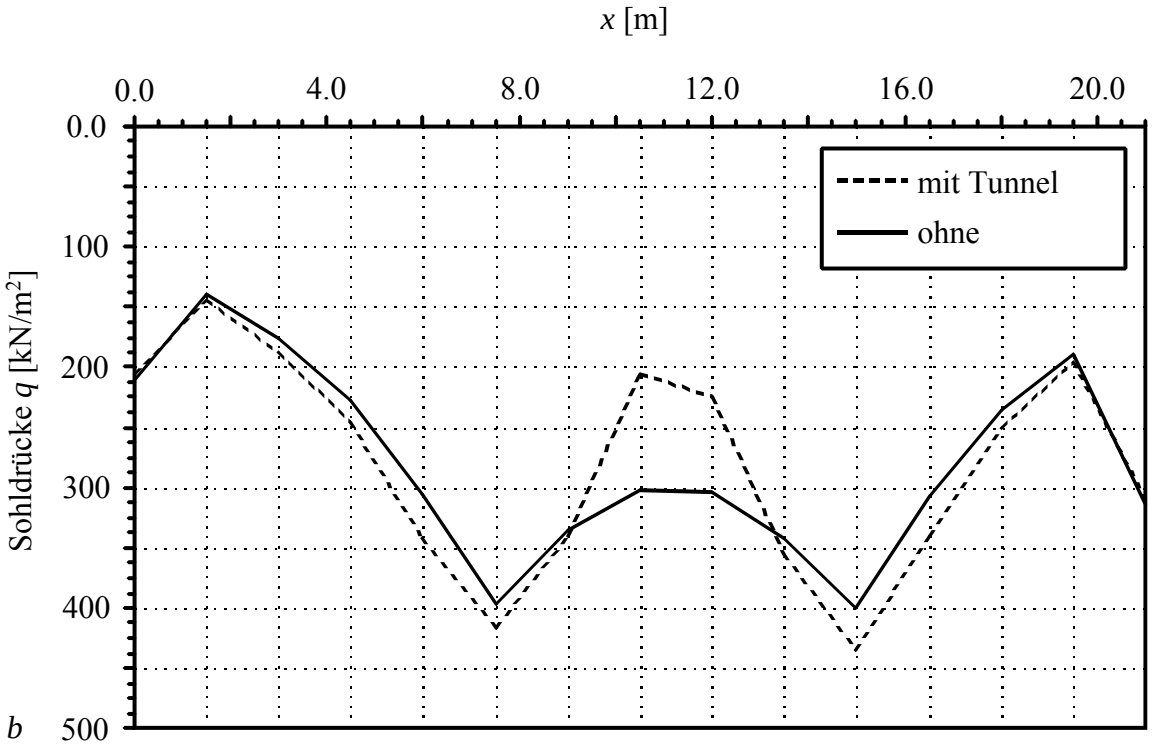


Bild 3.11 Setzungen s [cm] ohne und mit Berücksichtigung der Untertunnelung
a) Isolinien
b) Schnitt I-I

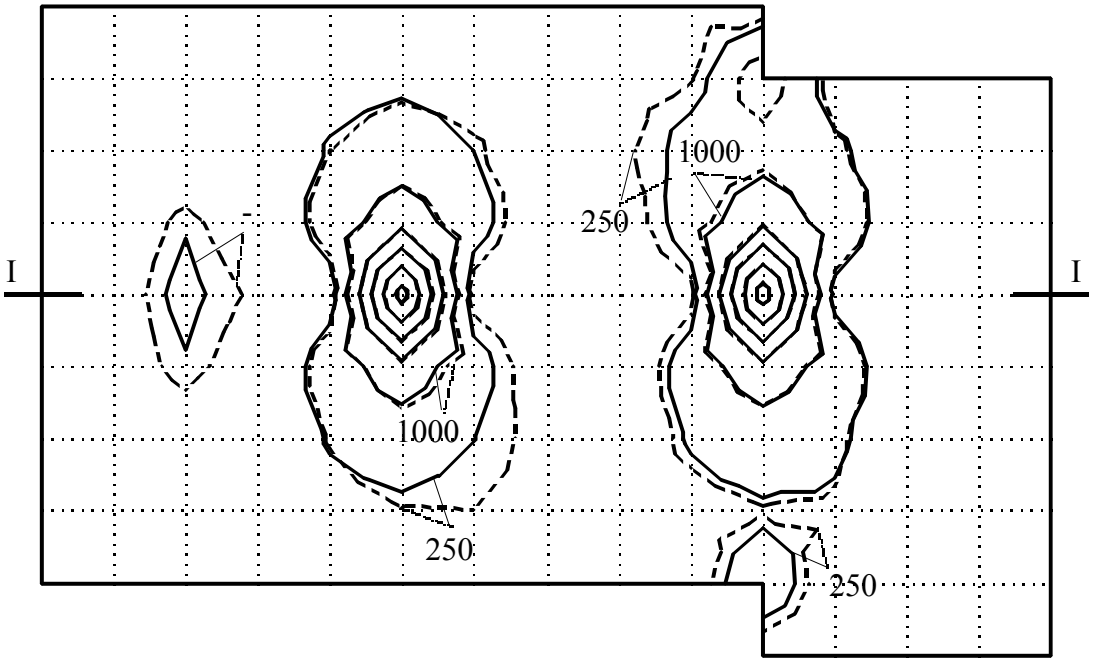


a

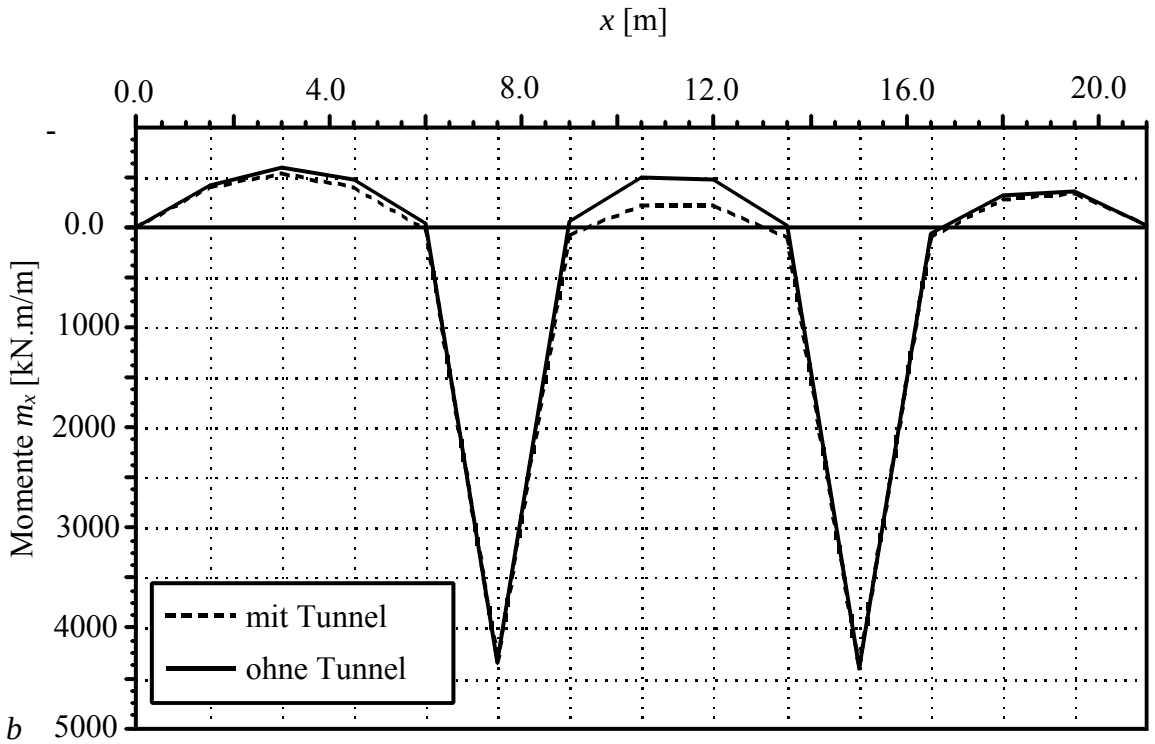


b

Bild 3.12 Sohldrücke q [kN/m^2] ohne und mit Berücksichtigung der Untertunnelung
a) Isolinien
b) Schnitt I-I



a)



b

Bild 3.13 Momente m_x [kN.m/m] ohne und mit Berücksichtigung der Untertunnelung
a) Isolinien
b) Schnitt I-I

Abschnitt 4

Berechnung von Systemen mehrerer Gründungsplatten

Inhalt

4.1	Einleitung	4- 2
4.2	Festlegung des Fundamentsystems	4- 2
4.3	Summengleichungen der Setzungen	4- 3
4.4	Bestimmung der Flexibilitätskoeffizienten	4- 4
4.5	Berechnung von Systemen mehrerer elastischer Platten	4- 5
	4.5.1 Aufstellung des Gleichungssystems	4- 5
4.6	Berechnung von Systemen mehrerer starrer Platten	4- 6
	4.6.1 Aufstellung des Gleichungssystems	4- 6
4.7	Iterationsverfahren	4-10

Beispiel 4.1	Berechnung eines Systems von zwei benachbarten gleich großen Kreisplatten	4-12
Beispiel 4.2	Setzungsverhalten von Faulbehältern (Kreisplatten) einer Kläranlage	4-16
Beispiel 4.3	Berechnung von zwei benachbarten Fundamentplatten unter Berücksichtigung von zwei Schornsteinfundamenten	4-19
Beispiel 4.4	Wechselwirkung zweier nebeneinander liegender quadratischer Platten	4-27
Beispiel 4.5	Erhöhung eines Schwimmbeckens	4-40

4.1 Einleitung

In der Baupraxis kommen zur Gründung von Bauwerken häufig Systeme elastischer oder starrer Fundamentkörper vor. Darunter werden Plattensysteme verstanden, die im Bauwerk nicht statisch untereinander verbunden sind, sondern sich nur über den Baugrund gegenseitig beeinflussen. Bisher wurden solche Gründungskörper meistens unter der Annahme betrachtet, dass die Fundamente schlaff sind. Es wurde dann gefühlsmäßig ein Ausgleich der Setzungsmulde vorgenommen.

Kany (1972) und (1977) hat dieses Problem für die Berechnung von Systemen starrer Platten und auch zur Berechnung von Systemen elastischer Platten mit Einfluss der Struktursteifigkeit auf das System Baugrund/ Bauwerk mit Direktverfahren gelöst. *Kany*/ *El Gendy* (1997) und (1999) haben später eine Lösung für die Berechnung von großen Systemen elastischer Platten auf unregelmäßigem Baugrund mit Iterationsverfahren mitgeteilt. *Stark* (1990) hat auch ein Beispiel für die Interaktion zweier rechteckiger elastischer Platten untersucht, um die gegenseitige Beeinflussung der Einzelplatten zu zeigen.

In diesem Beitrag wird eine allgemeine Lösung zur Berechnung großer starrer Fundamentsysteme nach dem Steifemodulverfahren vorgestellt. Diese Lösung kann auch benutzt werden, um die Setzungen und Sohldrücke unter Platten mit beliebigen Grundrissen zu berechnen. Es ist auch möglich, beim dreidimensionalen Kontinuum-Modell unregelmäßige Schichtenverläufe nach *Kany*/ *El Gendy* (1997) und (1999) zu berücksichtigen. Dabei kann auch berücksichtigt werden, dass das untersuchte Fundamentsystem aus mehreren, durch Fugen statisch voneinander getrennten Sohlplatten besteht, die zwar in sich starr sind, sich jedoch voneinander unabhängig setzen können. Die Sohlplatten können auch in sich oder voneinander unterschiedlich tief gegründet sein. Außerdem kann der Baugrund in jedem Feld eine andere Vorbelastung haben und Senkungen infolge äußerer Einflüsse (z.B. Senkungen durch benachbarte Bauwerkslasten oder Bergsenkungen) erleiden.

4.2 Festlegung des Fundamentsystems

Wir betrachten zur Ableitung der Berechnungsformeln als Beispiel das Fundamentsystem gemäß Bild 4.1. Es besteht aus 3 Sohlplatten I, II, III, die durch Fugen voneinander getrennt und in ihrer Bewegungsmöglichkeit nicht behindert sind. Für die Berechnung wurden die drei Sohlplatten in Elemente mit insgesamt $r = r_{\mathrm{I}} + r_{\mathrm{II}} + r_{\mathrm{III}}$ Knoten unterteilt und mit Knotennummern 1 bis r versehen. Die Knotenstellen sind in dem in Bild 4.1 eingezeichneten Koordinatensystem x-y festgelegt. Die Sohlkraft des i-ten Knoten ist mit Q_i bezeichnet. Im Bild 4.1 sind ferner 2 Außenfundamente IV und V eingezeichnet, die über den Untergrund die Bauwerke belasten. Diese Fundamente bringen ebenfalls einen zusätzlichen Setzungsanteil $s_{i.A}$ auf den Knoten i.

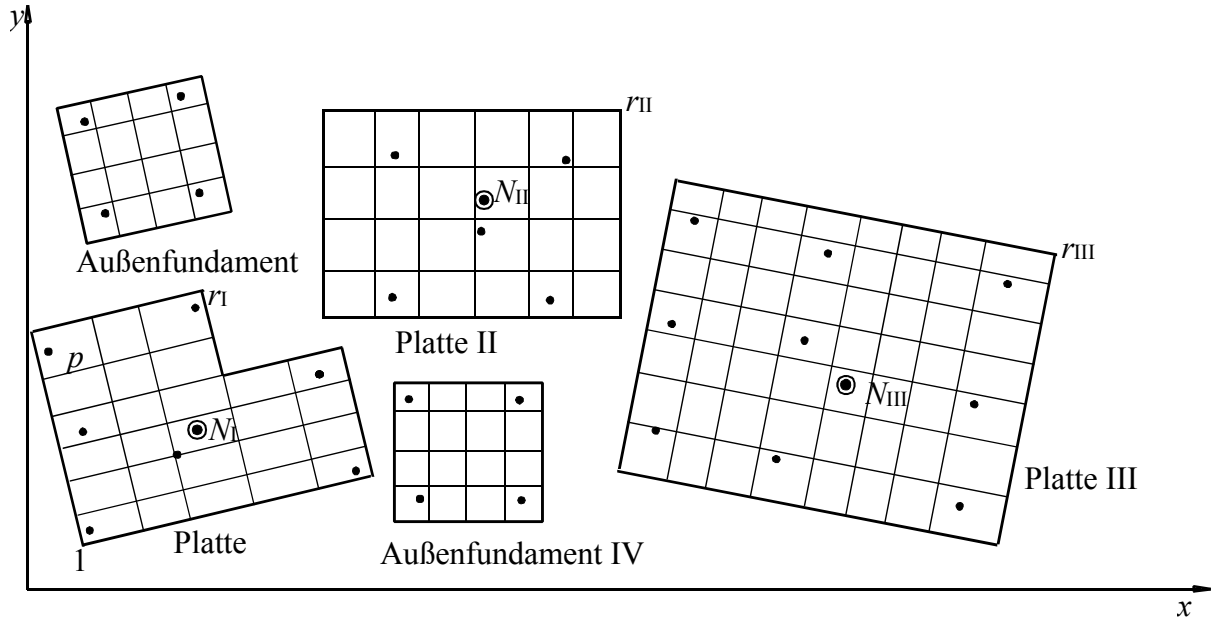


Bild 4.1 Grundriss eines Systems von 3 Platten (I bis III) und 2 Außenfundamenten (IV und V)

4.3 Summengleichungen der Setzungen

Von jedem Knoten *i* werden zuerst mit den zunächst noch unbekannten Sohldrücken Q_i die Summengleichungen der Setzungen s_i (Gl. 4.1) aufgestellt.

$$s_i = \sum_{k=1}^{k=r} (c_{i,k}\, Q_k) + s_{i.A} \tag{4.1}$$

wobei:

$c_{i,k}$ Setzungseinflusszahlen

$s_{i.A}$ Setzungen infolge von Außeneinflüssen (Fundamente IV und V)

Summengleichungen der Setzungen für das gesamte System:

$$\left.\begin{aligned}
s_1 &= c_{1,1}\,Q_1 + c_{1,2}\,Q_2 + c_{1,3}\,Q_3 + \ldots + c_{1,r}\,Q_r + s_{1.A} \\
s_2 &= c_{2,1}\,Q_1 + c_{2,2}\,Q_2 + c_{2,3}\,Q_3 + \ldots + c_{2,r}\,Q_r + s_{2.A} \\
s_3 &= c_{3,1}\,Q_1 + c_{3,2}\,Q_2 + c_{3,3}\,Q_3 + \ldots + c_{3,r}\,Q_r + s_{3.A} \\
s_i &= c_{i,1}\,Q_1 + c_{i,2}\,Q_2 + c_{i,3}\,Q_3 + \ldots + c_{i,r}\,Q_r + s_{i.A} \\
s_r &= c_{r,1}\,Q_1 + c_{r,2}\,Q_2 + c_{r,3}\,Q_3 + \ldots + c_{r,r}\,Q_r + s_{r.A}
\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

oder in Matrizenform geschrieben:

$$\{s\} = [c]\{Q\} + \{s_A\} \tag{4.3}$$

wobei:
$\{s\}$ Vektor der Setzung
$[c]$ Flexibilitätsmatrix für den Baugrund
$\{Q\}$ Vektor des Sohldrucks
$\{s_A\}$ Vektor der Setzung aus Außeneinflüssen (Fundamente IV und V)

4.4 Bestimmung der Flexibilitätskoeffizienten

Eine Möglichkeit zur Berechnung der Fundamente auf einem dreidimensional geschichteten Baugrund wurde von *Kany*/ *El Gendy* (1995) dargestellt. Diese Möglichkeit wird auch hier für die Berechnung von Systemen starrer Platten genutzt.

Im Grenzfall müssen also für die Aufstellung der Gl. 4.3 insgesamt r^2 Setzungsberechnungen durchgeführt werden. Damit ergeben sich im Beispiel des Bildes 4.1 bei der Aufteilung des Systems mit insgesamt $r = 145$ Knoten $r^2 = 21025$ Einzelberechnungen (ohne Außenfundamente IV und V).

Die Gl. 4.3 kann für das gesamte System wie folgt in Matrizenform geschrieben werden:

$$\begin{Bmatrix} \{s\}_{\mathrm{I}} \\ \{s\}_{\mathrm{II}} \\ \{s\}_{\mathrm{III}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [c]_{\mathrm{I,I}} & [c]_{\mathrm{I,II}} & [c]_{\mathrm{I,III}} \\ [c]_{\mathrm{II,I}} & [c]_{\mathrm{II,II}} & [c]_{\mathrm{II,III}} \\ [c]_{\mathrm{III,I}} & [c]_{\mathrm{III,II}} & [c]_{\mathrm{III,III}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{Q\}_{\mathrm{I}} \\ \{Q\}_{\mathrm{II}} \\ \{Q\}_{\mathrm{III}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{s_A\}_{\mathrm{I}} \\ \{s_A\}_{\mathrm{II}} \\ \{s_A\}_{\mathrm{III}} \end{Bmatrix} \tag{4.4}$$

wobei:
$\{s\}_I$ Vektor der Setzung der Platte I
$[c]_{I,J}$ Flexibilitätsmatrix der Platte I aus den Sohldrücken der Platte I
$\{Q\}_I$ Vektor des Sohldrucks der Platte I
$\{s_A\}_I$ Vektor der Setzung der Platte I aus Außeneinflüssen (Fundamente IV und V)

durch Inversion erhält man:

$$\begin{Bmatrix} \{Q\}_{\mathrm{I}} \\ \{Q\}_{\mathrm{II}} \\ \{Q\}_{\mathrm{III}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [c]_{\mathrm{I,I}} & [c]_{\mathrm{I,II}} & [c]_{\mathrm{I,III}} \\ [c]_{\mathrm{II,I}} & [c]_{\mathrm{II,II}} & [c]_{\mathrm{II,III}} \\ [c]_{\mathrm{III,I}} & [c]_{\mathrm{III,II}} & [c]_{\mathrm{III,III}} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{Bmatrix} \{s\}_{\mathrm{I}} \\ \{s\}_{\mathrm{II}} \\ \{s\}_{\mathrm{III}} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{s_A\}_{\mathrm{I}} \\ \{s_A\}_{\mathrm{II}} \\ \{s_A\}_{\mathrm{III}} \end{Bmatrix} \right\} \tag{4.5}$$

4.5 Berechnung von Systemen mehrerer elastischer Platten

4.5.1 Aufstellung des Gleichungssystems

Bei großen Fundamenten wird das Fundament als Platte auf elastischem Medium behandelt. Aus der FE-Berechnung der Sohlplatte kann man folgende Gleichung der Platte I aufstellen:

$$\left[k_p\right]_{\mathrm{I}} \{\delta\}_{\mathrm{I}} = \{P\}_{\mathrm{I}} - \{Q\}_{\mathrm{I}} \tag{4.6}$$

ebenso für die Platte II:

$$\left[k_p\right]_{\mathrm{II}} \{\delta\}_{\mathrm{II}} = \{P\}_{\mathrm{II}} - \{Q\}_{\mathrm{II}} \tag{4.7}$$

und für die Platte III:

$$\left[k_p\right]_{\mathrm{III}} \{\delta\}_{\mathrm{III}} = \{P\}_{\mathrm{III}} - \{Q\}_{\mathrm{III}} \tag{4.8}$$

wobei:

$\{p\}_{\mathrm{I}}$, $\{p\}_{\mathrm{II}}$ und $\{p\}_{\mathrm{III}}$	Lastvektor aus Lasten und Momenten für die Platten I, II und III
$\{\delta\}_{\mathrm{I}}$, $\{\delta\}_{\mathrm{II}}$ und $\{\delta\}_{\mathrm{III}}$	Verformungsvektor für die Platten I, II und III
$[k_p]_{\mathrm{I}}$, $[k_p]_{\mathrm{II}}$ und $[k_p]_{\mathrm{III}}$	Steifigkeitsmatrix für die Platten I, II und III

Fasst man alle Knoten für die drei Platten zusammen, so kann man folgende Gesamtgleichung von Plattensystemen aufstellen:

$$\begin{bmatrix} \left[K_p\right]_{\mathrm{I}} & [0] & [0] \\ [0] & \left[K_p\right]_{\mathrm{II}} & [0] \\ [0] & [0] & \left[K_p\right]_{\mathrm{III}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta\}_{\mathrm{I}} \\ \{\delta\}_{\mathrm{II}} \\ \{\delta\}_{\mathrm{III}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P\}_{\mathrm{I}} \\ \{P\}_{\mathrm{II}} \\ \{P\}_{\mathrm{III}} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{Q\}_{\mathrm{I}} \\ \{Q\}_{\mathrm{II}} \\ \{Q\}_{\mathrm{III}} \end{Bmatrix} \tag{4.9}$$

Setzt man Gl. 4.5 in Gl. 4.9 ein, so erhält man folgendes lineare Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \left[K_p\right]_{\mathrm{I}} & [0] & [0] \\ [0] & \left[K_p\right]_{\mathrm{II}} & [0] \\ [0] & [0] & \left[K_p\right]_{\mathrm{III}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta\}_{\mathrm{I}} \\ \{\delta\}_{\mathrm{II}} \\ \{\delta\}_{\mathrm{III}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P\}_{\mathrm{I}} \\ \{P\}_{\mathrm{II}} \\ \{P\}_{\mathrm{III}} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} [c]_{\mathrm{I,I}} & [c]_{\mathrm{I,II}} & [c]_{\mathrm{I,III}} \\ [c]_{\mathrm{II,I}} & [c]_{\mathrm{II,II}} & [c]_{\mathrm{II,III}} \\ [c]_{\mathrm{III,I}} & [c]_{\mathrm{III,II}} & [c]_{\mathrm{III,III}} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{Bmatrix} \{s\}_{\mathrm{I}} \\ \{s\}_{\mathrm{II}} \\ \{s\}_{\mathrm{III}} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{s_A\}_{\mathrm{I}} \\ \{s_A\}_{\mathrm{II}} \\ \{s_A\}_{\mathrm{III}} \end{Bmatrix} \right\} \tag{4.10}$$

Betrachtet man die Kompatibilität der Verschiebung zwischen der Platte und dem Baugrund, wobei die Setzungsmulde des Baugrunds der Biegelinie der Platte entspricht, so lautet die Gl. 4.11:

$$\left[\begin{bmatrix}[K_p]_{\mathrm{I}} & [0] & [0]\\ [0] & [K_p]_{\mathrm{II}} & [0]\\ [0] & [0] & [K_p]_{\mathrm{III}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[c]_{\mathrm{I,I}} & [c]_{\mathrm{I,II}} & [c]_{\mathrm{I,III}}\\ [c]_{\mathrm{II,I}} & [c]_{\mathrm{II,II}} & [c]_{\mathrm{II,III}}\\ [c]_{\mathrm{III,I}} & [c]_{\mathrm{III,II}} & [c]_{\mathrm{III,III}}\end{bmatrix}^{-1}\right]\begin{Bmatrix}\{\delta\}_{\mathrm{I}}\\ \{\delta\}_{\mathrm{II}}\\ \{\delta\}_{\mathrm{III}}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{P\}_{\mathrm{I}}\\ \{P\}_{\mathrm{II}}\\ \{P\}_{\mathrm{III}}\end{Bmatrix}+ \begin{bmatrix}[c]_{\mathrm{I,I}} & [c]_{\mathrm{I,II}} & [c]_{\mathrm{I,III}}\\ [c]_{\mathrm{II,I}} & [c]_{\mathrm{II,II}} & [c]_{\mathrm{II,III}}\\ [c]_{\mathrm{III,I}} & [c]_{\mathrm{III,II}} & [c]_{\mathrm{III,III}}\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}\{s_A\}_{\mathrm{I}}\\ \{s_A\}_{\mathrm{II}}\\ \{s_A\}_{\mathrm{III}}\end{Bmatrix} \tag{4.11}$$

Das Gleichungssystem 4.11 kann nach dem Iterationsverfahren von *Kany*/ *El Gendy* (1997) oder mit dem *Gauß*schen Algorithmus gelöst werden.

4.6 Berechnung von Systemen mehrerer starrer Platten

4.6.1 Aufstellung des Gleichungssystems

Für die Setzung s_i der Platte I im Knoten i besteht wegen der Starrheit der Platte (ebene Setzungsmulde) folgender linearer Zusammenhang:

$$s_i = w_{o.\mathrm{I}} + x_i \tan\theta_{y.\mathrm{I}} + y_i \tan\theta_{x.\mathrm{I}} \tag{4.12}$$

wobei:
$w_{o.I}$ lotrechte Setzung (oder Hebung) der Sohlfläche I im Koordinatenursprung der Platte
$\theta_{x.I}$ Neigungswinkel der Sohlfläche I um die x- Achse
$\theta_{y.I}$ Neigungswinkel der Sohlfläche I um die y- Achse

Die Gl. 4.12 für die Platte I kann auch in Matrizenform geschrieben werden:

$$\begin{Bmatrix}s_1\\ s_2\\ s_3\\ \\ \\ \dots\\ s_n\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\\ & & \\ & & \\ \dots & \dots & \dots\\ 1 & x_n & y_n\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}w_{o.\mathrm{I}}\\ \tan\theta_{y.\mathrm{I}}\\ \tan\theta_{x.\mathrm{I}}\end{Bmatrix} \tag{4.13}$$

Gl. 4.13 wird vereinfacht zu:

$$\{s\}_{\mathrm{I}} = [X]^T{}_{\mathrm{I}}\ \{\Delta\}_{\mathrm{I}} \tag{4.14}$$

wobei:
$\{\Delta\}_{\mathrm{I}}$ Vektor der Verformung der Platte I aus $w_{o.\mathrm{I}}$, tan $\theta_{y.\mathrm{I}}$ und tan $\theta_{x.\mathrm{I}}$
$[\mathrm{X}]^T_{\mathrm{I}}$ Geometrische Matrix der Platte I mit den Koordinaten x und y

In ähnlicher Weise lassen sich auch die geometrischen Bedingungen für die Setzung s_k eines Knotens der Platte II ableiten:

$$\{s\}_{\mathrm{II}} = [X]^T{}_{\mathrm{II}}\ \{\Delta\}_{\mathrm{II}} \tag{4.15}$$

ebenso für die Platte III:

$$\{s\}_{\mathrm{III}} = [X]^T{}_{\mathrm{III}}\ \{\Delta\}_{\mathrm{III}} \tag{4.16}$$

Gln. 4.14, 4.15 und 4.16 in Matrizenform geschrieben:

$$\begin{Bmatrix} \{s\}_{\mathrm{I}} \\ \{s\}_{\mathrm{II}} \\ \{s\}_{\mathrm{III}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [X]^T{}_{\mathrm{I}} & [0] & [0] \\ [0] & [X]^T{}_{\mathrm{II}} & [0] \\ [0] & [0] & [X]^T{}_{\mathrm{III}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta\}_{\mathrm{I}} \\ \{\Delta\}_{\mathrm{II}} \\ \{\Delta\}_{\mathrm{III}} \end{Bmatrix} \tag{4.17}$$

4.6.1.1 Gleichgewicht der lotrechten Kräfte

In jeder der drei Platten muss die Summe der Sohlkräfte mit der aufgebrachten Lastresultierenden N_i übereinstimmen. Es gilt also im Beispiel:

$$\left.\begin{array}{rcccccccccc} N_{\mathrm{I}} & = & Q_1 & + & Q_2 & + & Q_3 & + & \ldots & + & Q_{r_{\mathrm{I}}} \\ N_{\mathrm{II}} & = & Q_{r_{\mathrm{I}+1}} & + & Q_{r_{\mathrm{I}+2}} & + & Q_{r_{\mathrm{I}+3}} & + & \ldots & + & Q_{r_{\mathrm{II}}} \\ N_{\mathrm{III}} & = & Q_{r_{\mathrm{II}+1}} & + & Q_{r_{\mathrm{II}+2}} & + & Q_{r_{\mathrm{II}+3}} & + & \ldots & + & Q_{r_{\mathrm{III}}} \end{array}\right\} \tag{4.18}$$

4.6.1.2 Gleichgewicht der Momente

Es muss Gleichgewicht der Momente um die y- Achse bestehen. Daraus folgt, dass:

$$\left.\begin{array}{rcccccccccc} N_{\mathrm{I}}\, x_{N_{\mathrm{I}}} & = & Q_1\, x_1 & + & Q_2\, x_2 & + & Q_3\, x_3 & + & \ldots & + & Q_{r_{\mathrm{I}}}\, x_{r_{\mathrm{I}}} \\ N_{\mathrm{II}}\, x_{N_{\mathrm{II}}} & = & Q_{r_{\mathrm{I}+1}}\, x_{r_{\mathrm{I}+1}} & + & Q_{r_{\mathrm{I}+2}}\, x_{r_{\mathrm{I}+2}} & + & Q_{r_{\mathrm{I}+3}}\, x_{r_{\mathrm{I}+3}} & + & \ldots & + & Q_{r_{\mathrm{II}}}\, x_{r_{\mathrm{II}}} \\ N_{\mathrm{III}}\, x_{N_{\mathrm{III}}} & = & Q_{r_{\mathrm{II}+1}}\, x_{r_{\mathrm{II}+1}} & + & Q_{r_{\mathrm{II}+2}}\, x_{r_{\mathrm{II}+2}} & + & Q_{r_{\mathrm{II}+3}}\, x_{r_{\mathrm{II}+3}} & + & \ldots & + & Q_{r_{\mathrm{III}}}\, x_{r_{\mathrm{III}}} \end{array}\right\} \tag{4.19}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen der Momente um die x- Achse fordern schließlich:

$$\left.\begin{array}{rcccccccccc} N_{\mathrm{I}}\, y_{N_{\mathrm{I}}} & = & Q_1\, y_1 & + & Q_2\, y_2 & + & Q_3\, y_3 & + & \ldots & + & Q_{r_{\mathrm{I}}}\, y_{r_{\mathrm{I}}} \\ N_{\mathrm{II}}\, y_{N_{\mathrm{II}}} & = & Q_{r_{\mathrm{I}+1}}\, y_{r_{\mathrm{I}+1}} & + & Q_{r_{\mathrm{I}+2}}\, y_{r_{\mathrm{I}+2}} & + & Q_{r_{\mathrm{I}+3}}\, y_{r_{\mathrm{I}+3}} & + & \ldots & + & Q_{r_{\mathrm{II}}}\, y_{r_{\mathrm{II}}} \\ N_{\mathrm{III}}\, y_{N_{\mathrm{III}}} & = & Q_{r_{\mathrm{II}+1}}\, y_{r_{\mathrm{II}+1}} & + & Q_{r_{\mathrm{II}+2}}\, y_{r_{\mathrm{II}+2}} & + & Q_{r_{\mathrm{II}+3}}\, y_{r_{\mathrm{II}+3}} & + & \ldots & + & Q_{r_{\mathrm{III}}}\, y_{r_{\mathrm{III}}} \end{array}\right\} \tag{4.20}$$

Gln. 4.18, 4.19 und 4.20, die das Gleichgewicht der Kräfte und Momente darstellen, für die Platte I in Matrizenform geschrieben:

$$\begin{Bmatrix} N_{\mathrm{I}} \\ N_{\mathrm{I}}\, x_{N_{\mathrm{I}}} \\ N_{\mathrm{I}}\, x_{N_{\mathrm{I}}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \\ \\ \dots \\ Q_n \end{Bmatrix} \tag{4.21}$$

Gl. 4.21 für die Platte I wird vereinfacht zu:

$$\{N\}_{\mathrm{I}} = [X]_{\mathrm{I}}\, \{Q\}_{\mathrm{I}} \tag{4.22}$$

In ähnlicher Weise lassen sich auch das Gleichgewicht der Kräfte und Momente für die Platte II ableiten:

$$\{N\}_{\mathrm{II}} = [X]_{\mathrm{II}}\, \{Q\}_{\mathrm{II}} \tag{4.23}$$

ebenso für die Platte III:
Gln. 4.22, 4.23 und 4.24 in Matrizenform geschrieben:

$$\{N\}_{\mathrm{III}} = [X]_{\mathrm{III}}\, \{Q\}_{\mathrm{III}} \tag{4.24}$$

$$\begin{Bmatrix} \{N\}_{\mathrm{I}} \\ \{N\}_{\mathrm{II}} \\ \{N\}_{\mathrm{III}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [X]_{\mathrm{I}} & [0] & [0] \\ [0] & [X]_{\mathrm{II}} & [0] \\ [0] & [0] & [X]_{\mathrm{III}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{Q\}_{\mathrm{I}} \\ \{Q\}_{\mathrm{II}} \\ \{Q\}_{\mathrm{III}} \end{Bmatrix} \tag{4.25}$$

Setzt man die Gln. 4.25 und 4.17 in Gl. 4.5 ein, so erhält man folgendes lineare Gleichungssystem:

$$\begin{Bmatrix} \{N\}_{\mathrm{I}} \\ \{N\}_{\mathrm{II}} \\ \{N\}_{\mathrm{III}} \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} [X]_{\mathrm{I}} & [0] & [0] \\ [0] & [X]_{\mathrm{II}} & [0] \\ [0] & [0] & [X]_{\mathrm{III}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [c]_{\mathrm{I,I}} & [c]_{\mathrm{I,II}} & [c]_{\mathrm{I,III}} \\ [c]_{\mathrm{II,I}} & [c]_{\mathrm{II,II}} & [c]_{\mathrm{II,III}} \\ [c]_{\mathrm{III,I}} & [c]_{\mathrm{III,II}} & [c]_{\mathrm{III,III}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [X]^T_{\mathrm{I}} & [0] & [0] \\ [0] & [X]^T_{\mathrm{II}} & [0] \\ [0] & [0] & [X]^T_{\mathrm{III}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta\}_{\mathrm{I}} \\ \{\Delta\}_{\mathrm{II}} \\ \{\Delta\}_{\mathrm{III}} \end{Bmatrix} \tag{4.26}$$

$$- \begin{bmatrix} [X]_{\mathrm{I}} & [0] & [0] \\ [0] & [X]_{\mathrm{II}} & [0] \\ [0] & [0] & [X]_{\mathrm{III}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [c]_{\mathrm{I,I}} & [c]_{\mathrm{I,II}} & [c]_{\mathrm{I,III}} \\ [c]_{\mathrm{II,I}} & [c]_{\mathrm{II,II}} & [c]_{\mathrm{II,III}} \\ [c]_{\mathrm{III,I}} & [c]_{\mathrm{III,II}} & [c]_{\mathrm{III,III}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \{s_A\}_{\mathrm{I}} \\ \{s_A\}_{\mathrm{II}} \\ \{s_A\}_{\mathrm{III}} \end{Bmatrix}$$

Das Gleichungssystem 4.26 kann nach dem Iterationsverfahren von *Kany*/ *El Gendy* (1999) oder mit

dem *Gauß*schen Algorithmus gelöst werden. Durch Lösung dieser Gleichung ergeben sich $w_{o.\mathrm{I}}$, tan $\theta_{x.\mathrm{I}}$ und tan $\theta_{y.\mathrm{I}}$, $w_{o.\mathrm{II}}$, tan $\theta_{x.\mathrm{II}}$ und tan $\theta_{y.\mathrm{II}}$ und $w_{o.\mathrm{III}}$, tan $\theta_{x.\mathrm{III}}$ und tan $\theta_{y.\mathrm{III}}$.

Mit diesen Werten ergibt sich aus den Gln. 4.17 und 4.5 folgende Gleichung zur Bestimmung der n Unbekannten Q_1 bis Qr.

$$\begin{Bmatrix} \{Q\}_{\mathrm{I}} \\ \{Q\}_{\mathrm{II}} \\ \{Q\}_{\mathrm{III}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [c]_{\mathrm{I,I}} & [c]_{\mathrm{I,II}} & [c]_{\mathrm{I,III}} \\ [c]_{\mathrm{II,I}} & [c]_{\mathrm{II,II}} & [c]_{\mathrm{II,III}} \\ [c]_{\mathrm{III,I}} & [c]_{\mathrm{III,II}} & [c]_{\mathrm{III,III}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [X]^T_{\mathrm{I}} & [0] & [0] \\ [0] & [X]^T_{\mathrm{II}} & [0] \\ [0] & [0] & [X]^T_{\mathrm{III}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta\}_{\mathrm{I}} \\ \{\Delta\}_{\mathrm{II}} \\ \{\Delta\}_{\mathrm{III}} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} [c]_{\mathrm{I,I}} & [c]_{\mathrm{I,II}} & [c]_{\mathrm{I,III}} \\ [c]_{\mathrm{II,I}} & [c]_{\mathrm{II,II}} & [c]_{\mathrm{II,III}} \\ [c]_{\mathrm{III,I}} & [c]_{\mathrm{III,II}} & [c]_{\mathrm{III,III}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \{s_A\}_{\mathrm{I}} \\ \{s_A\}_{\mathrm{II}} \\ \{s_A\}_{\mathrm{III}} \end{Bmatrix} \tag{4.27}$$

Setzt man auch die Werte w_o, tan θ_x and tan θ_y in Gl. 4.17 ein, so erhält man die Setzungen s_1 bis s_r.

4.7 Iterationsverfahren

Das Hauptproblem bei umfangreichen Systemen von Fundamentgruppen mit elastischen oder starren Platten ist die Lösung der umfangreichen Gleichungssysteme, für die ein Computer mit großem Speichervolumen erforderlich ist.

Es gibt viele Iterationsverfahren für die Berechnung einer elastischen Einzelplatte, wie z.B. von *Haung* (1974), *Ahrens*/ *Winselmann* (1984), *Stark* (1990) und *El Gendy* (1994). Diese Verfahren können hierbei verwendet werden.

Um die Arbeit rationell durchführen zu können, sollte der Computer auch über eine hohe Rechengeschwindigkeit verfügen. Deshalb wurde von den Verfassern zur Durchführung der hier vorgelegten Arbeit ein neues Iterationsverfahren zur Lösung großer Gleichungssysteme entwickelt, um die Rechenzeit zu reduzieren. Dieses Iterationsverfahren benötigt relativ wenig Speicherplatz auf dem Computer und ermöglicht damit, viele praktisch wichtige Probleme, die bei großen Plattensystemen auf einem dreidimensional geschichteten Baugrund auftreten, zu lösen. Das Bild 4.2 zeigt in einem Ablaufdiagramm die Iterationszyklen zu diesem Verfahren.

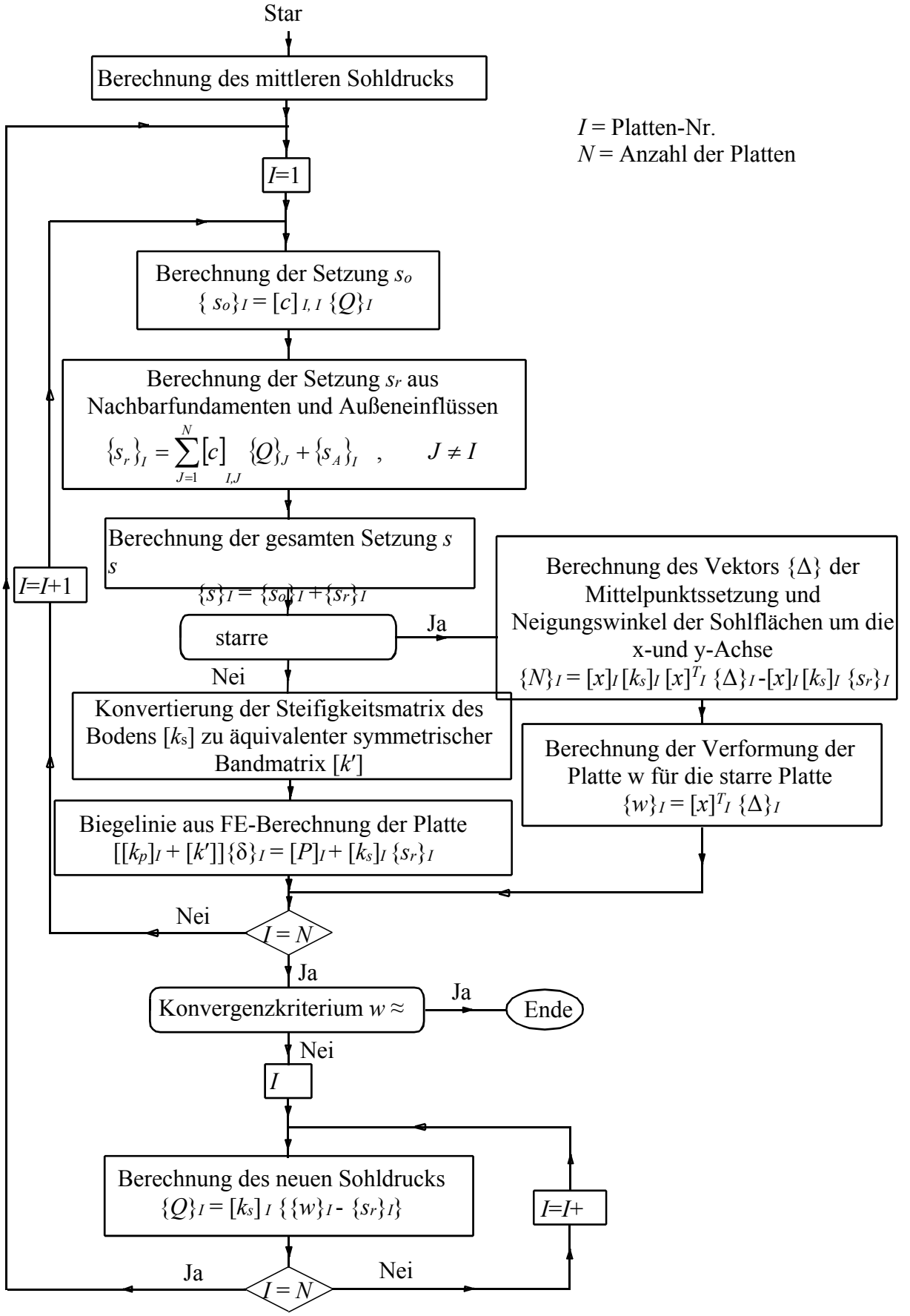


Bild 4.2 Ablaufdiagramm zum Iterationszyklus des Iterationsverfahrens

Beispiel 4.1 Berechnung eines Systems von zwei benachbarten gleich großen Kreisplatten

1 Aufgabenstellung

Um die Anwendung des iterativen Verfahrens von *Kany*/ *El Gendy* (1997) für das interaktive System von Platten zu erläutern, werden in diesem Beispiel zwei nahe nebeneinander liegende gleich große Kreisfundamente untersucht (Bild 4.3). Die Gründungsplatten haben einen Durchmesser von 22 [m] und sind 0.65 [m] dick. Sie sind auf einer nachgiebigen Schicht von 15 [m] Dicke gegründet. Sie sind beide belastet mit

16 Einzellasten P_1 = 1250 [kN] und 8 Einzellasten je P_2 = 1000 [kN]

Der Fundamentbeton hat einen Elastizitätsmodul $E_b = 2.6 \times 10^7$ [kN/m^2] und eine *Poisson*zahl ν_b = 0.15 [-], während für den Boden ein Steifemodul E_s = 9500 [kN/m^2] mit der *Poisson*zahl ν_s = 0.0 [-] angesetzt wird. Jede Platte wird in 404 Elemente aufgeteilt, sodass die Kreisform gut erfasst wird.

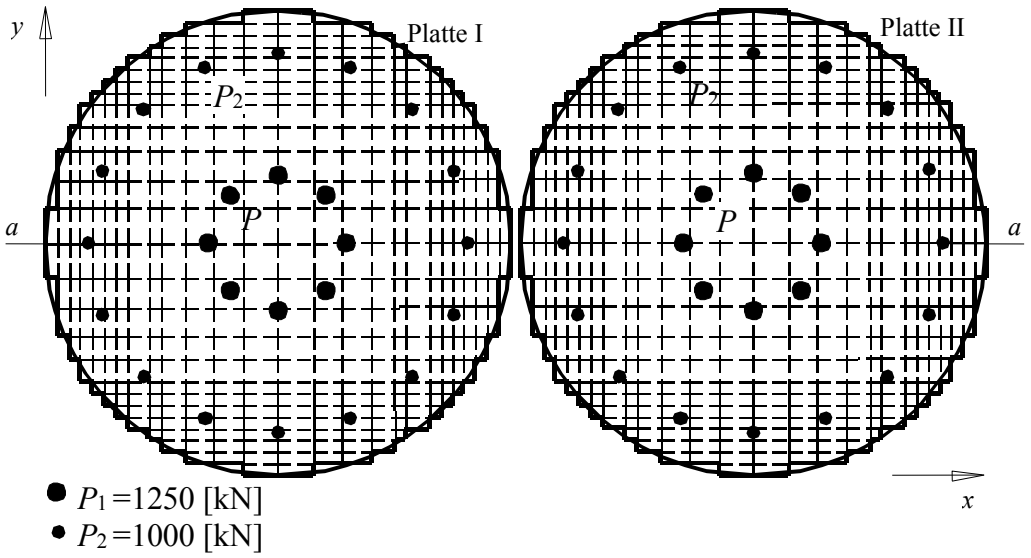


Bild 4.3 System mit zwei kreisförmigen Platten

2 Berechnung

Mit Hilfe des Programms *ELPLA* werden die Sohldrücke, Setzungen und Momente für zwei Fälle berechnet:

1 Platte I setzt sich unabhängig von der Platte II

2 Platte II setzt sich unter dem Einfluss der Platte I und aus der Eigenlast

Mit den jeweils 404 Elementen ergibt sich mit dem iterativen Steifemodulverfahren ein Gleichungssystem von 2742 Gleichungen.

Um die Kreisfundamente als Plattensystem zu berechnen, werden die Daten der zwei Platten in zwei

getrennten Dateien eingesetzt. Außerdem enthält eine dritte Datei Information über das Plattensystem. Die Daten der zwei Platten sind außer den Ursprungskoordinaten ziemlich ähnlich. Der Koordinatenursprung beträgt (x_o, y_o) = (0.0, 0.0) für die Platte I und (x_o, y_o) = (22.5, 0.0) für die Platte II.

Die Maximaldifferenz zwischen der Bodensetzung *s* [cm] und die Plattenverschiebung *w* [cm] wird als eine Genauigkeitszahl betrachtet. In diesem Beispiel wurde bei der Berechnung der Iterationsvorgang abgebrochen, wenn der Setzungsunterschied < 0.01 [cm] betrug. Dieses Ziel war nach 4 Iterationen erreicht durch Verwenden der Iterationsmethode nach *Kany*/ *El Gendy* (1997) für beide Fälle mit und ohne Wechselwirkung (nur Einzelplatte).

Um die Geschwindigkeit der Konvergenz bei der Iterationsmethode nach *Kany*/ *El Gendy* (1997) zu zeigen, wird ein Vergleich zwischen dem Bettungsmodulverfahren mit iterativer Verbesserung der Bettungsmoduli nach *Ahrens*/ *Winselmann* (1984) und der Iterationsmethode nach *El Gendy* (1994) durchgeführt. Die Genauigkeit der Berechnung ist gegen die Iterationsschritt-Nr. für die drei Iterationsmethoden im Bild 4.4 geplottet, wobei die Berechnung für eine Einzelplatte durchgeführt wird. Es ist zu erkennen, dass die Iterationsmethode nach *Kany*/ *El Gendy* (1997), die in *ELPLA* programmiert ist, am schnellsten zum Ziel führt. Sie ist deshalb für Systeme mit zahlreichen Elementen geeignet.

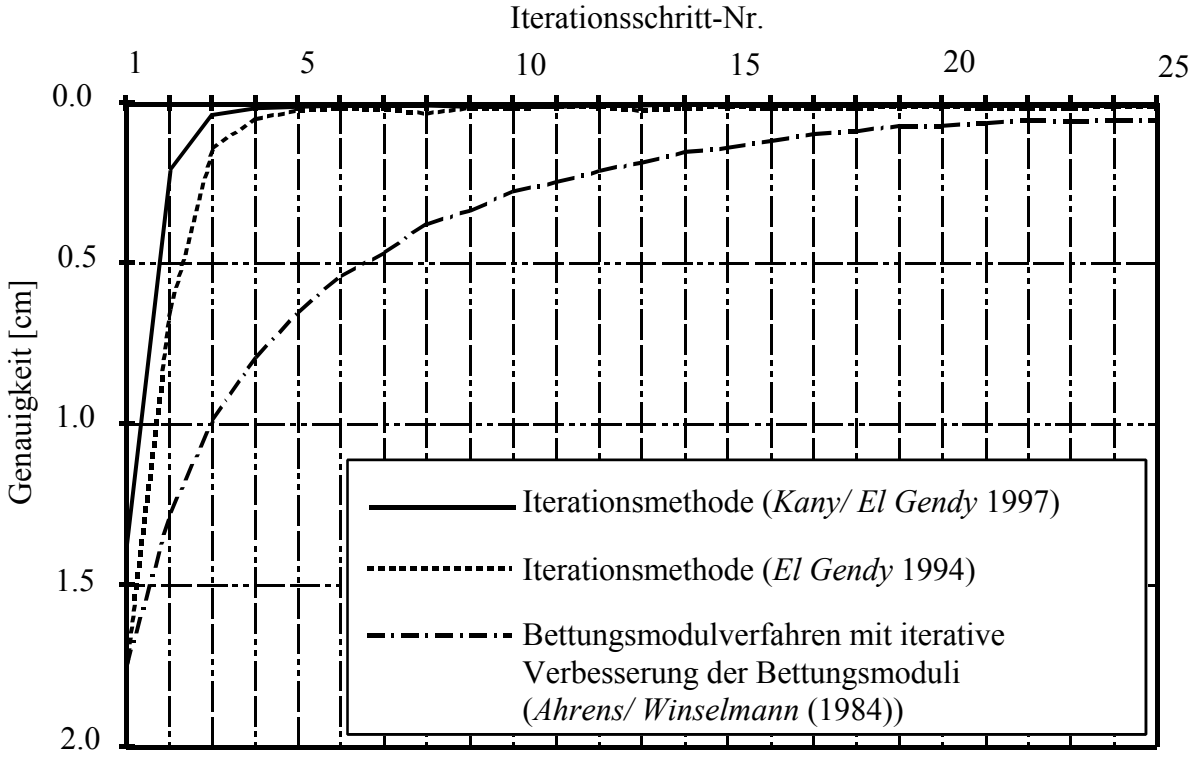


Bild 4.4 Iterationsschritt-Nr. mit der erzielten Genauigkeit der 3 Iterationsmethoden

3 Ergebnisse und Auswertung

Aus den Ergebnissen ist der große Einfluss des Nachbarbauwerks auf die Setzungen zu erkennen. Bild 4.5 zeigt auf der linken Seite die Isolinien der Setzungen unter der Platte I ohne Wechselwirkung der zwei Platten. Wie erwartet, sind die Setzungen symmetrisch verteilt, weil die Platte unter der Annahme berechnet wurde, dass die Belastungen symmetrisch angewandt werden. Bild 4.5 zeigt auf der rechten Seite die Isolinien der Setzungen unter der Platte II mit Wechselwirkung der zwei Platten. Beim Vergleich zeigt sich, dass beträchtliche Differenzbeträge bei den Setzungen unter der Platte II auftraten. Die Setzungen der Platte II wurden am Rand zwischen zwei Platten größer.

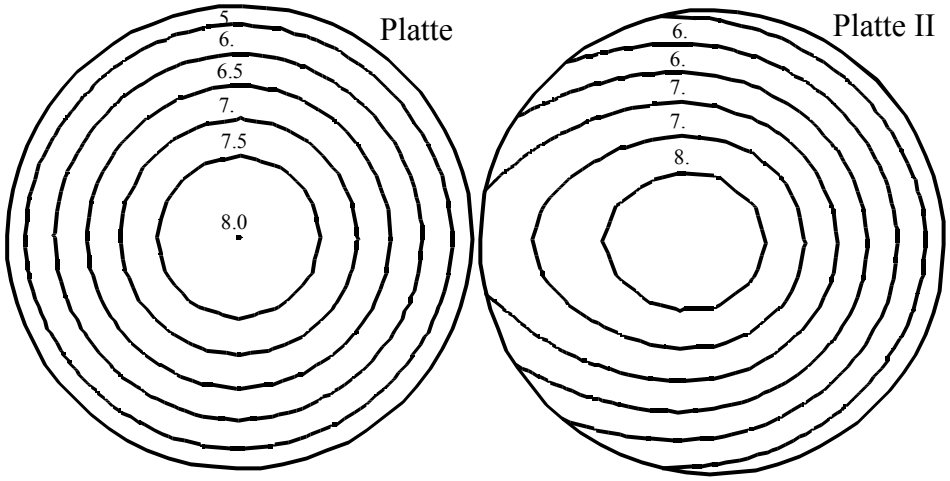


Bild 4.5 Isolinien der Setzungen ohne Nachbareinfluss (Platte I) und mit Nachbareinfluss (Platte II)

Bild 4.6a zeigt die Setzungen s, Sohldrücke q and Momente m_x in der Mitte der Platte II für beide Fälle mit und ohne Wechselwirkung.

Aus den Ergebnissen ist zu erkennen, dass die Setzungen an den Randknoten der Platte II nahe der Platte I stark steigen (Bild 4.6a). Deshalb steigt die Setzung von 5.12 [cm] auf 7.75 [cm] in der Mitte der Platte.

Bild 4.6b zeigt, dass sich der Sohldruck am Rand der Platte II nahe der Platte I von 70 [kN/m^2] auf 240 [kN/m^2] gesteigert hat. Der Sohldruck wurde aufgrund der zusätzlichen Setzungen von der Wechselwirkung am Rand zwischen zwei Platten kleiner. Aus dem Gleichgewicht der senkrechten Kräfte wurde der Sohldruck in der Mitte der Platte größer. Natürlich verursacht die Änderung in der Sohldruckverteilung unter der Platte auch Änderung und Verschiebung in den Spannungen der Platte. Dementsprechend werden die Momente der Platte betroffen sein.

Die Wechselwirkung der zwei Platten wird deutlich in den Momenten m_x (Bild 4.6c). Das Feldmoment nahe der Platte I wird von 87 [kN.m/m] auf 7 [kN.m/m] reduziert, während das Feldmoment in der Mitte der Platte von 437 [kN.m/m] auf 370 [kN.m/m] reduziert wird.

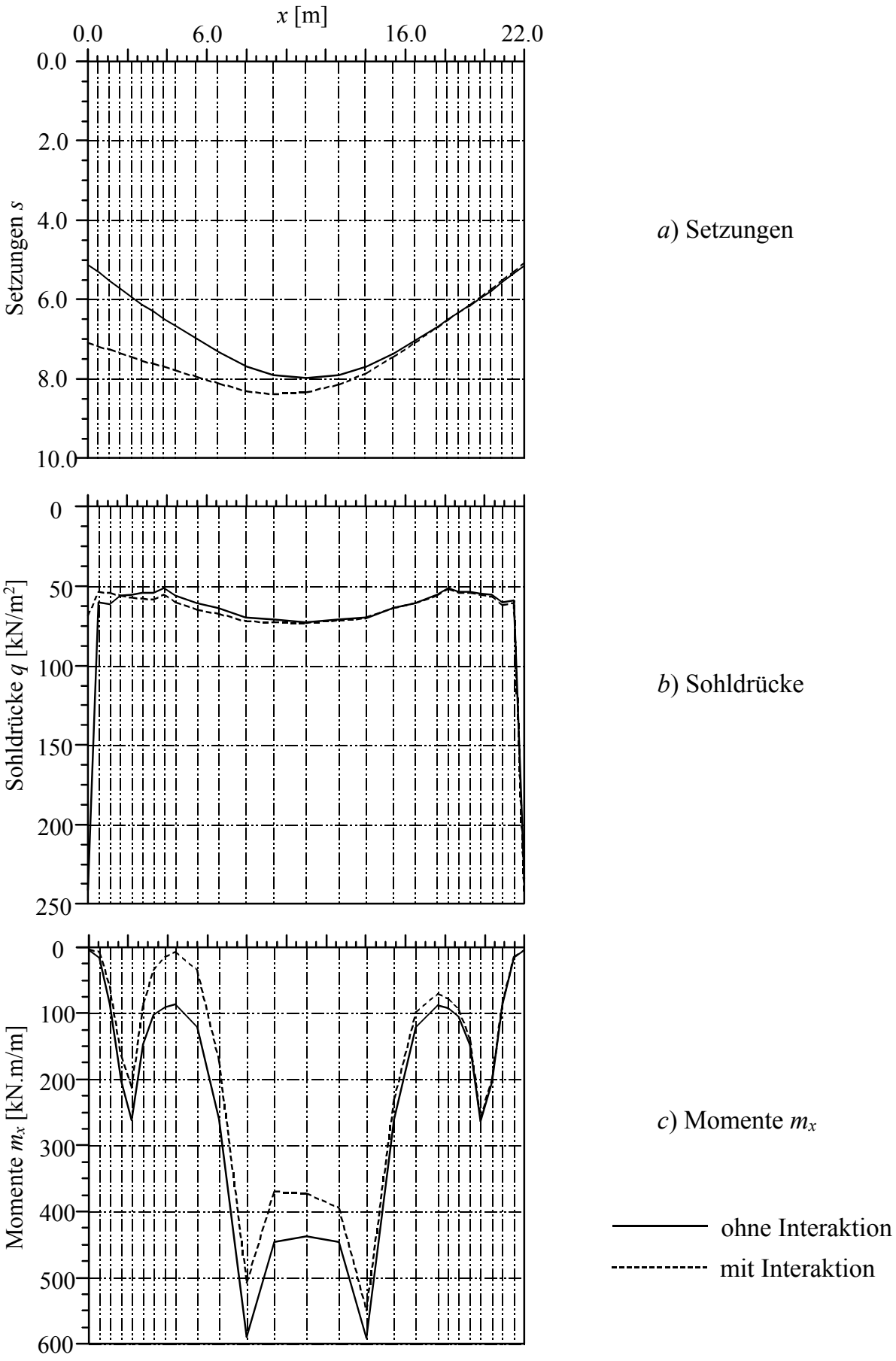


Bild 4.6 Setzungen, Sohldrücke und Momente in der Mitte der Platte II

Beispiel 4.2 Setzungsverhalten von Faulbehältern (Kreisplatten) einer Kläranlage

1 Aufgabenstellung

Zur Bewertung der entwickelten Iterationsverfahren nach *Kany*/ *El Gendy* (1997) für die Berechnung von großen Systemen starrer Platten wird das Beispiel II aus *STAPLA* von *Kany* (1976) gewählt. Die Ergebnisse der Setzungen nach Anwendung der beiden Verfahren werden miteinander verglichen.

Für ein Klärwerk sind vorerst zwei Faulbehälter *A* und *B* vorgesehen, die sich über den Baugrund gegenseitig beeinflussen. Das Maß der möglichen Verkantung für diesen Zustand sowie das Setzungsverhalten bei einer späteren Erweiterung auf vier Faulbehälter ist zu ermitteln. Die Setzungswerte sind unter anderem maßgebend für die Ausführung der Rohranschlüsse. Die Lage der Behälter zueinander sowie der Aufbau des Baugrunds sind in Bild 4.7 zeichnerisch dargestellt. Es wird hier angenommen, dass die Steifemoduli der Schichten $E_s \approx W_s$ sind. Die Setzungsanteile aus der Wiederbelastung werden also aus den gleichen Steifemoduli W_s errechnet wie die Setzungsanteile aus der Erstbelastung E_s.

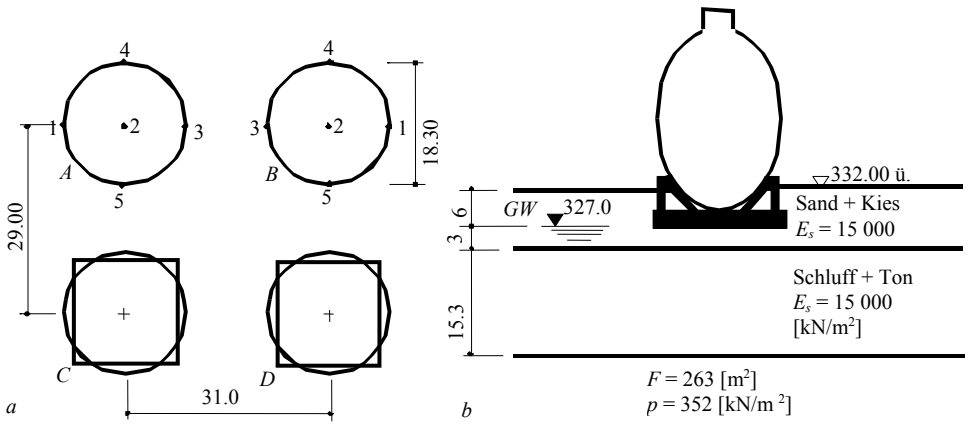


Bild 4.7 a) Lage der Behälter zueinander
b) Bodenkennwerte unter den Behältern (*STAPLA*)

2 Lösung

Für die Abschätzung der Verkantung wird bei *STAPLA* eine grobe Unterteilung der Kreisplatte in Rechteckfelder vorgenommen, die gesamte Anzahl der Felder der vier Platten beträgt 26 (Bild 4.8). Die Daten werden vorerst für den Endzustand "vier Faulbehälter" erfasst. Dabei wird bei zwei Faulbehältern aus Gründen der Symmetrie und zur Verminderung der Rechenkosten auf eine feldweise Aufteilung verzichtet, ersatzweise werden rechteckförmige Außenfundamente angesetzt (für die Behälter *C* und *D* auf Bild 4.7). Bei dem neu entwickelten Iterationsverfahren 6 ist es möglich, das gleiche Plattensystem in viele Elemente zu unterteilen. Hier wird eine Unterteilung der Kreisplatte in Rechteckelemente vorgenommen, wobei die gesamte Knotenzahl der vier Platten 1828 Knoten beträgt (Bild 4.9).

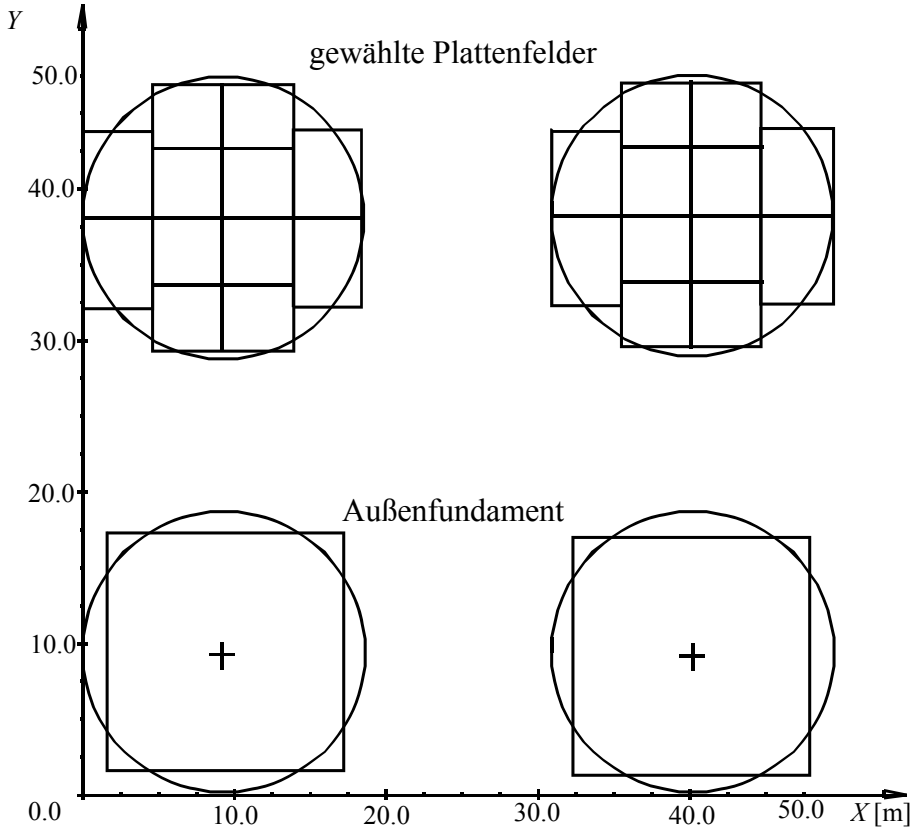


Bild 4.8 Unterteilung der vier Kreisplatten in 26 Felder (*STAPLA*)

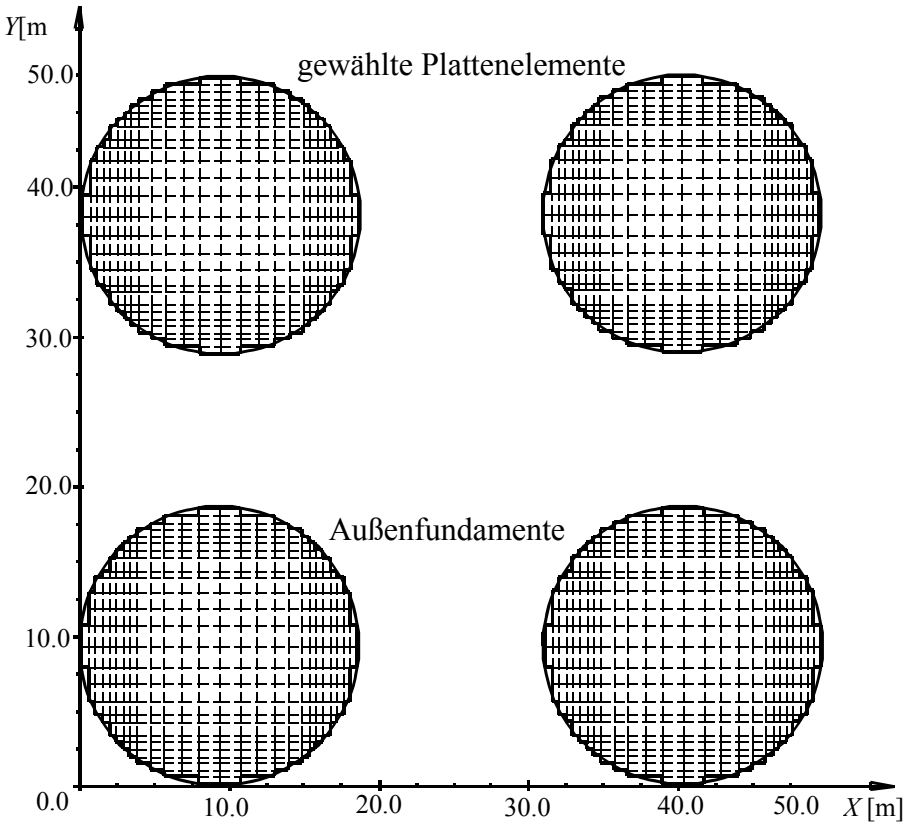


Bild 4.9 Unterteilung der vier Kreisplatten in 1828 Knoten (neue Berechnung)

3 Ergebnisse und Auswertung

In Tabelle 4.1 sind die Ergebnisse der Setzungen beim neu entwickelten Iterationsverfahren mit denen von *STAPLA* nach *Kany* (1976) verglichen. Die für die Verkantung gewählten Punkte sind im Bild 4.7 gekennzeichnet.

Vergleicht man die Setzungen aus der gegenwärtigen Berechnung mit den Werten aus *STAPLA* an den gewählten Punkten, so ergeben sich entsprechend den gewählten Punkten die in Tabelle 4.1 ersichtlichen Werte für die relative Differenz zwischen den beiden Berechnungen. Es ist durch einen Vergleich der beiden Berechnungen zu erkennen, dass die Setzungen bei einer feinen Unterteilung der Kreisplatte kleiner als bei einer groben Unterteilung der Kreisplatte von 4.06 [%] bis 6.41 [%] sind.

Tabelle 4.1 Vergleich zwischen *STAPLA* (*Kany* (1976)) und gegenwärtigen Berechnungen für die Setzung *s* [cm] unter Systemen starrer Kreisplatten

Punkt	Setzung *s* [cm]		relative Differenz [%]
	STAPLA	neue Berechnung	
1	14.51	13.74	5.6
2	14.91	14.17	5.2
3	15.31	14.61	4.8
4	14.44	13.57	6.4
5	15.38	14.78	4.1

Beispiel 4.3 Berechnung von zwei benachbarten Fundamentplatten unter Berücksichtigung von zwei Schornsteinfundamenten

1 Aufgabenstellung

Neben der Möglichkeit zur Berechnung von großen Systemen starrer Platten mit vielen Elementen beim neu entwickelten Iterationsverfahren lässt sich der beschriebene Algorithmus auch zur Berechnung von großen Systemen starrer Platten mit Netz analog zum FE-Netz von großen Systemen elastischer Platten nach *Kany*/ *El Gendy* (1997) konstruieren. Damit können beide Berechnungen miteinander verglichen werden.

Es wird ein Beispiel durchgerechnet, um die gegenseitige Beeinflussung der Bauwerke infolge Drucküberschneidung bei Berechnungen von Setzungen starrer und elastischer Platten auf die Setzungen vergleichen zu können. Das folgende Beispiel (6.4.2, S. 162 ff) stammt aus dem Grundbau-Taschenbuch *Graßhoff*/ *Kany* (1997). Zwei größere Fundamentplatten sowie zwei Schornsteine stehen beieinander. Die Abmessungen sind den Bildern 4.10 und 4.12 und der Tabelle 4.3 zu entnehmen.

2 Bodenkennwerte

Der Baugrund besteht aus zwei Schichten mit unterschiedlichen Bodenkennwerten, wie in Tabelle 4.2 dargestellt. Die Gründungstiefe für das System ist 1.3 [m]. Die *Poisson*zahl wird $\nu_s = 0.0$ [-] angesetzt und ist konstant für alle Bodenmaterialien (Bild 4.10a und Tabelle 4.2).

Tabelle 4.2 Bodenkennwerte

Schicht Nr.	Benennung des Bodens	Tiefe der Schicht unter Gelände [m]	Steifemodul für		Wichte des Bodens γ_s [kN/m^3]
			Erstbelastung E_s [kN/m^2]	Wiederbelastung W_s [kN/m^2]	
1	Schluff	4.7	9 000	27 000	20
2	Sand	15	100 000	300 000	-

3 Materialkennwerte des Betons und Plattendicke

Für Plattenmaterial und Plattendicke werden die folgenden Parameter angenommen:

Elastizitätsmodul	E_b	$= 2 \times 10^7$	[kN/m^2]
*Poisson*zahl	ν_b	$= 0.25$	[-]
Plattendicke	d	$= 0.5$	[m]
Wichte	γ_b	$= 0.0$	[kN/m^3]

Das Eigengewicht wird vernachlässigt

Für die Berechnung von Systemen starrer Platten spielen der Elastizitätsmodul E_b, die *Poisson*zahl ν_b und die Dicke d der Platten keine Rolle.

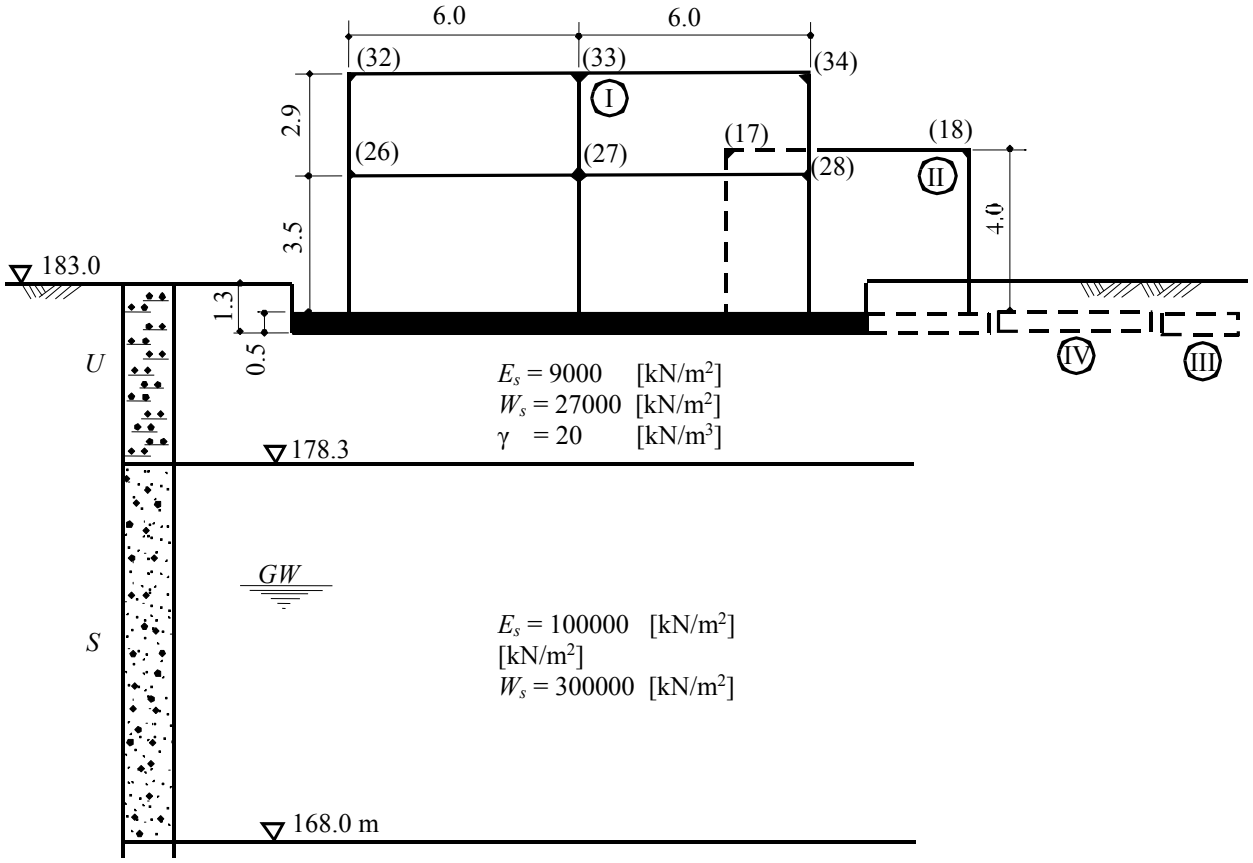


Bild 4.10 Schnitt 1-5 mit Schichtenprofil, Bodenkennwerten und Knotennummern des Überbaus nach *Graßhoff/ Kany* (1997)

Tabelle 4.3 Abmessungen der Platten I und II und der Schornsteinfundamente III und IV

Fundament	Länge [m]	Breite [m]	Koordinatenursprung	
			x [m]	y [m]
Platte I	15	8	-1.5	-0.5
Platte II	8	12	9.0	7.6
Schornsteinfundament III	2	2	21.0	11.0
Schornsteinfundament IV	4	3	17.0	1.5

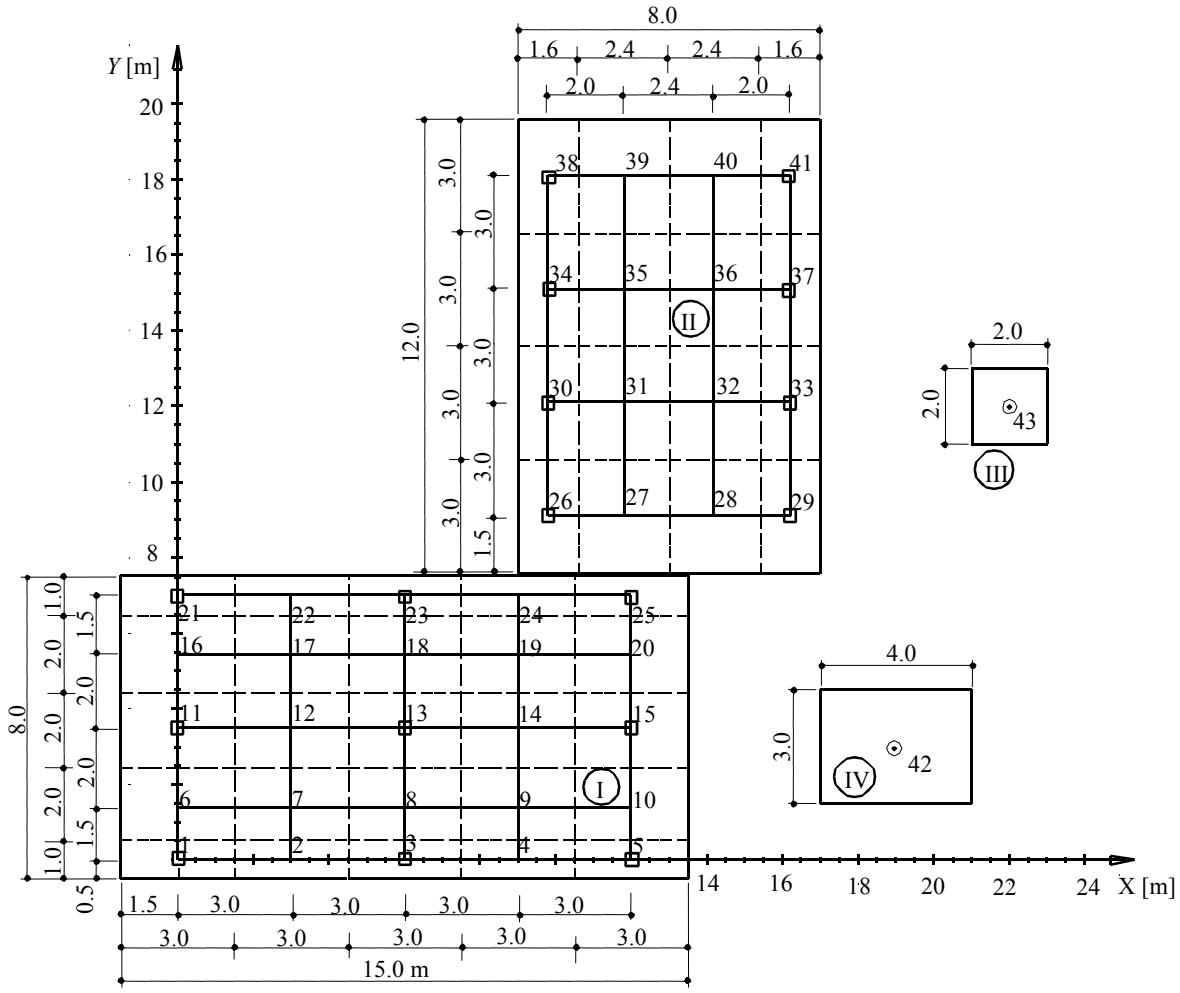


Bild 4.11 Grundrissdarstellung des Plattensystems I und II sowie der Schornsteinfundamente III und IV mit Unterteilung der Platten in 43 Felder (*Graßhoff/ Kany* (1997))

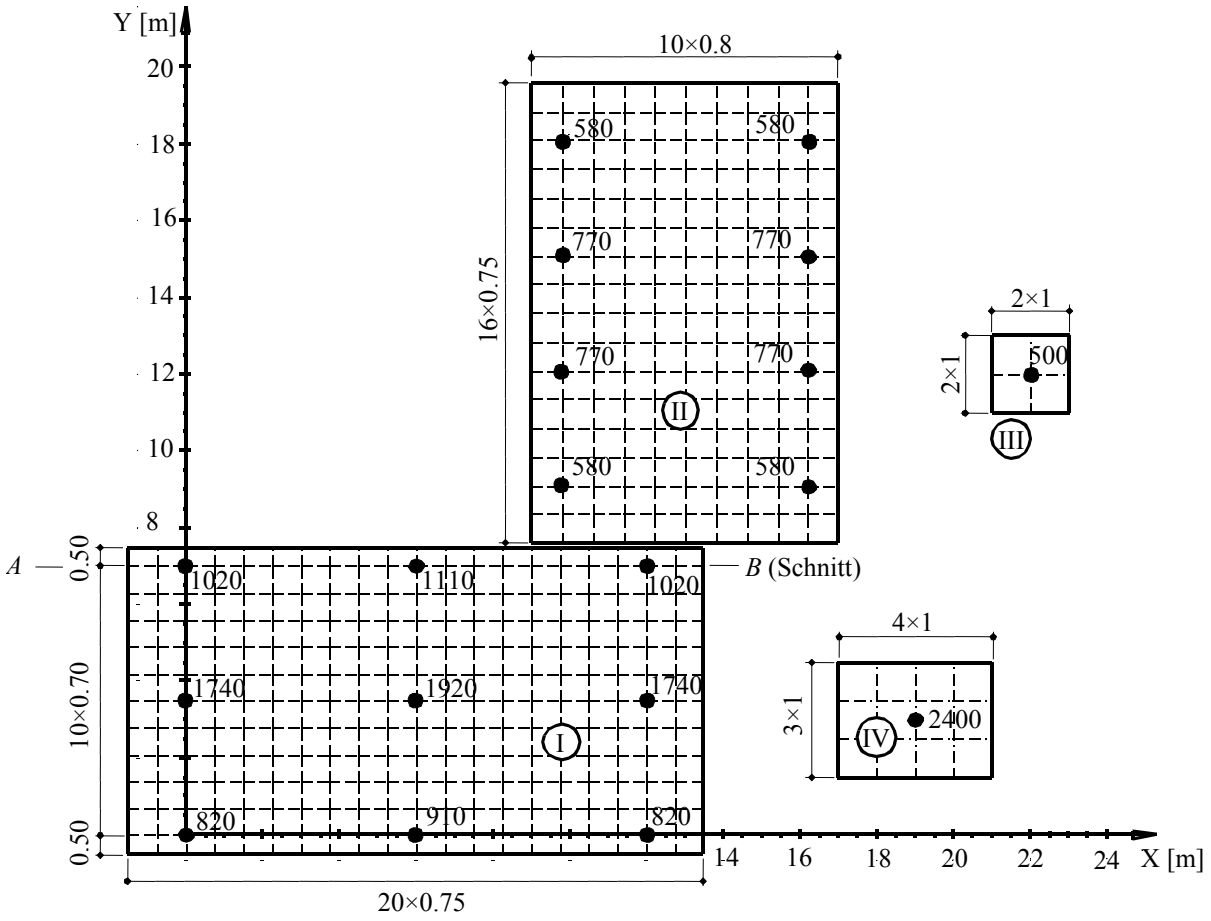


Bild 4.12 Grundrissdarstellung mit Lasten [kN] des Plattensystems I und II sowie der Schornsteinfundamente III und IV mit Unterteilung der Platten in 489 Knoten (neue Berechnung)

4 Lösung

Zunächst werden für das in Bild 4.10 dargestellte räumliche Bauwerkssystem an jedem Knoten die Setzungen ermittelt. Für die Berechnung werden die beiden nebeneinander liegenden Platten I und II und die Schornsteinfundamente III und IV mit drei verschiedenen Berechnungsmodellen durchgerechnet:

1. System mit schlaffen Platten
2. System mit elastischen Platten
3. System mit starren Platten

Aus dem Vergleich der Ergebnisse von *Graßhoff/ Kany* (1997) mit den Ergebnissen aus der neuen Berechnung kann man erkennen, dass sich die Verformungen und Sohldrücke unter Berücksichtigung der Platten und Überbausteifigkeit sehr dem Ergebnis annähern, das man bei Berechnung mit starren Platten erzielt. Bei den schlaffen Platten werden Plattendicken von nur d = 20 [cm] angesetzt. Mit den gleichen Eingabedaten werden die drei Berechnungen durchgeführt, um einen Vergleich zu ermöglichen.

5 Ergebnisse und Auswertung

Die Bilder 4.13 bis 4.15 zeigen die errechneten Setzungen von Systemen schlaffer und elastischer sowie starrer Platten. Bild 4.16 zeigt in einer Graphik zum Vergleich die Ergebnisse der drei Berechnungen im Schnitt *A*-*B*. Durch Vergleiche der Setzungen im Schnitt *A*-*B* (Bild 4.16) aus den 3 Berechnungsfällen ist deutlich der große Einfluss der Platten- und Überbausteifigkeit zu erkennen, ebenso aus den Tabellen 4.4 und 4.5.

Es ist klar, dass sich bei Berechnung des Plattensystems ohne Berücksichtigung von benachbarten Fundamenten für die drei Platten jeweils symmetrische Verformungen ergeben.

Aus den Endergebnissen ist weiterhin zu erkennen, dass die Setzungen der Randfelder des Bauwerks I in unmittelbarer Nähe des Bauwerks II stark zunehmen. So erhöht sich die Setzung des Feldes 25 von 3.25 [cm] auf 3.69 [cm] im Fall 1, von 2.59 [cm] auf 2.77 [cm] im Fall 2 und von 2.46 [cm] auf 2.65 [cm] im Fall 3. Daraus wird deutlich, dass in Übereinstimmung mit vielen Beobachtungen bei der Errichtung von Neubauten mit zusätzlichen Setzungen bei vorhandenen nahen Bebauungen gerechnet werden muss.

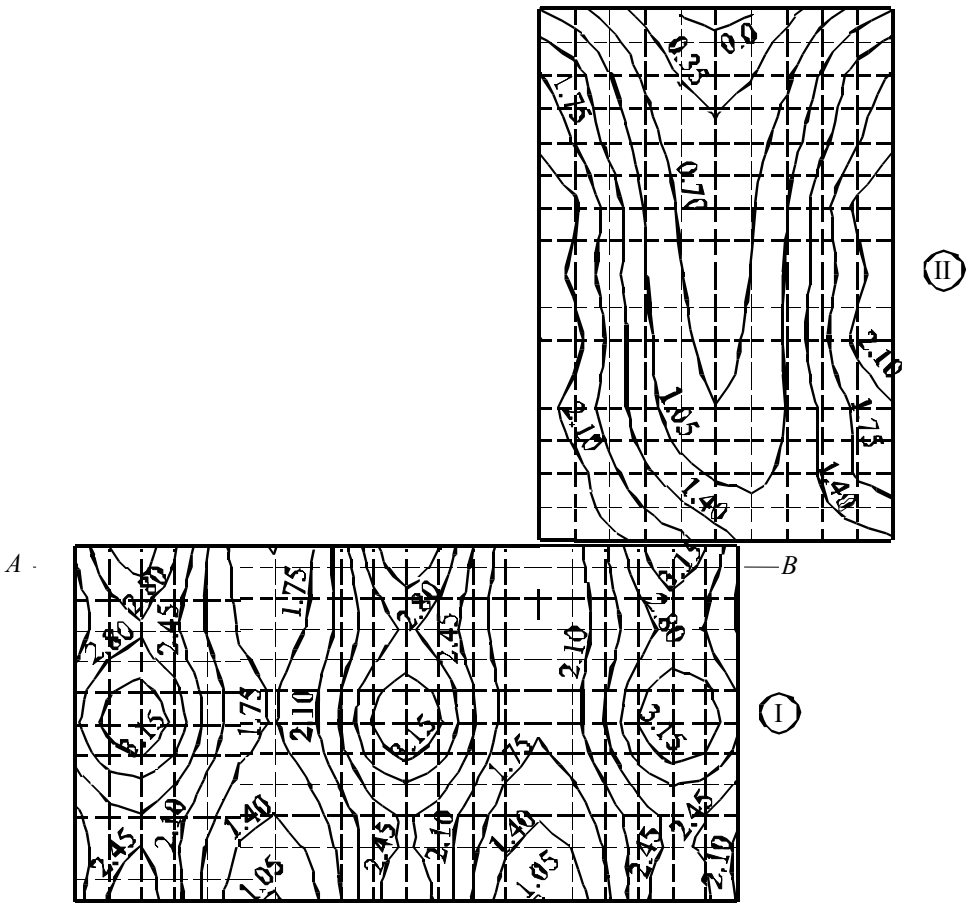


Bild 4.13 Isolinien der Setzungen bei Berechnungen von Systemen schlaffer Platten

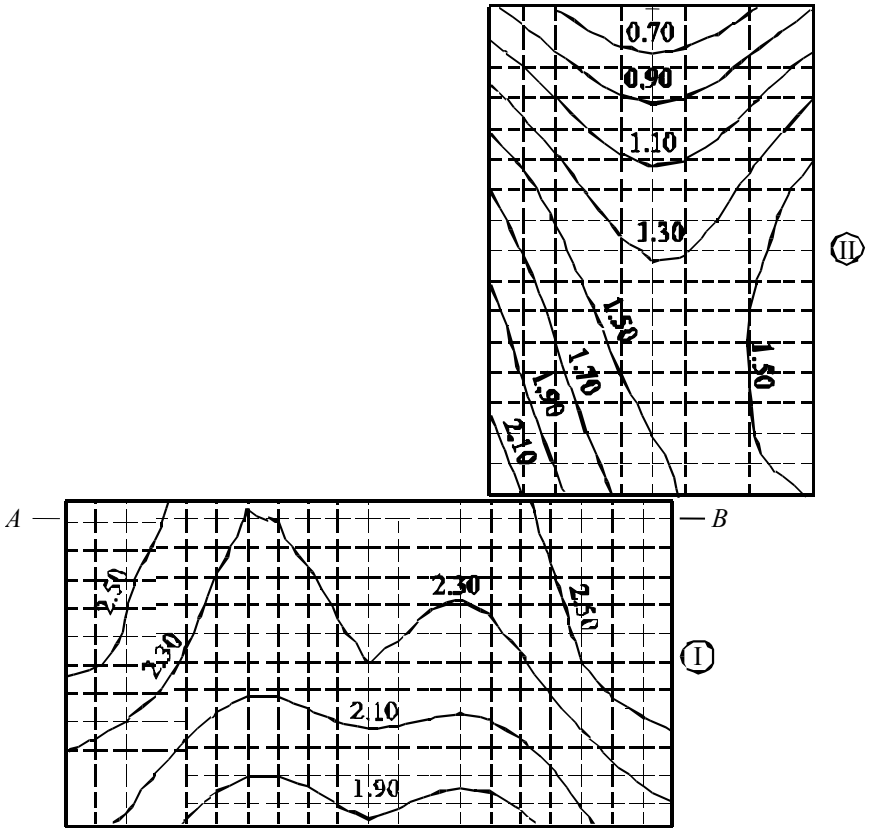


Bild 4.14 Isolinien der Setzungen bei Berechnung von Systemen elastischer Platten

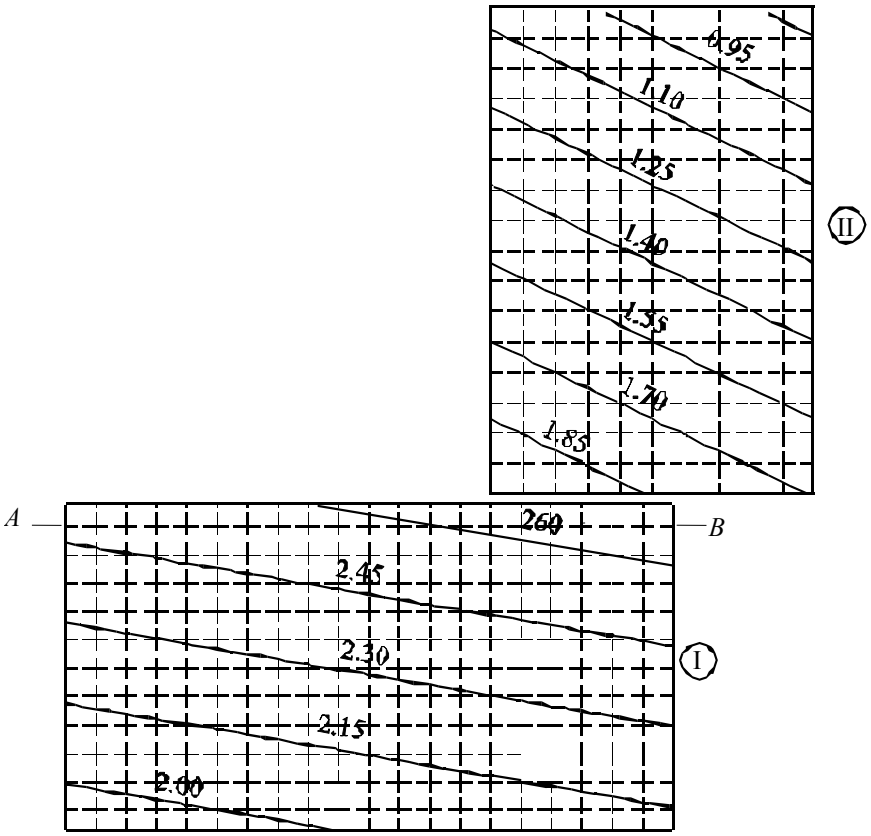


Bild 4.15 Isolinien der Setzungen bei Berechnung von Systemen starrer Platten

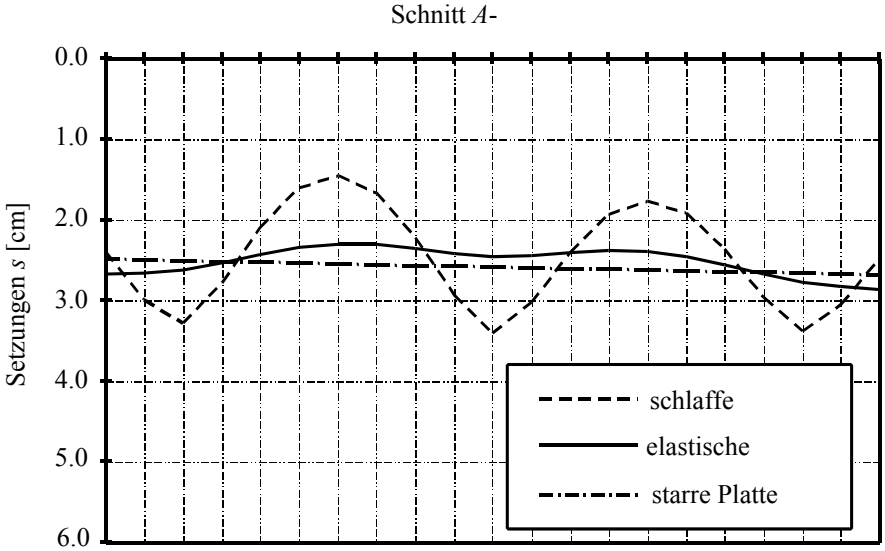


Bild 4.16 Setzungen im Schnitt 21-25 unter der Platte I
(Bauwerke I, II und Schornsteinfundamente III und IV)

Tabelle 4.4 Vergleich zwischen *Graßhoff/ Kany* (1997) und neuer Berechnung (*ELPLA*) für Setzungen *s* [cm] unter Platte I (ohne Nachbareinfluss)

Berechnung	*Graßhoff/ Kany* (1997)		neue Berechnung	
	Punkt 21	Punkt 25	Punkt 21	Punkt 25
schlaffe Sohlfläche	3.65	3.65	3.25	3.25
elastische Platte	3.04	3.04	2.59	2.59
starre Platte	2.78*	2.78*	2.46	2.46

*gerechnet als elastische Platte mit Überbau

Tabelle 4.5 Vergleich zwischen *Graßhoff/ Kany* (1997) und neuer Berechnung (*ELPLA*) für Setzungen *s* [cm] unter Platte I (mit Nachbareinfluss des Bauwerks II und der beiden Schornsteinfundamente III und IV)

Berechnung	*Graßhoff/ Kany* (1997)		neue Berechnung	
	Punkt 21	Punkt 25	Punkt 21	Punkt 25
schlaffe Platte	3.66	4.00	3.27	3.39
elastische Platte	3.03	3.51	2.62	2.77
starre Platte	2.79*	3.16*	2.50	2.65

* gerechnet als elastische Platte mit Überbau

Bei den schlaffen Platten (Bild 4.13) konzentrieren sich die Setzungen unter den Lasten. Im anderen Extremfall der starren Platten (Bild 4.15) sind die Isolinien geradlinig und wegen des Nachbareinflusses geneigt. Der Nachbareinfluss ist auch bei den elastischen Platten (Bild 4.14) deutlich erkennbar. Trotz mittiger Belastung ergeben sich in allen 3 Systemen erhebliche Setzungsunterschiede und unsymmetrische Isolinien. Im Übrigen sind je nach Steifigkeit der Platten und Überbauten wesentliche Unterschiede im Setzungsverhalten zu erkennen. Dasselbe gilt auch für die hier nicht dargestellten Sohldrücke und Schnittgrößen (Bilder 4.13 bis 4.15).

Beispiel 4.4 Wechselwirkung zweier nebeneinander liegender quadratischer Platten

1 Beschreibung des Beispiels

Trennfugen werden üblicherweise in den Fundamentplatten verwendet, wenn die Belastungsintensität darauf sich beträchtlich von einem Bereich zum anderen unterscheidet. In solchen Fällen kann das Fundament entsprechend seiner Belastungsintensität aufgeteilt werden, um Schäden zu vermeiden. Entweder wird eine vollständig getrennte Fuge oder eine Gelenkfuge gebaut. Wenn das Fundament eine Trennfuge hat, setzt sich jeder Teil unabhängig, aber es wird Wechselwirkung zwischen Teilen des Fundaments durch den Untergrund geben. Im Fall der Gelenkfuge gibt es Querkraftübertragung zwischen den Verbindungsteilen.

Dieses Beispiel wird durchgeführt, um die Wechselwirkung zweier Platten unter Berücksichtigung von Fugen zu untersuchen. Zwei gleiche quadratische Platten I und II werden nebeneinander gebaut. Jede Platte hat eine Seite von 12 [m] Länge und 0.5 [m] Dicke. Platte I hat eine gleichförmige Belastung von 400 [kN/m^2], während Platte II eine gleichförmige Belastung von 200 [kN/m^2] aufweist.

2 Bodenkennwerte

Die Platten ruhen auf einer Bodenschicht von 10 [m] Mächtigkeit auf einer starren Basis. Der Baugrund hat die folgenden Parameter:

Steifemodul für Erstbelastung	$E_s = 10\,000$	[kN/m^2]
Steifemodul für Wiederbelastung	$W_s = 30\,000$	[kN/m^2]
Wichte	$\gamma_s = 18$	[kN/m^3]
*Poisson*zahl	$\nu_s = 0.3$	[-]

3 Materialkennwerte des Betons

Für das Plattenmaterial gilt:

Elastizitätsmodul	$E_b = 2 \times 10^7$	[kN/m^2]
Wichte	$\gamma_b = 25$	[kN/m^3]
*Poisson*zahl	$\nu_b = 0.25$	[-]

Vier Fälle, die den Einfluss von Nachbarbauwerken betreffen, werden wie folgt berücksichtigt:

Fall 1: Platte I und II werden nebeneinander gleichzeitig gebaut. Dieser Fall wird für unterschiedliche Abstände *c* zwischen den zwei Platten (Bild 4.17) untersucht, wobei *c* = 0.0 [m], 0.01 [m], 0.1 [m], 1.0 [m] und 10 [m]

Fall 2: Platte I wird zuerst gebaut, dann später die Platte II. Dieser Fall wird für unterschiedliche Abstände *c* zwischen den zwei Platten (Bild 4.17) untersucht, wobei *c* = 0.0 [m], 0.01 [cm], 0.1 [m], 1.0 [m] und 10 [m]

Fall 3: Statt Platte I und II wird nur eine Platte gebaut (Bild 4.18)

Fall 4: Platte I und II sind sich durch eine Gelenkfuge (Bild 4.19) verbunden

4 Berechnung

Die Platten werden in quadratische Elemente unterteilt, jedes Element hat eine Seite von 1.5 [m], wie in den Bildern 4.17 bis 4.19 gezeigt.

Die Berechnung der Platten im Fall 1 kann auf folgende zwei Arten durchgeführt werden:

a) durch Iteration bei Verwendung zweier unabhängiger Netze für die Platte I und die Platte II

b) ohne Iteration bei Verwendung eines Netzes für die zwei Platten. Die freien Abstände zwischen den Platten werden durch Einführen von geeigneten zwei Elementen zwischen den Platten durchgeführt. Dann werden die Grenzknoten dieser Elemente entfernt, wie in diesem Beispiel berücksichtigt

Um die Berechnung der Platten im Fall 2 durchzuführen, werden zwei unabhängige Dateinamen der beiden Platten gewählt. Die Daten sind ähnlich für die zwei Platten, außer den Belastungen und den Ursprungskoordinaten. Die Ursprungskoordinaten werden mit $(x_o, y_o) = (0.0, 0.0)$ für die Platte I und $(x_o, y_o) = (12.0 + c, 0.0)$ für die Platte II gewählt. Platte II wird zuerst berechnet, um die Sohldrücke zu erhalten, dann die Platte I, um den Einfluss der Nachbarplatte II zu berücksichtigen.

Um eine Gelenkfuge zwischen den Platten im Fall 4 zu simulieren, werden zwei sehr kleine Elemente zwischen den Platten eingefügt. Jedes Element hat 1 [cm] Breite und 5 [cm] Dicke. Die sehr kleinen Breiten der Elemente halten die Entfernung zwischen den Platten beinah null, während die kleine Dicke der Elemente die Plattenstarrheit an der Fuge sehr klein hält. Die Momente an der Gelenkfuge werden aufgrund der sehr kleinen Starrheit von Verbindungselementen entfernt.

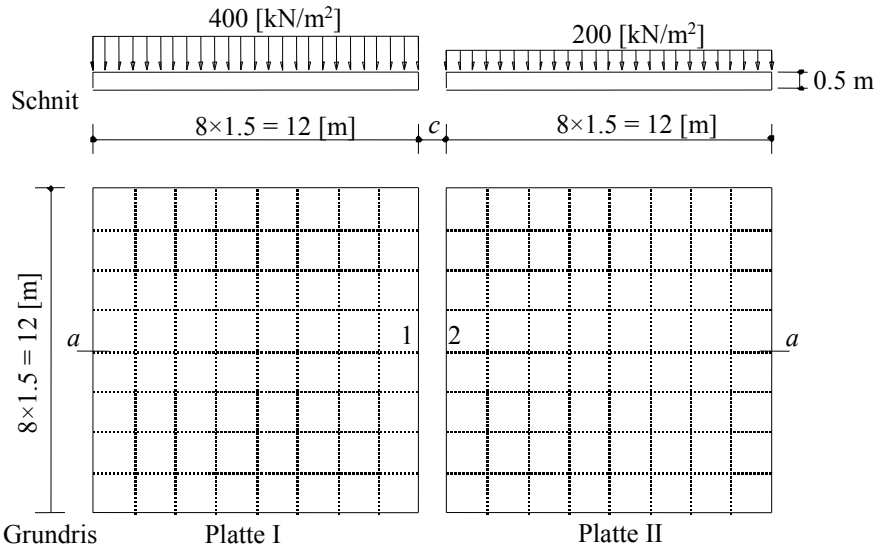


Bild 4.17 Platte I und II werden nebeneinander gebaut (Fälle 1 und 2)

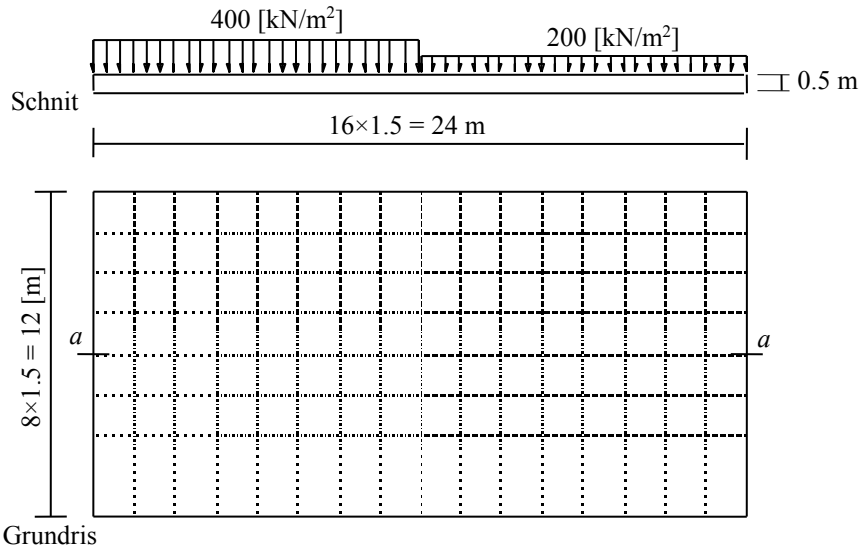


Bild 4.18 Statt Platte I und II ist nur eine Platte gebaut (Fall 3)

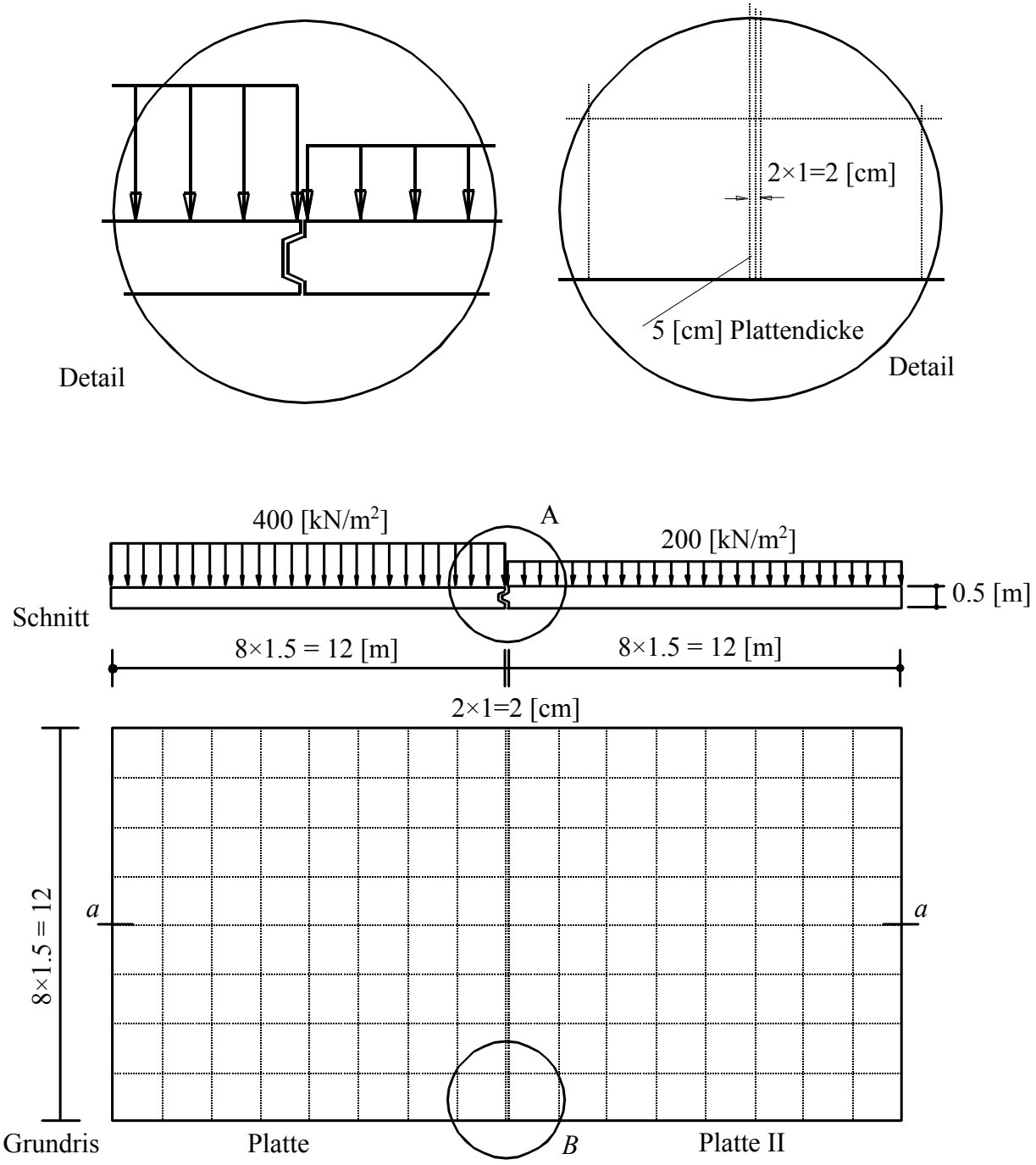


Bild 4.19 Platte I und II werden durch eine Gelenkfuge verbunden (Fall 4)

5 Ergebnisse und Diskussion

Die Bilder 4.20 bis 4.31 zeigen die Verteilung der Setzungen, Sohldrücke, Momente und Querkräfte im Mittelsschnitt *a-a* für die vier Berechnungsfälle. Die Tabellen 4.6 und 4.7 zeigen die Fugenbreite *c* zwischen den zwei Platten, Setzungen (s_1, s_2), Sohldrücke (q_1, q_2) an der Rändern der Platten (Punkte 1 und 2) und Differenzen (Δs, Δq) für die Fälle 1 und 2.

Tabelle 4.6 Setzungen s_1 und s_2 am Rand der Platten I und II und Differenzen Δs

Fugenbreite c [m]	Platte I und II werden nebeneinander gleichzeitig gebaut (Fall 1)			Platte I wird zuerst gebaut, dann später die Platte II (Fall 2)		
	s_1 [cm]	s_2 [cm]	$\Delta s=s_1-s_2$ [cm]	s_1 [cm]	s_2 [cm]	$\Delta s=s_1-s_2$ [cm]
0.00	15.05	14.71	0.34	17.87	6.35	11.52
0.01	15.12	14.54	0.58	17.08	6.35	10.73
0.10	15.30	13.70	1.60	17.24	6.35	10.89
1.00	14.73	10.29	4.44	15.29	6.35	8.94
10.0	13.00	6.16	6.84	12.99	6.35	6.64
4	13.10	6.35	6.75	13.10	6.35	6.75

Tabelle 4.7 Sohldrücke q_1 und q_2 am Rand der Platten I und II und Differenzen Δq

Fugenbreite c [m]	Platte I und II werden nebeneinander gleichzeitig gebaut (Fall 1)			Platte I wird zuerst gebaut, dann später die Platte II (Fall 2)		
	q_1 [kN/m^2]	q_2 [kN/m^2]	$\Delta q=q_1-q_2$ [kN/m^2]	q_1 [kN/m^2]	q_2 [kN/m^2]	$\Delta q=q_1-q_2$ [kN/m^2]
0.00	669	-133	802	444	368	76
0.01	664	-119	783	529	368	161
0.10	644	-53	697	495	368	127
1.00	653	160	493	616	368	248
10.0	733	367	366	733	368	365
4	733	365	368	733	368	365

Allgemein kann Folgendes zu den Bildern bemerkt werden:

Zeitablauf des Bauvorganges

- Es sind beachtliche Unterschiede in den Ergebnissen zu erwarten, wenn man mit einem Plattensystem (Fall 1) rechnet oder mit einer Nachbarplatte II (Fall 2)

- Wenn die zwei Platten nebeneinander gleichzeitig gebaut werden, lehnen beide Platten gegeneinander (Bild 4.21)

- Wenn Platte I zuerst gebaut wird und dann die Platte II, wird ein zusätzlicher Druck unter der Platte sein. Dieser verursacht eine Neigung von Platte I in Richtung Platte II (Bild 4.45)

Setzungsdifferenz an der Trennfuge

- Bei Plattensystemen (Fall 1) ist die Setzungsdifferenz an der Fuge bei Fugenweite $c = 0.0$ [cm] relativ klein. Sie wird umso größer, je weiter die Fuge ist. Bei Nachbarbauwerken (Fall 2) ist wegen der Drucküberschneidung aus dem Nachbarbauwerk II die Setzungsdifferenz umso größer, je kleiner der Abstand an der Fuge ist (Bilder 4.21, 4.25 und Tabelle 4.6). Dieses Phänomen tritt auf, weil das Verhalten von Kontaktdrücken der Platte II großen Einfluss auf die Setzungsverteilung der Platte I hat. Die Bilder 4.20 und 4.24 zeigen die Sohldruckverteilung für die Fälle 1 und 2. Der Sohldruck von Platte II für Fall 1 vermindert sich durch die Verminderung der Fugenbreite c, während er für Fall 2 unabhängig von der Fugenbreite c ist

- Setzungen am Rand der Platte I aufgrund von Einflüssen der Nachbarplatte II (Fall 2) sind größer als aufgrund von Plattensystemen (Fall 1)

- Setzungen im Fall 1 für Fugenbreite $c = 0$ [cm] und in den Fällen 3 und 4 sind ähnlich (Bilder 4.21 und 4.29)

- Wenn eine Gelenkfuge zwischen Platten verwendet wird (Fall 4), wird sich die Setzung unter den Platten fortsetzen (Bild 4.26)

Sohldrücke

- Bei Plattensystemen (Fall 1) ist die Sohldruckverteilung unter dem hoch belasteten Fundament I fast unabhängig von der Fugenweite. Beim Fundament II ist dagegen eine starke Abhängigkeit von der Fugenweite festzustellen, weil sich der starke Randsohldruck des Fundaments I auf das Fundament II auswirkt (Bild 4.23 und Tabelle 4.7)

- Sohldrücke im Fall 3 (Platten als eine Einheit) und 4 (Platten mit Gelenkfuge) sind fast ähnlich (Bild 4.28)

Momente

- Für ein Plattensystem (Fall 1) vermindert man die Maximalmomente für die Platte I um die Fugenbreite *c*, während für die Platte II das Moment an einigen Stellen von positiv zu negativ geändert ist. Das größere negative Moment für Platte II ist für die kleinere Fugenbreite *c* (Bild 4.22)

- Im Fall 2, wenn die Platte zuerst gebaut ist, vermindert man die Maximalmomente von Platte I durch die Verminderung der Fugenbreite *c*. Die Positionen von Maximalmomenten werden auch zur Gegenstellung von Platte II (Bild 4.26) verschoben

- Bild 4.30 zeigt für Platten mit Gelenkfuge (Fall 4), dass das Moment an der Fuge für die zweite Platte null ist. Bild 4.30 zeigt für Fall 3, dass ein positives Moment an der Verbindungsposition gefunden wird. Platte II für beide Fälle 3 und 4 hat ein negatives Moment neben einem positiven Moment

Querkräfte

- Die Änderung in Querkräfte ergibt für die Platte I im Fall 1 weniger als die im Fall 2 (Bilder 4.23 und 4.27), während für die Platte II im Fall 1 das Vorzeichen der Querkräfte sich von Negativ zu Positiv am Rand der Platten ändert. Die größere positive Querkraft für Platte II ist bedingt durch die kleinere Fugenbreite *c* (Bild 4.23)

- Für beide Fälle 3 und 4 wird eine positive Querkraft an der Verbindung gefunden (Bild 4.31). Maximalquerkraft tritt bei einer Gelenkverbindung auf

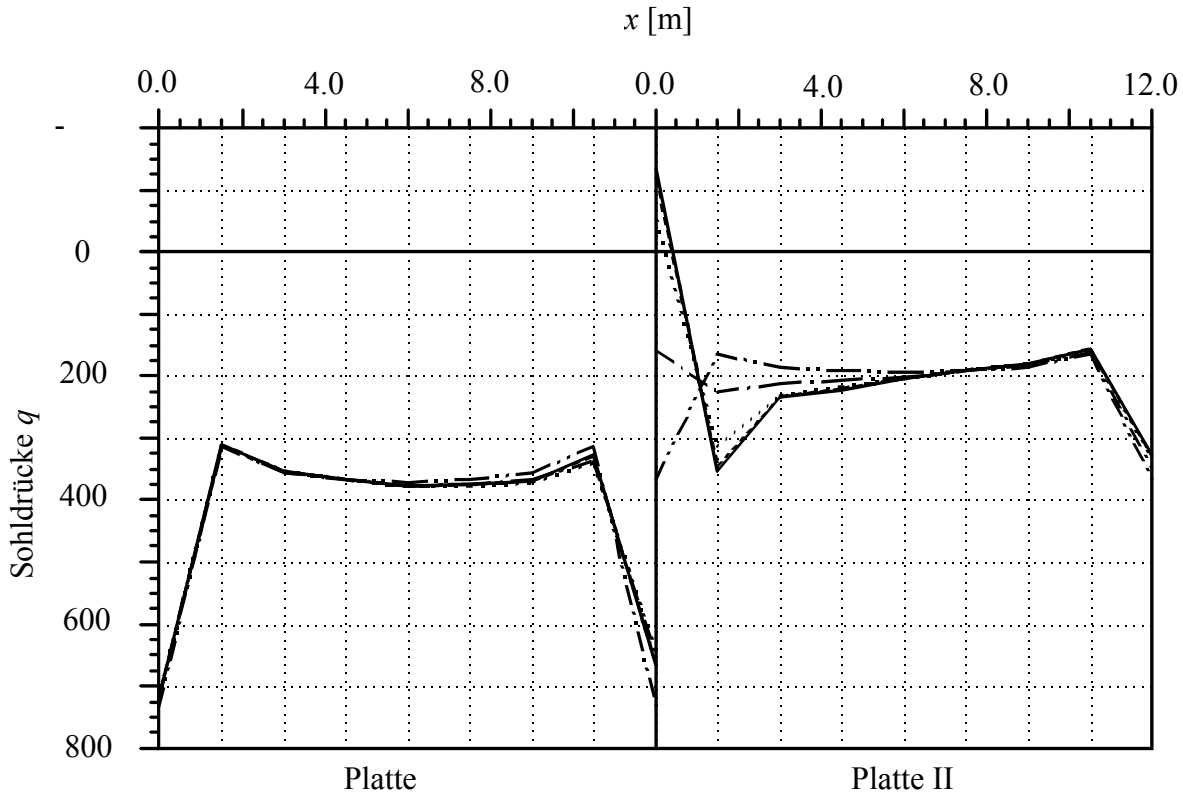


Bild 4.20 Sohldrücke q im Mittelschnitt der Platten I und II bei Berechnung als Plattensystem

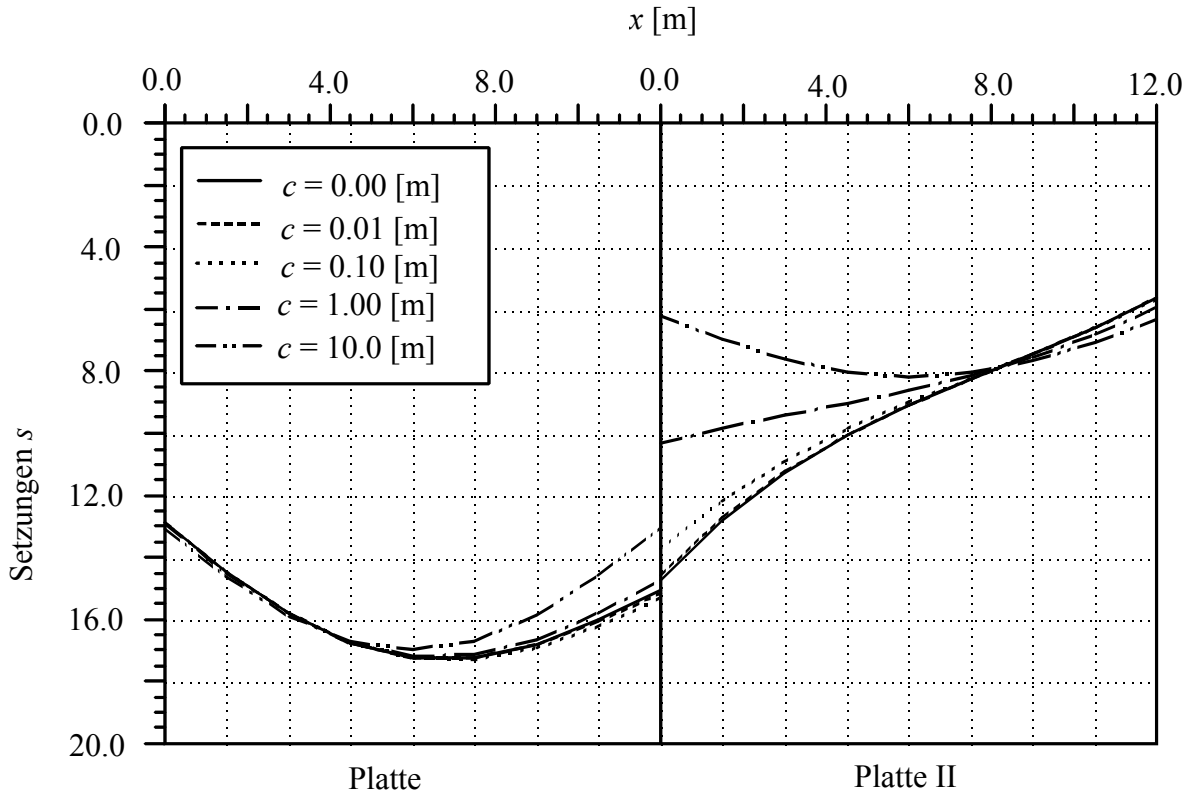


Bild 4.21 Setzungen s im Mittelschnitt der Platten I und II bei Berechnung als Plattensystem

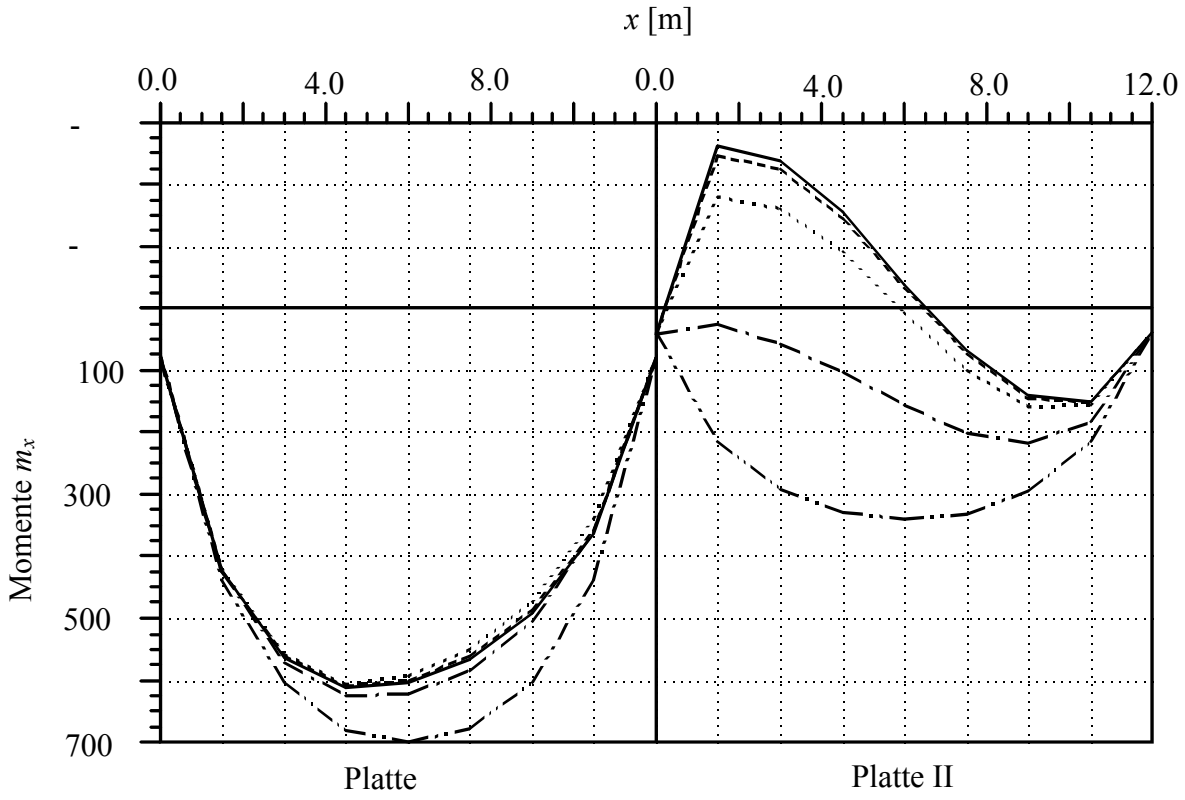


Bild 4.22 Momente m_x im Mittelschnitt der Platten I und II bei Berechnung als Plattensystem

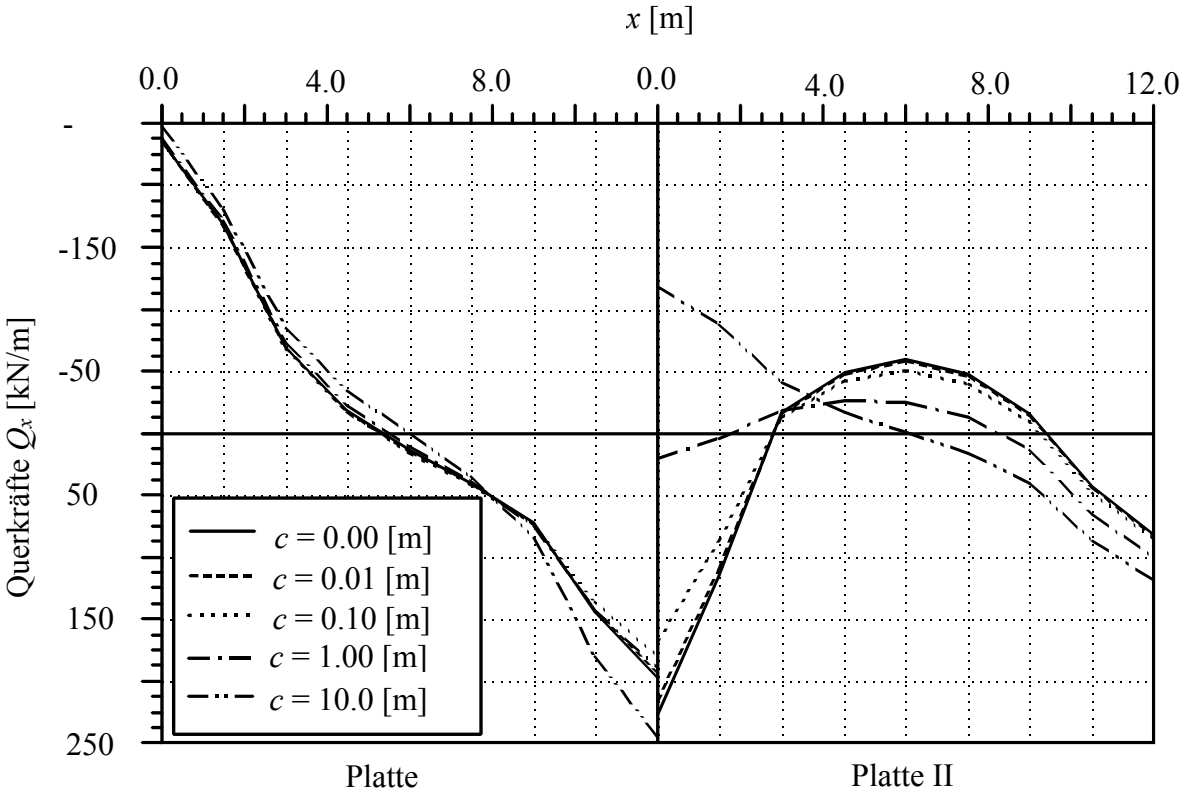


Bild 4.23 Querkräfte Q_x im Mittelschnitt der Platten I und II bei Berechnung als Plattensystem

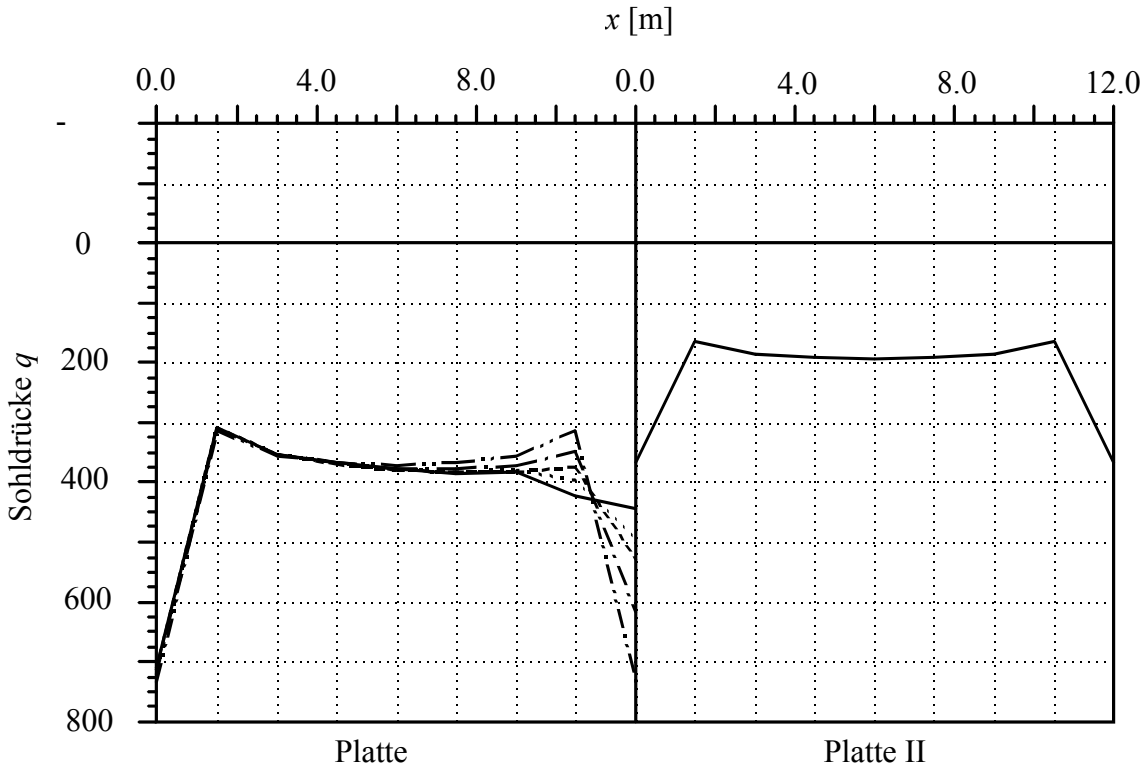


Bild 4.24 Sohldrücke q im Mittelschnitt der Platten I und II bei Einwirkung der neuen Platte II als Nachbarbauwerk auf die bestehende und fertige Platte I

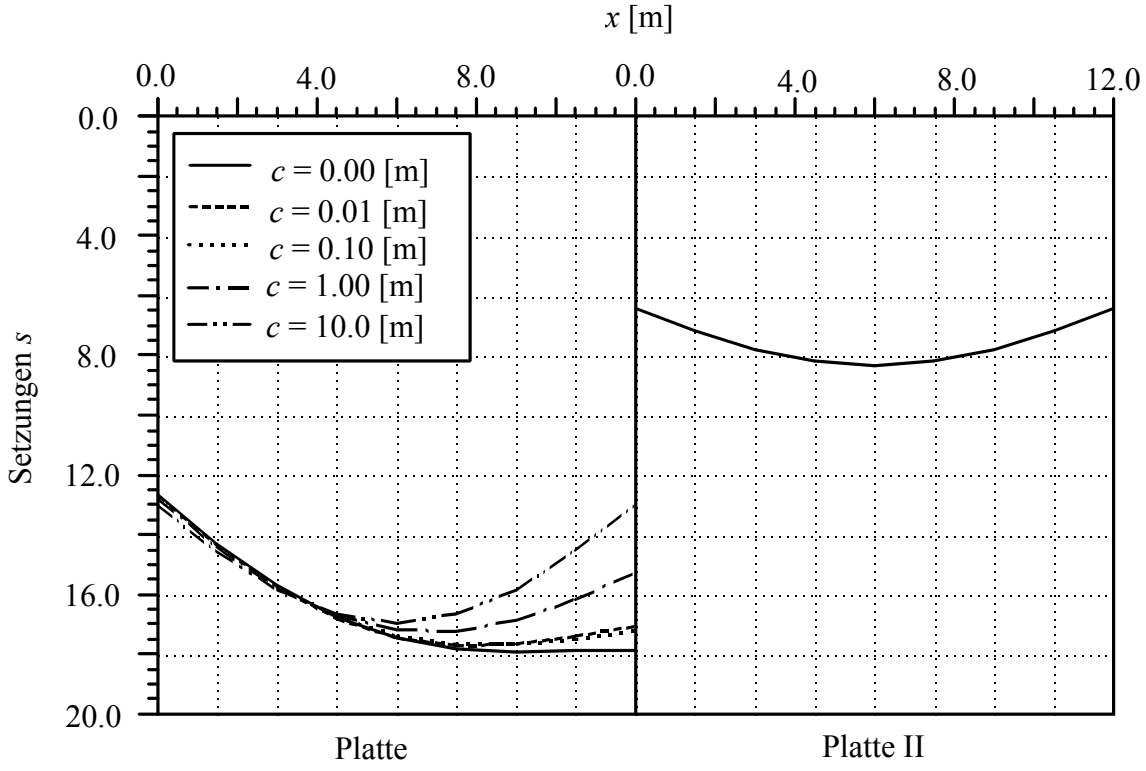


Bild 4.25 Setzungen s im Mittelschnitt der Platten I und II bei Einwirkung der neuen Platte II als Nachbarbauwerk auf die bestehende und fertige Platte I

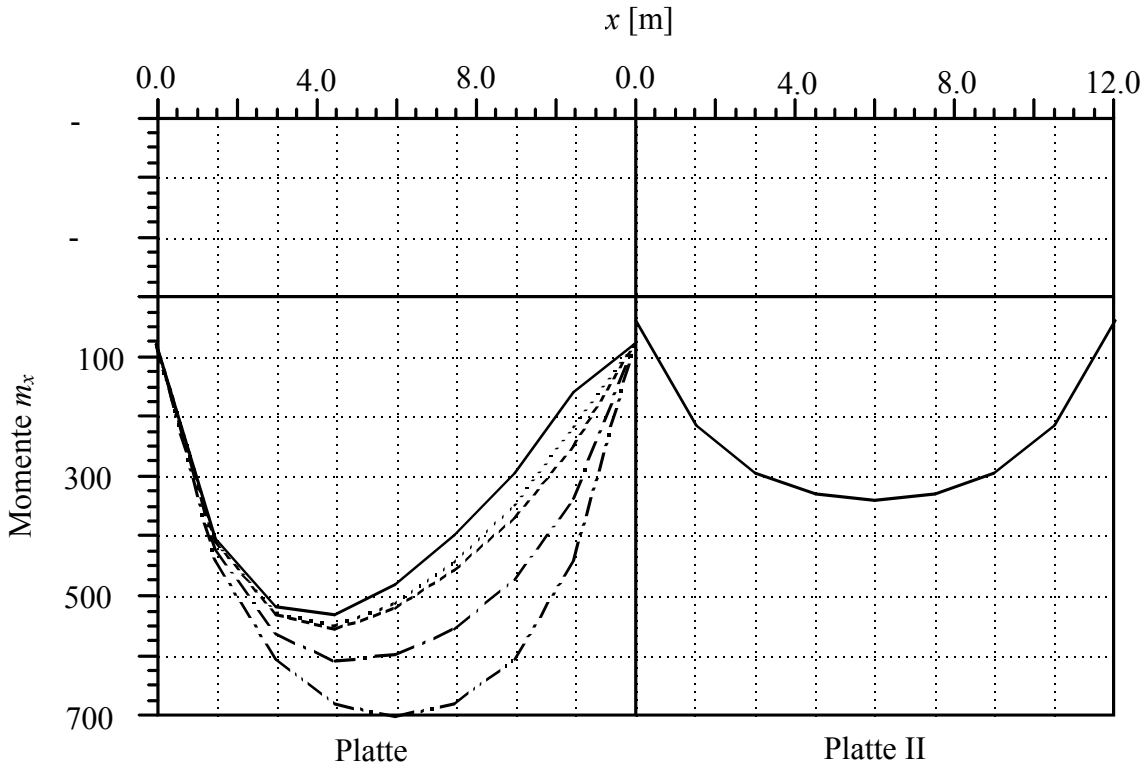


Bild 4.26 Momente m_x im Mittelschnitt der Platten I und II bei Einwirkung der neuen Platte II als Nachbarbauwerk auf die bestehende und fertige Platte I

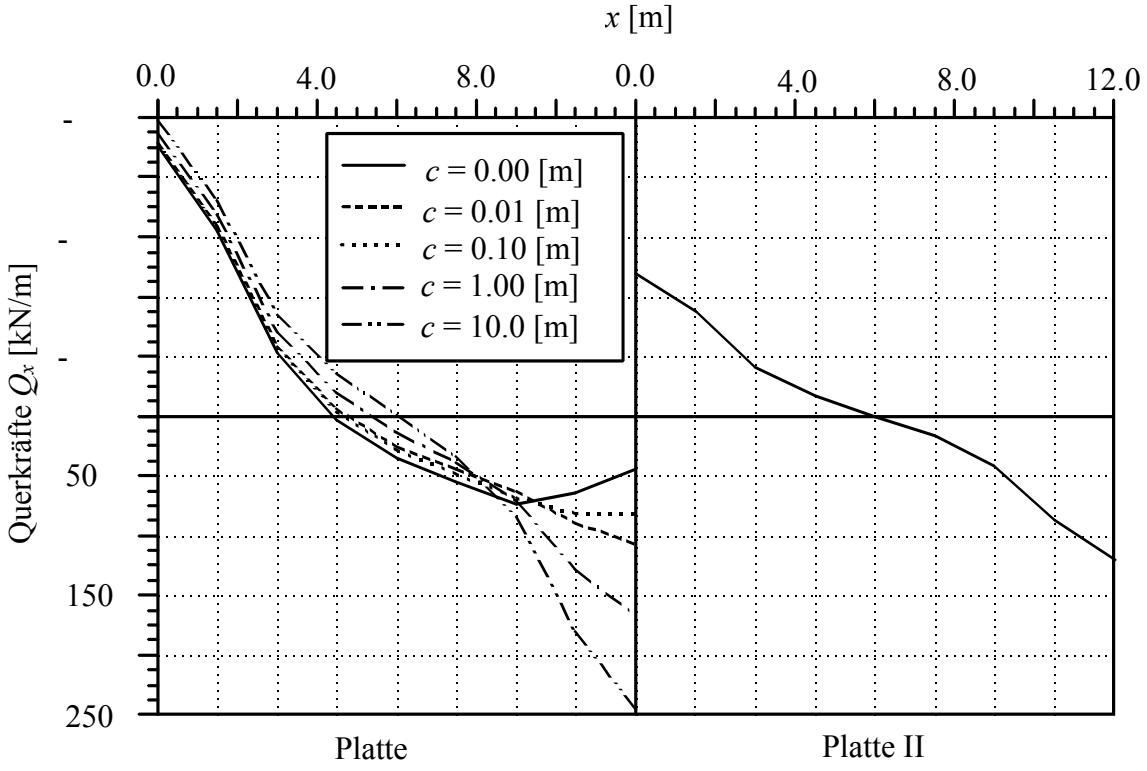


Bild 4.27 Querkräfte Q_x im Mittelschnitt der Platten I und II bei Einwirkung der neuen Platte II als Nachbarbauwerk auf die bestehende und fertige Platte I

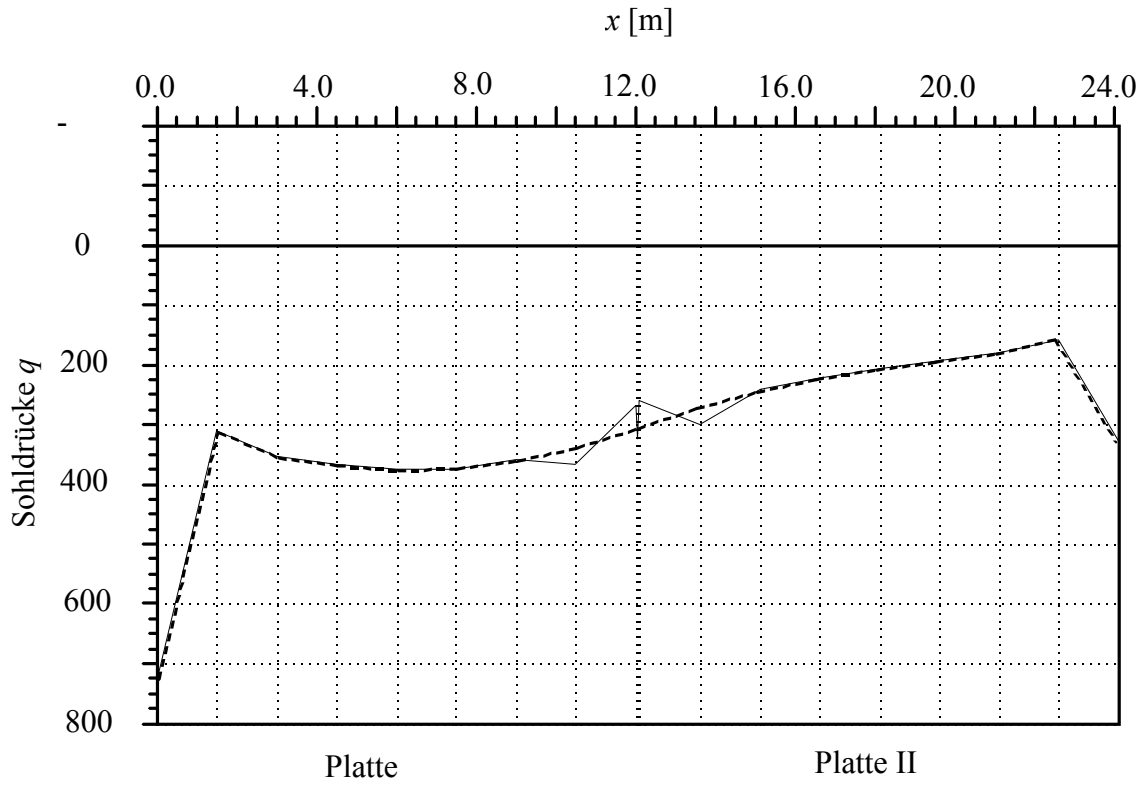


Bild 4.28 Sohldrücke q im Mittelschnitt der Platte

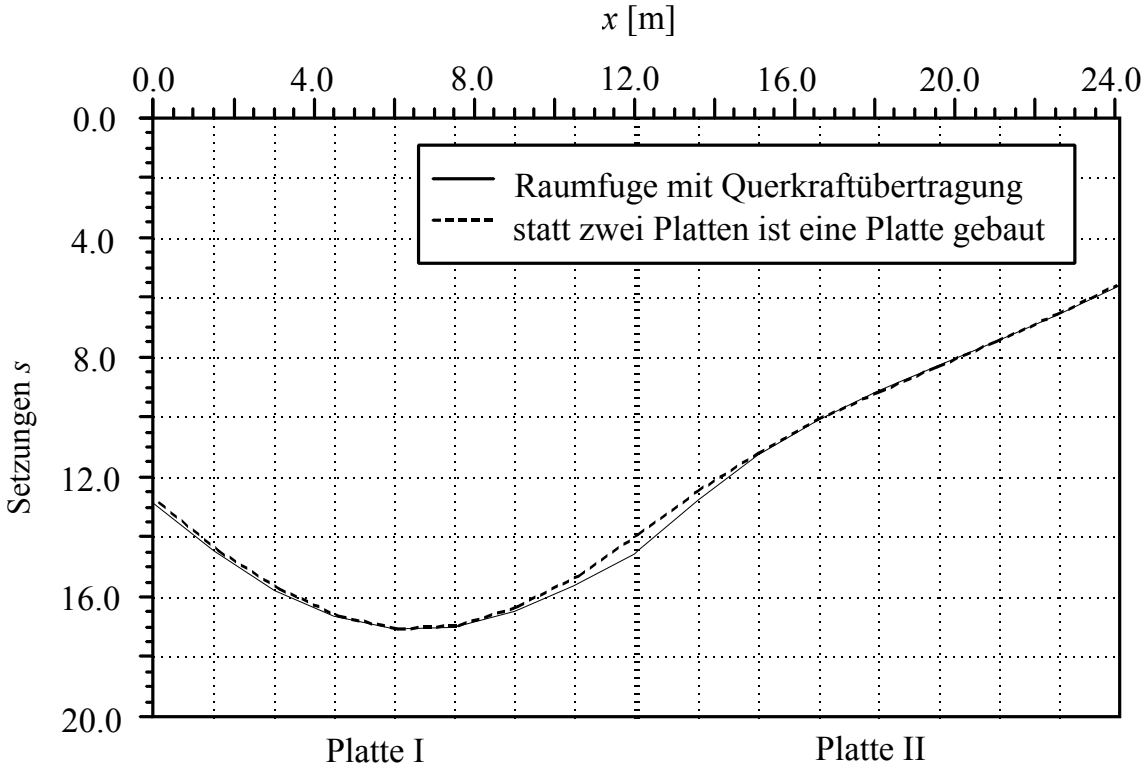


Bild 4.29 Setzungen s im Mittelschnitt der Platte

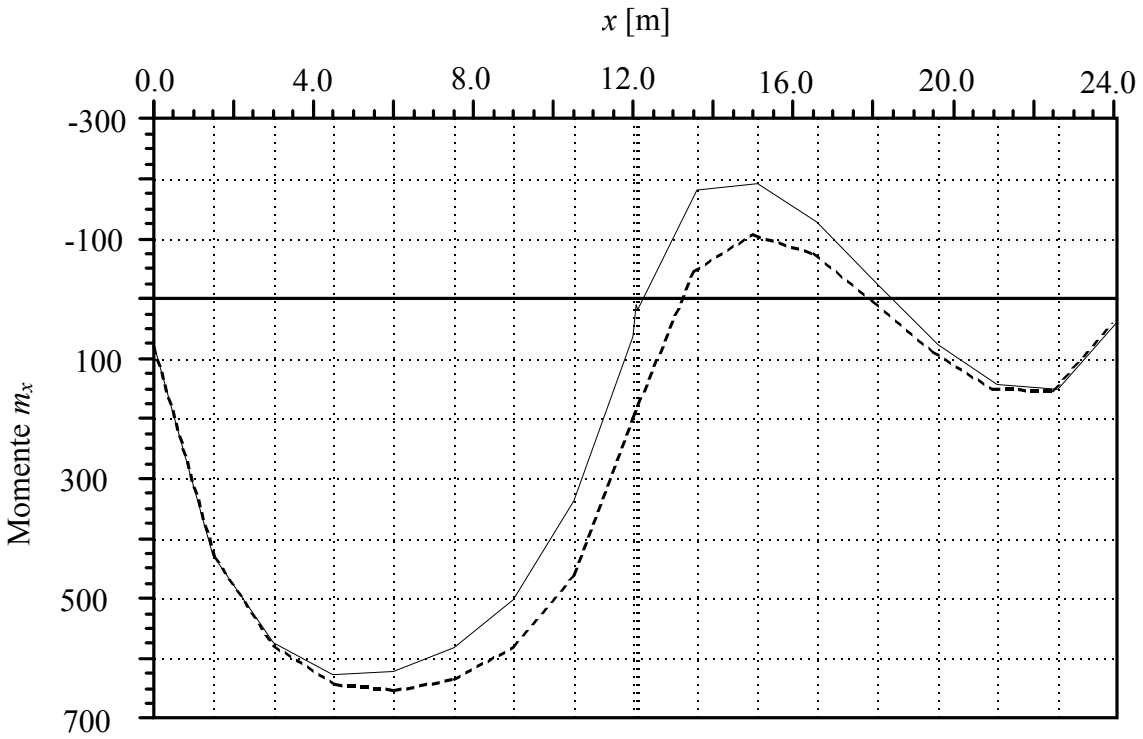


Bild 4.30 Momente m_x im Mittelschnitt der Platte

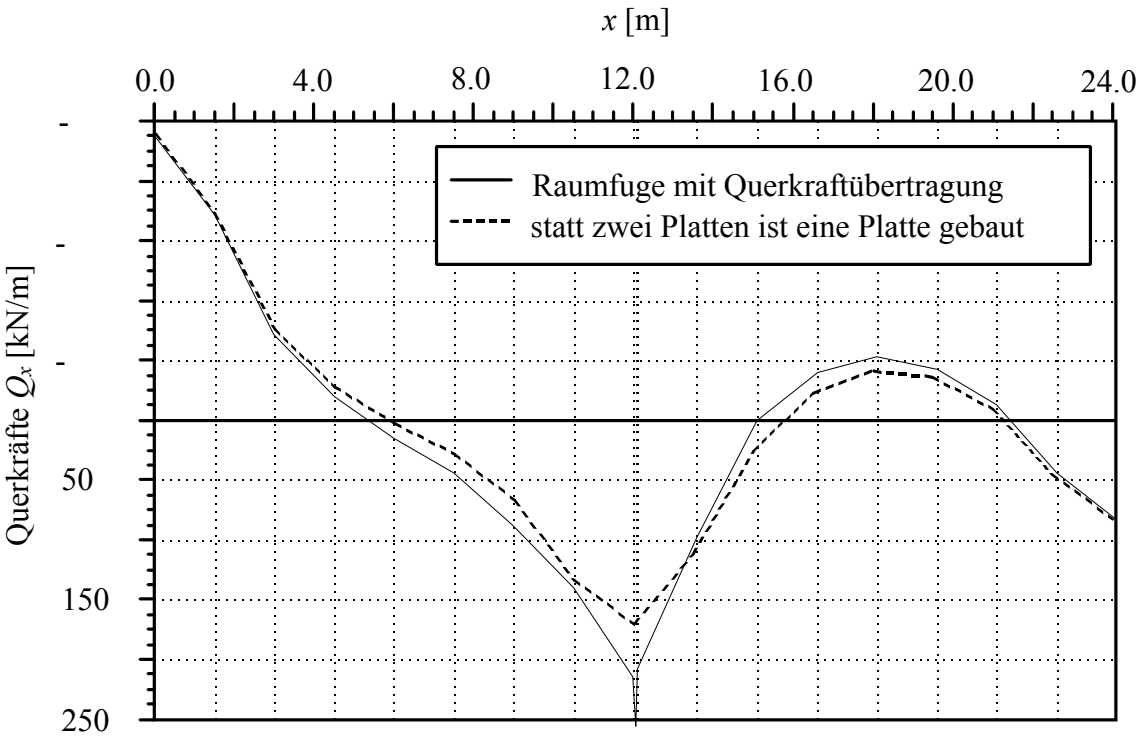


Bild 4.31 Querkräfte Q_x im Mittelschnitt der Platte

Beispiel 4.5 Erhöhung eines Schwimmbeckens

1 Situation und Fragestellung

An einem Fluss soll ein Schwimmbecken errichtet und das vorhandene Gelände um das Becken herum um bis zu einem Meter erhöht werden. Das Becken hat bei einer maximalen Wassertiefe von 1.20 [m] Abmessungen von 25 [m] × 10 [m] (Bild 4.29). Die Gründungstiefe der Platte beträgt 1.45 [m] unter GOK. Sohle und Wände bestehen aus Stahlbeton, Betongüte B 25, mit Dicken von 25 [cm] (Sohle) und 20 [cm] (Wände). Das Becken ist durch eine Fuge in der Mitte geteilt.

Die Auffüllung um das Becken besteht aus nichtbindigen Erdstoffen (Bilder 4.32 und 4.33). Ihre Mächtigkeit ist dadurch gekennzeichnet, dass das Ursprungsgelände nach Westen fällt (Bild 4.32, Schnitt *A*-*A*). Die Auffüllung wird erst nach Fertigstellung des Beckens vorgenommen.

Es ist zu untersuchen:

i) Welche Setzungen, Sohldrücke und Schnittkräfte in der Beckensohle und in den Beckenwänden bei voller Füllung des Beckens im Endzustand in Abhängigkeit von der Art der Fugenausbildung entstehen

ii) Welchen Einfluss die nachträgliche Geländeerhöhung auf den südlichen Teil des gefüllten Beckens (Setzungen, Sohldrücke, Biegemomente) unter der zuvor ermittelten Art der Fugenausbildung hat

2 Bodenkennwerte

Der Baugrund unter dem Schwimmbecken wurde durch 5 Bohrungen *B*1 bis *B*5 bis 15 [m] unter der Sohle erkundet. Er ist nicht horizontal geschichtet. Der Baugrund besteht gemäß Bild 4.33 und Tabelle 4.8 aus vier Schichten mit unterschiedlichen Bodenkennwerten: Künstliche Auffüllungen, Schluff (weich), Schluff (breiig), Talkiese. Als *Poisson*zahl des Bodens wird $\nu_s = 0.3$ [-] angesetzt. Sie ist für alle Schichten konstant.

Grundwasser

Das Grundwasserregime wird durch den Wasserspiegel des A-Flusses im Bereich des Schwimmbades bestimmt. In den nichtbindigen Talfüllungen kommt es bei höheren Flusswasserständen zu gespanntem Grundwasser. Auf das Schwimmbecken hat dies keinen Einfluss. Zur Ermittlung der Grenztiefe und für vergleichende Setzungsberechnungen wird eine horizontale Grundwasseroberfläche von 587.60 [m] NN angesetzt.

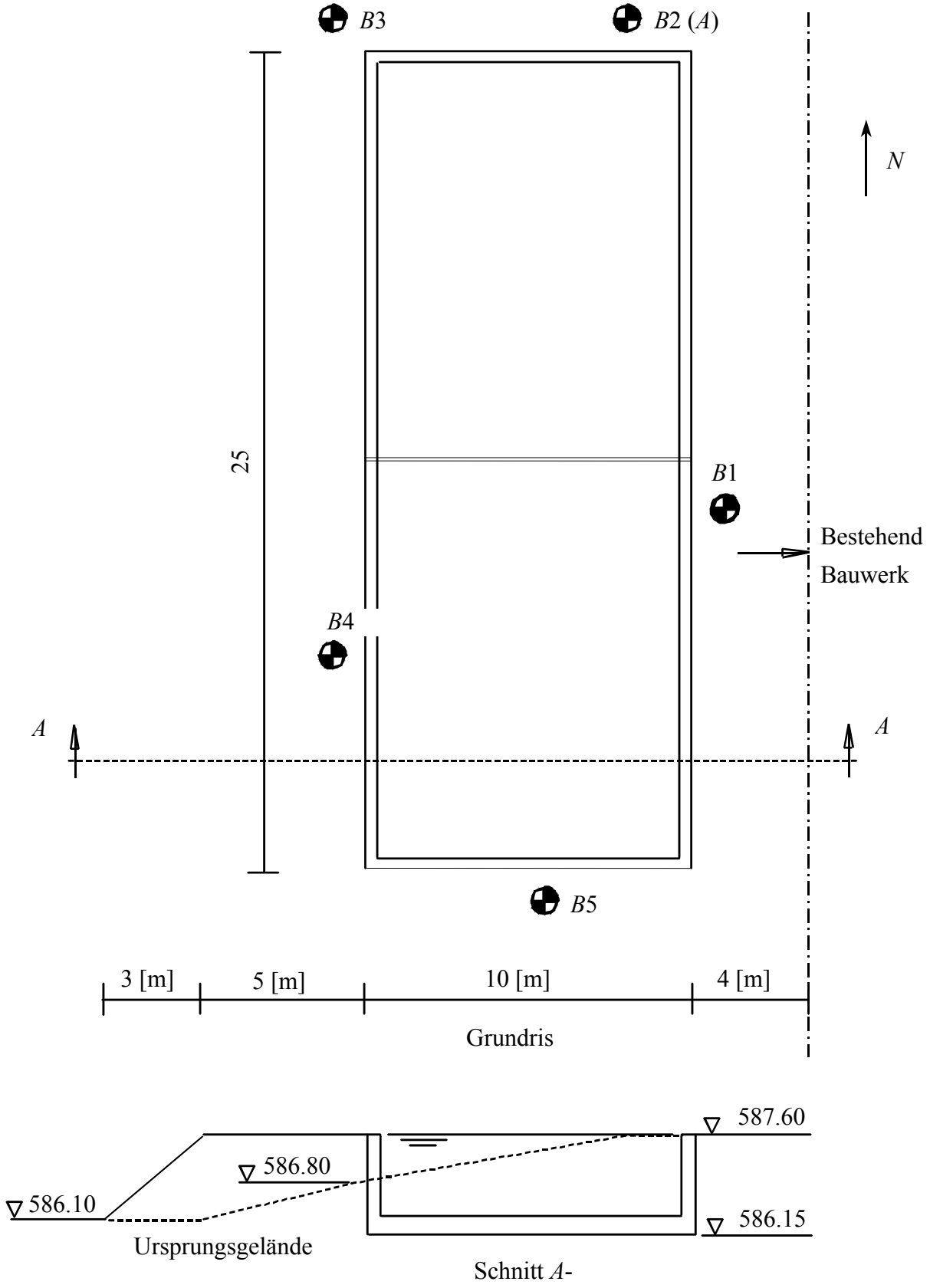


Bild 4.32 Prinzipskizze Schwimmbecken

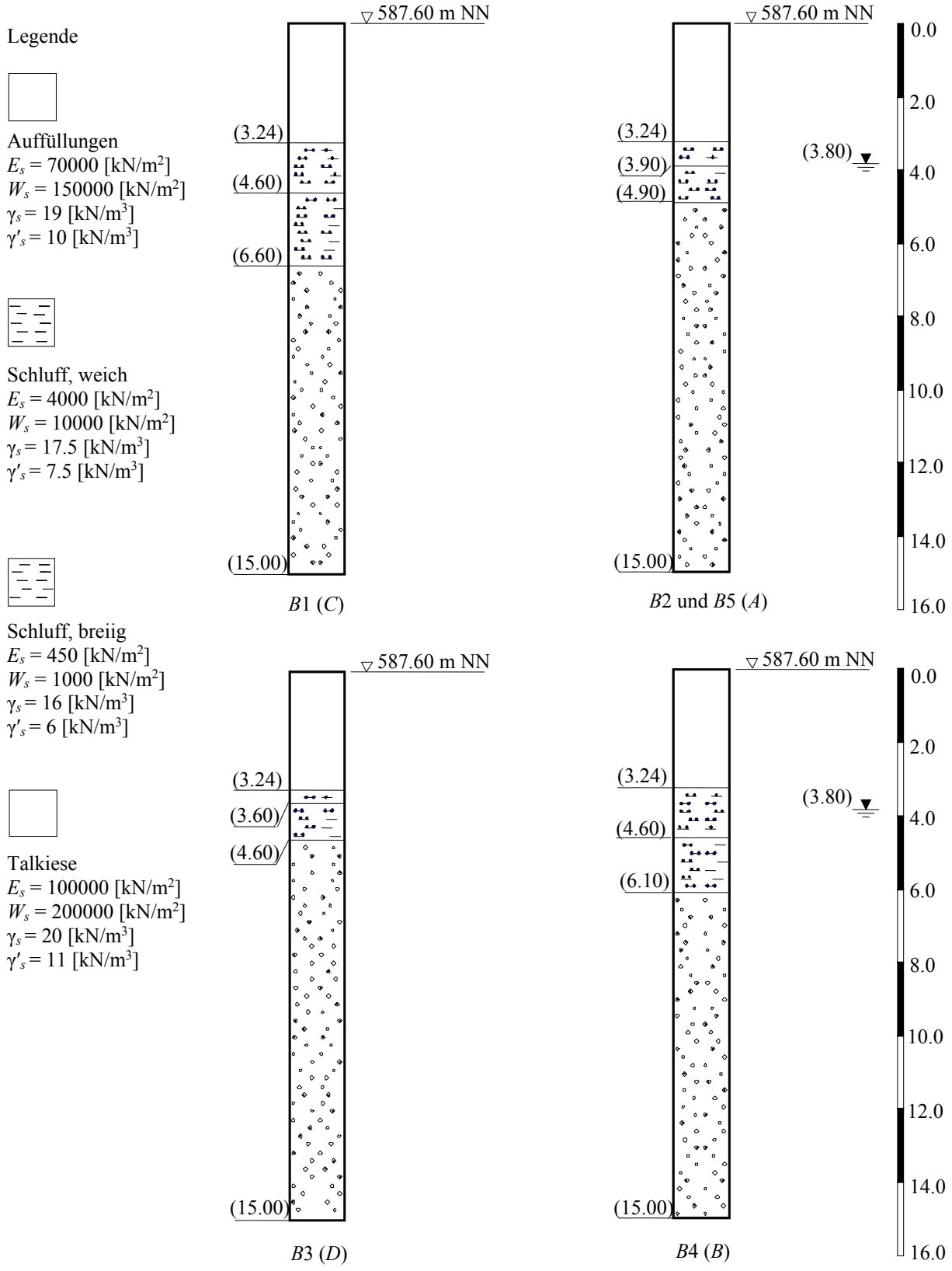


Bild 4.33 Bohrprofilschnitte *B*1 bis *B*5 mit Bodenkennwerten

Tabelle 4.8 Bodenkennwerte

Schicht	Bodenart	Steifemodul [kN/m²]		Wichte [kN/m³]	
		Erst-belastung E_s	Wieder-belastung W_s	feucht γ_s	unter Auftrieb $\gamma`_s$
1	Künstliche Auffüllungen	70000	150000	19	10
2	Schluff, weich	4000	10000	17.5	7.5
3	Schluff, breiig	450	1000	16	6
4	Talkiese	100000	200000	20	11

3 Materialkennwerte des Betons

Für den Beton (Güte *B* 25) des Schwimmbeckens gilt:

Elastizitätsmodul	E_b	$= 3 \times 10^7$	[kN/m²]
Schubmodul	G_b	$= 1.3 \times 10^7$	[kN/m²]
Wichte	γ_b	$= 25$	[kN/m³]
*Poisson*zahl	ν_b	$= 0.25$	[-]

4 Steifigkeit der Beckenwände

Die Steifigkeiten der Beckenwände (Dicke $B = 0.2$ [m], Höhe $H = 1.2$ [m]) werden durch Stabelemente in Ansatz gebracht. Die Festwerte dieser Stabelemente sind:

Trägheitsmoment I

$$= B \times \frac{H^3}{12}$$

$$= 0.2 \times \frac{1.2^3}{12} = 0.0288 \quad [\text{m}^4]$$

Torsionsmoment J

$$= H \times B^3 \times (\frac{1}{3} - 0.21) \frac{B}{H} \left\{ 1 - \frac{B^4}{12 \times H^4} \right\}$$

$$= 1.2 \times 0.2^3 \times (\frac{1}{3} - 0.21) \frac{0.2}{1.2} \left\{ 1 - \frac{0.2^4}{12 \times 1.2^4} \right\}$$

$$= 0.0286 \quad [\text{m}^4]$$

5 Ermittlung der Schnittgrößen

5.1 Untersuchung des Einflusses der Fugenausbildung

Zur Berücksichtigung des Einflusses der Fugenausbildung werden die nachfolgenden 4 Fälle beschrieben.

Fall 1: Berechnung ohne Interaktion (Bild 4.34). Die zwei nebeneinander liegenden Platten werden je für sich, d.h. ohne gegenseitige Beeinflussung, gerechnet (keine Interaktion)

Fall 2: Berechnung mit Interaktion (gegenseitige Beeinflussung), aber ohne Querkraftübertragung (Bild 4.34): die Wechselwirkung erfolgt nur über den Baugrund.
Das System wird mit zwei nebeneinander liegenden, durch eine Fuge getrennte Platten mit Abstand $c = 0.0$ [cm] gerechnet

Fall 3: Berechnung mit Interaktion und mit Querkraftübertragung (Bild 4.36).
Das System wird mit zwei nebeneinander liegenden, durch eine Gelenkfuge miteinander verbundenen Platten gerechnet.
Dieser Fall entspricht einem Betongelenk (1 [cm] breit, 2 [cm] dick)

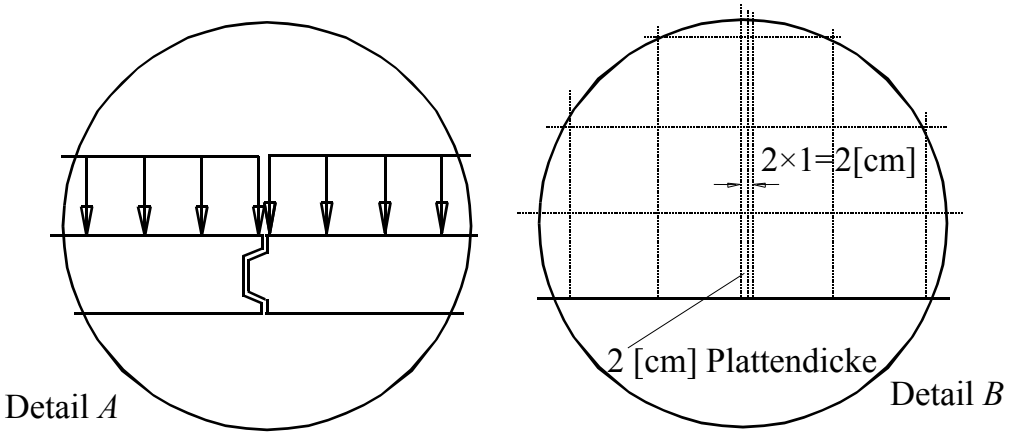
Fall 4: Berechnung ohne Fuge (Bild 4.35). Statt Platte I und II wird nur eine Platte gebaut

5.2 Untersuchung des Einflusses der seitlichen Auflast

Um den Einfluss der seitlichen Auflast auf dem Schwimmbecken zu untersuchen, wird das Gewicht der Auffüllung von vier Lastflächen entsprechend seiner Gewichtsintensität beschrieben, wie im Bild 4.38 und Tabelle 4.9 gezeigt wird. Die Lastflächen sind in vier getrennte Netze unterteilt. Die Berechnung dieser Flächenlasten wird zuerst durchgeführt, um die Sohldrücke unter ihnen zu erhalten. Bei den berechneten Sohldrücken werden Setzungen unter dem Schwimmbecken vorkommen. Um eine schlaffe Platte zu simulieren, werden die Dicken der Nachbarfundamente (Lastflächen) sehr klein ($d = 5$ [cm]) gewählt.

Tabelle 4.9 Eigenschaften der Lastflächen

Last-fläche Nr.	Abmessungen [m]			Last $p = \gamma\, h$ [kN/m^2]	Gründungs-tiefe t_f [m]	Ursprungskoordinaten	
	L	B	h			x [m]	y [m]
1	3	35	0.75	19 × 0.75 = 14.25	1.5	-3	-6
2	5	35	1.15	19 × 1.15 = 21.85	1.15	-3	-3
3	8	5	0.40	19 × 0.40 = 7.6	0.4	27	2
4	8	5	0.40	19 × 0.4 = 7.6	0.4	-3	2



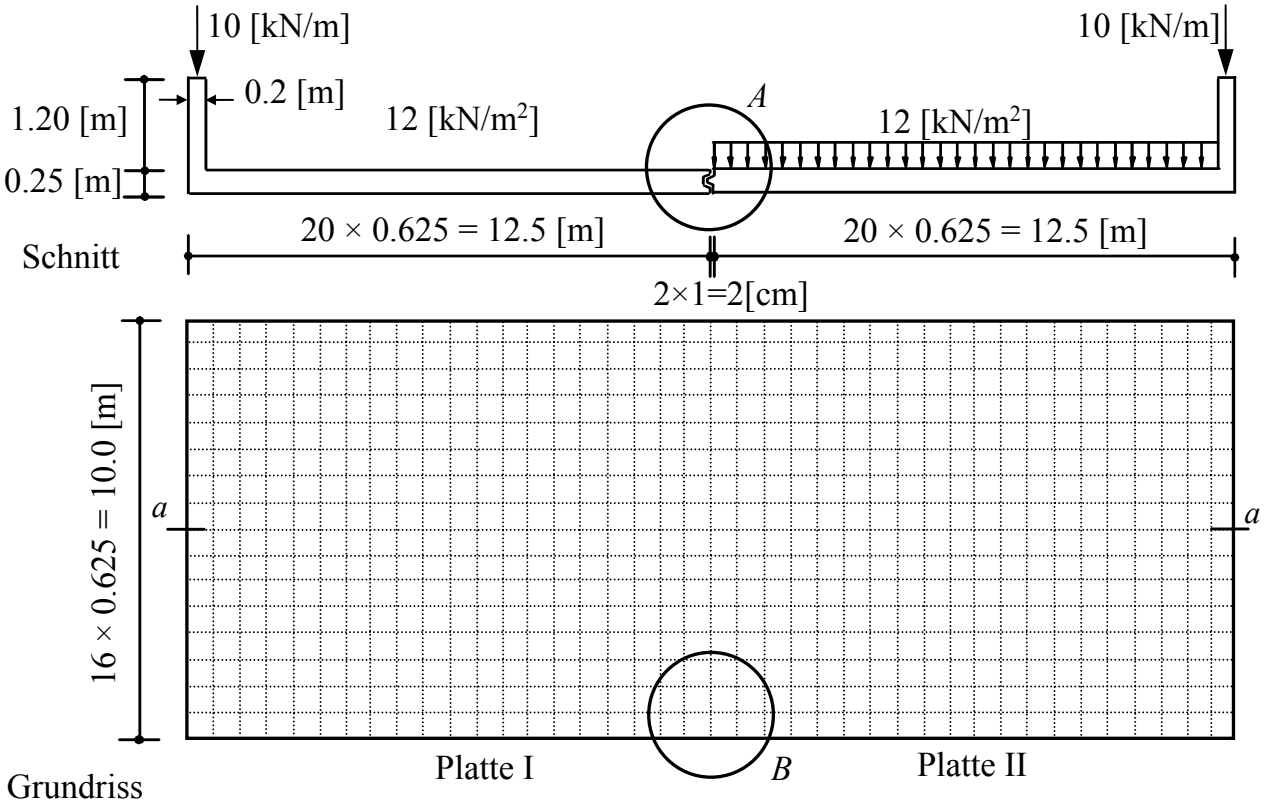


Bild 4.34 Platten I und II in den Fällen 1 und 2

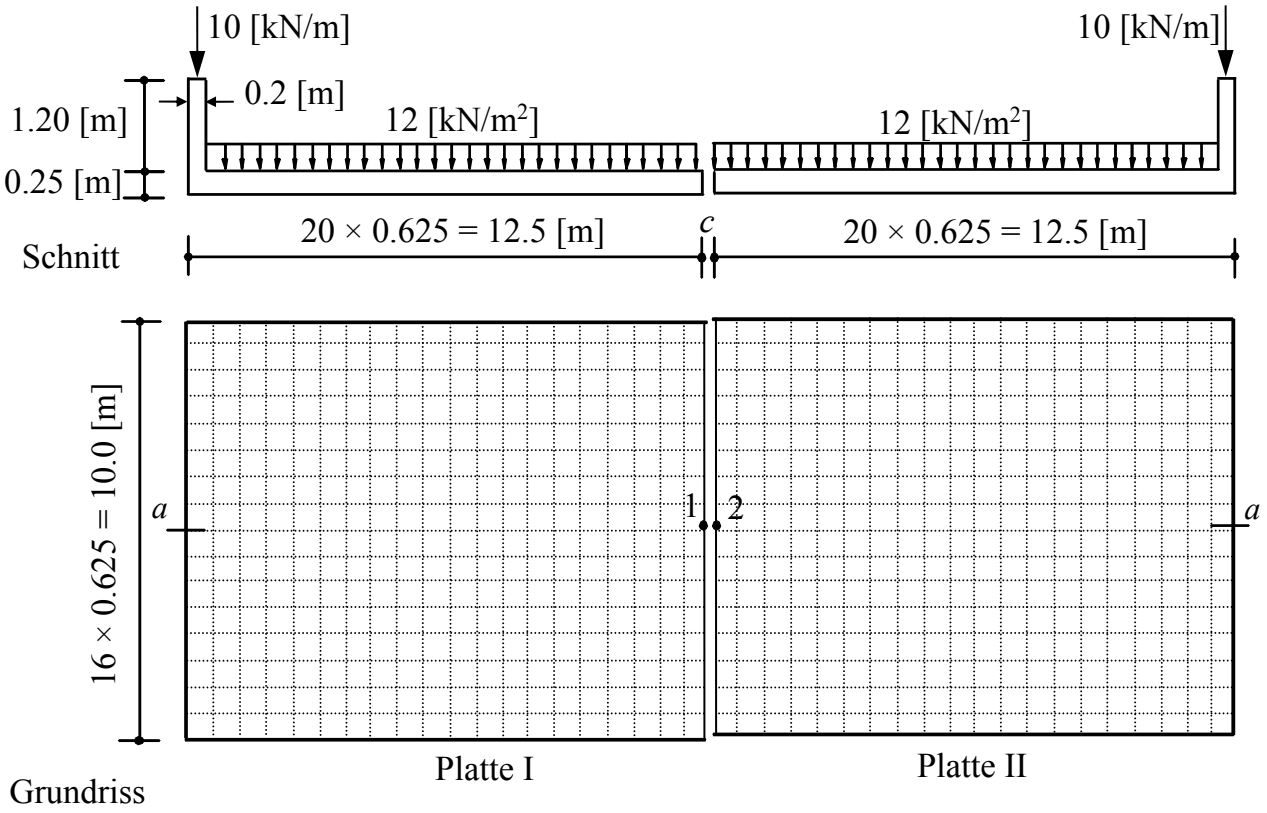


Bild 4.35 Fall 4: Nur eine Platte

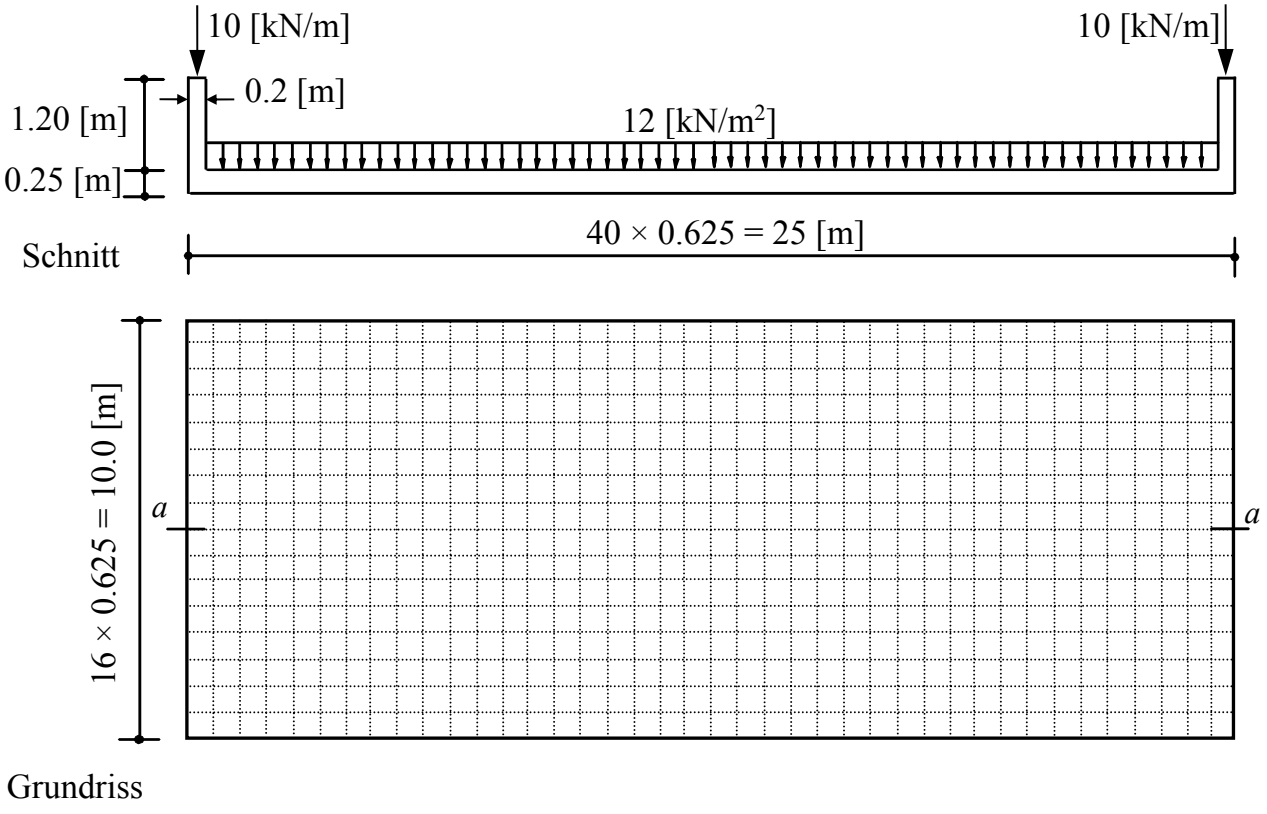


Bild 4.36 Fall 3: Platte I und II werden mit einer Gelenkfuge verbunden

6 Berechnung

6.1 Allgemeines

Die Berechnung erfolgt mit dem Programm *ELPLA*. Die zwei Platten werden dazu in je 640 quadratische Elemente mit einer Seitenlänge von 0.625 [m] unterteilt (Bilder 4.34 bis 4.36).

Die Berechnung der Platten im Fall 2 (Berechnung mit Interaktion, aber ohne Querkraftübertragung) erfolgt durch Verwenden eines Netzes für die zwei Platten. Die freien Abstände zwischen den Platten werden durch Einführen von zwei geeigneten Elementen zwischen den Platten durchgeführt. Dann werden die Grenzknoten dieser Elemente entfernt. Danach kann die Breite dieser zwei Elemente mit $a = 0.0$ [m] definiert werden.

Um eine Gelenkfuge zwischen den Platten im Fall 3 (Berechnung mit Interaktion und mit Querkraftübertragung) zu simulieren, werden zwei sehr kleine Elemente zwischen den Platten eingefügt. Jedes Element hat 1 [cm] Breite und 2 [cm] Dicke. Die sehr kleinen Breiten der Elemente halten die Entfernung zwischen den Platten beinah null, während die geringe Dicke der Elemente die Plattenstarrheit an der Fuge sehr klein hält. Momente an der Gelenkfuge werden dadurch ausgeschlossen.

Bei allen Berechnungsfällen werden die horizontalen Kräfte aus Wasserdruck und Erddruck auf die Beckenwände vernachlässigt.

6.2 Auswahl des Berechnungsverfahrens für die Untersuchung des Einflusses der Fugenausbildung

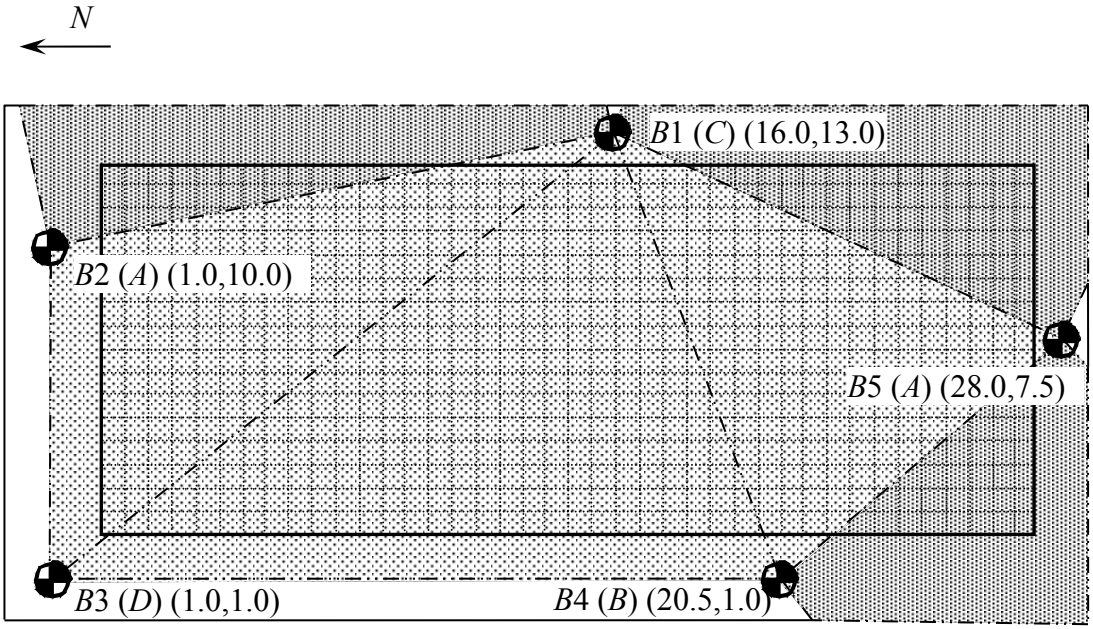
In einem ersten Rechengang wird das Steifemodulverfahren angewendet. Dabei ergeben sich aber numerische Schwierigkeiten (das gilt auch für das Steifemodulverfahren mit Iteration (Verfahren 6) als Folge der relativ geringen Belastung des Beckens und der Entstehung negativer Sohldrücke (bedingt durch die gleichmäßige Lastverteilung über die Platte und die Steifigkeit des Plattenrandes). Alle Berechnungen des Schwimmbeckens werden deshalb unter Verwendung des Programms *ELPLA* nach dem Iterativen verbesserten Bettungsmodulverfahren (Verfahren 4) durchgeführt. Der Iterationsprozess des Verfahrens wird so lange durchlaufen, bis die Differenz zwischen den Ergebnissen des Schrittes i und denen des Schrittes $i + 1$ sich nicht mehr ändert. In diesem Beispiel genügen 20 Schritte für die Berechnungen.

6.3 Auswahl des Berechnungsverfahrens für die Untersuchung des Einflusses der seitlichen Auflast

Die Lasten der Auffüllung um das Becken (21.85 [kN/m^2]) sind höher als die auf das Schwimmbecken selbst (12 [kN/m^2]). Deshalb werden große Setzungen unter dem Schwimmbecken aufgrund der Auffüllung erwartet. In diesem Fall werden negative Sohldrücke auf das Schwimmbecken erwartet. Schnittgrößen im Schwimmbecken und den Beckenwänden können aufgrund dieses extremen Falles nicht berechnet werden. Hier wird nur eine Setzungsberechnung durchgeführt. Um den Einfluss der seitlichen Auflast zu untersuchen, wird das Steifemodulverfahren (Verfahren 7) verwendet.

6.4 Berücksichtigung der Bohrpunkte bei unterschiedlichem Baugrund

Aus den zur Verfügung stehenden Informationen über den Baugrund sind für den Schwimmbeckenbereich die Baugrundprofile *B*1 bis *B*5 als repräsentativ erarbeitet worden (Bild 4.33). Um den einzelnen Elementen des Schwimmbeckens zutreffende Schichtdicken zuordnen zu können, wird die Fläche entsprechend Bild 4.37 in Dreiecke eingeteilt. Innerhalb der Dreiecksflächen erfolgt eine lineare Interpolation.



Zonentyp (I): Bilineare Interpolation in der Dreiecksfläche

Zonentyp (II): Lineare Interpolation zwischen 2 Dreiecksfläche

Bild 4.37 Lage der Bohrprofile *B*1 bis *B*5 mit Interpolationszonen

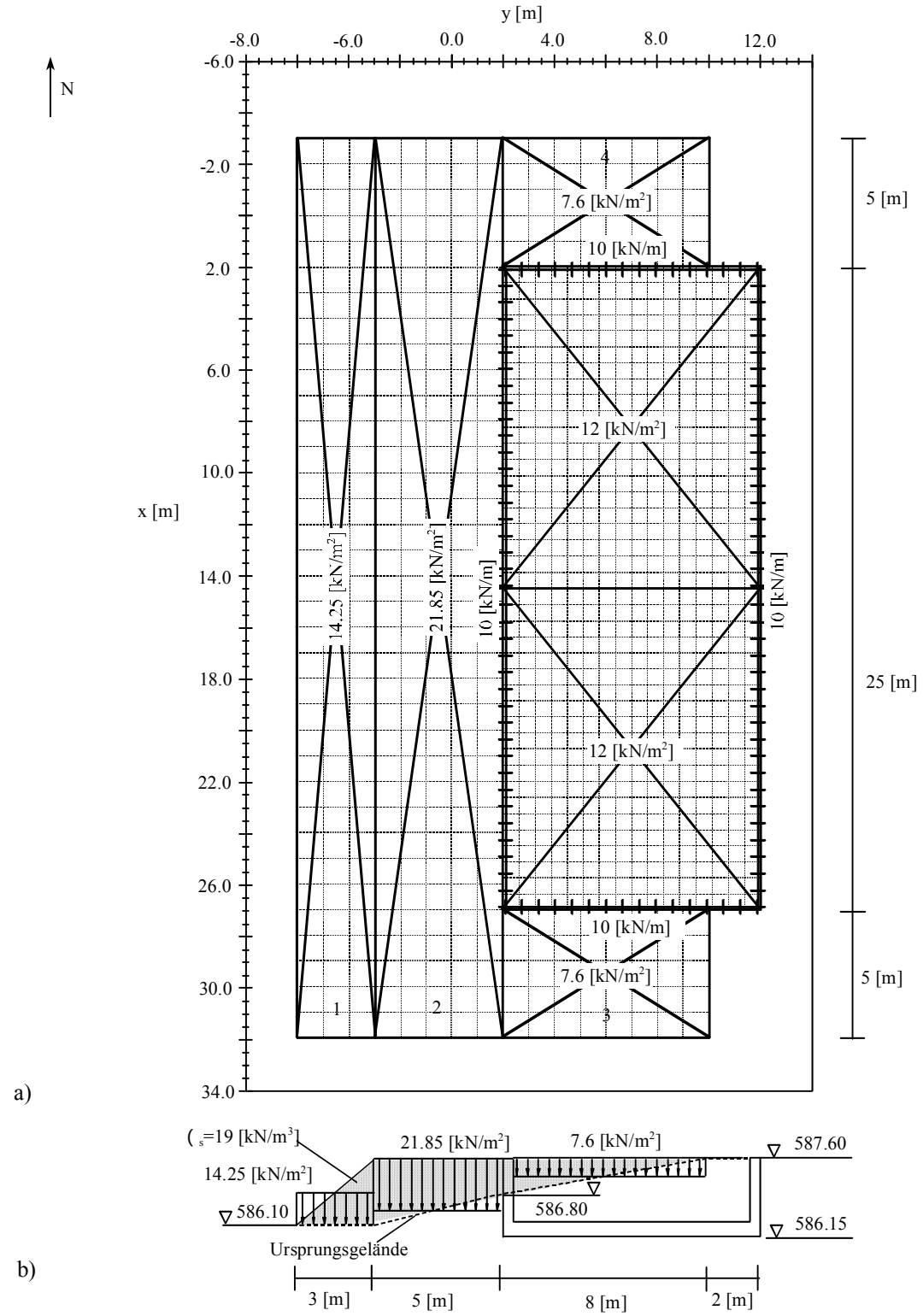


Bild 4.38 Schwimmbecken mit Lasten und Nachbarflächen 1 bis 4
a) Grundriss
b) Schnitt

7 Ergebnisse und Diskussion

7.1 Untersuchung des Einflusses der Fugenausbildung

Die Bilder 4.39 bis 4.50 zeigen die Isolinien der Setzungen, isometrische Darstellungen der Sohldrücke, Kreisdiagramme der Momente für die vier Varianten der Fugenausbildung während Bild 4.51 die Setzungen, Sohldrücke und Momente im Mittelsschnitt *a-a* für die vier Fälle zeigt. Die Bilder 4.52 bis 4.59 zeigen die Schnittgröße in den Beckenwänden.

Ergebnisse

Setzungen

- Die Setzungen an den Rändern (Punkte 1 und 2) der Platten mit Fugen (Fälle 2 und 3) sind bei Berücksichtigung der Interaktion größer als ohne Berücksichtigung (Fall 1) und größer als ohne Fuge (Fall 4, Bild 4.51*a*)

- Die Setzungen der Platten mit Fugen sind in den Fällen 2 und 3 fast gleich groß (Bilder 4.40, 4.41, 4.51*a*)

- Die Berechnung der Platten mit Interaktion zeigt, dass sich beide Platten aufeinander zu neigen (Bilder 4.50 und 4.41)

Sohldrücke

- Bei einer Fuge mit Querkraftübertragung zwischen den Platten (Fall 3) wird der Sohldruck unter den Fugen der Platten gleich groß (Bilder 4.45 und 4.51*b*)

- Im Fall 2 (Interaktion ohne Querkraftübertragung) treten geringfügige Unterschiede in den Sohldrücken an den Rändern (Punkte 1 und 2) der Platten (Fall 2) auf (Bild 4.44)

Momente

- Die Momente der Platten ohne Interaktion (Fall 1) und der ohne Fuge (Fall 4) sind deutlich größer als die der Platten mit Fugen und Interaktion (Fälle 2 und 3, Bilder 4.47, 4.50 und 4.51*c*)

- Bei den Platten mit Fuge (Fälle 2 und 3) werden die maximalen Momente stärker zur anderen Seite der Platten verlagert als im Fall 1 (Bild 4.51*c*)

Schnittgrößen in den Beckenwänden

- Die Momente erreichen maximale Werte, wenn die Platte keine Fuge hat (Fall 4, Bild 4.55).

Momente und Querkräfte für Platten ohne Interaktion (Fall 1) werden dann unwirklich (Bilder 4.52 und 4.56)

- Für die Platte ohne Fuge (Fall 4) ist ein positives Moment an der Position der Fuge gefunden worden (Bild 4.55), während für Platten mit Fugen die Momente an dieser Position aufgrund der Fugen gleich null sind (Bilder 4.53 und 4.54)

- Momente und Querkräfte für die Platten mit Fugen (Fälle 2 und 3) sind sehr ähnlich (Bilder 4.53, 4.54, 4.57 und 4.58)

Diskussion

- Die Ergebnisse für die Platten mit freier Fuge (Fall 2) und mit Gelenkfuge (Fall 3) sind in diesem Beispiel sehr ähnlich

- Die Unterschiede in den Schnittgrößen bei den Fällen 2 und 3 sind gering, sodass das Anbringen eines Querkraft übertragenden Gelenks nicht erforderlich ist, weil die zwei Platten die gleichen Lasten haben

- Das Anbringen einer Fuge reduziert die Schnittgrößen erheblich

- Die Berechnung ohne Interaktion führt zu ungünstigen Schnittkräften in den Beckensohlen

- Obwohl in den Fällen 2 und 3 größere Setzungen auftreten als im Fall 4, sind die Schnittgrößen kleiner

7.2 Einfluss der seitlichen Auflast

Bild 4.60 zeigt nur die Isolinien der Setzungen unter dem Schwimmbecken nach der Auffüllung um das Becken (Lastflächen 1 bis 4). Wie erwartet, sind die Setzungen am Rand des Schwimmbeckens nahe den umgebenden Lastflächen etwa 2.5 [cm] größer als am Schwimmbecken selbst (Bilder 4.39 bis 4.42) und zwar bei Anwendung aller vier Berechnungsfälle zur Ausbildung der Fuge. Die Bilder 4.61 bis 4.64 zeigen die Isolinien der Setzungen unter dem Schwimmbecken nach der Auffüllung um das Schwimmbecken. Diese Bilder zeigen, dass die Richtung der Setzungen durch die seitliche Auflast verändert wird. Gegen die extremen Ergebnisse der Schnittgrößen des Schwimmbeckens in diesem Fall wird empfohlen, die meiste Auffüllung erst vor Fertigstellung des Schwimmbeckens vorzunehmen.

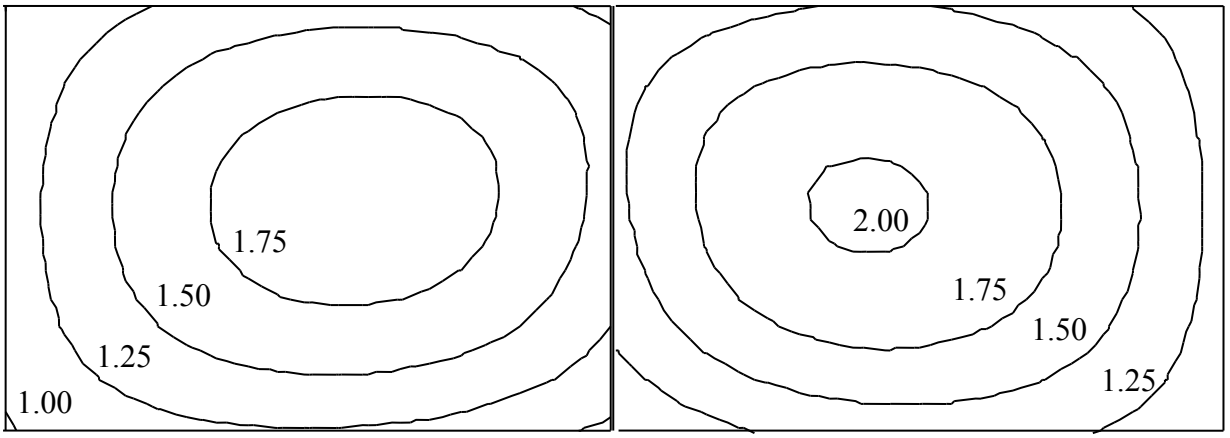


Bild 4.39 Isolinien der Setzungen *s* [cm]
Berechnung ohne Interaktion (Fall 1)

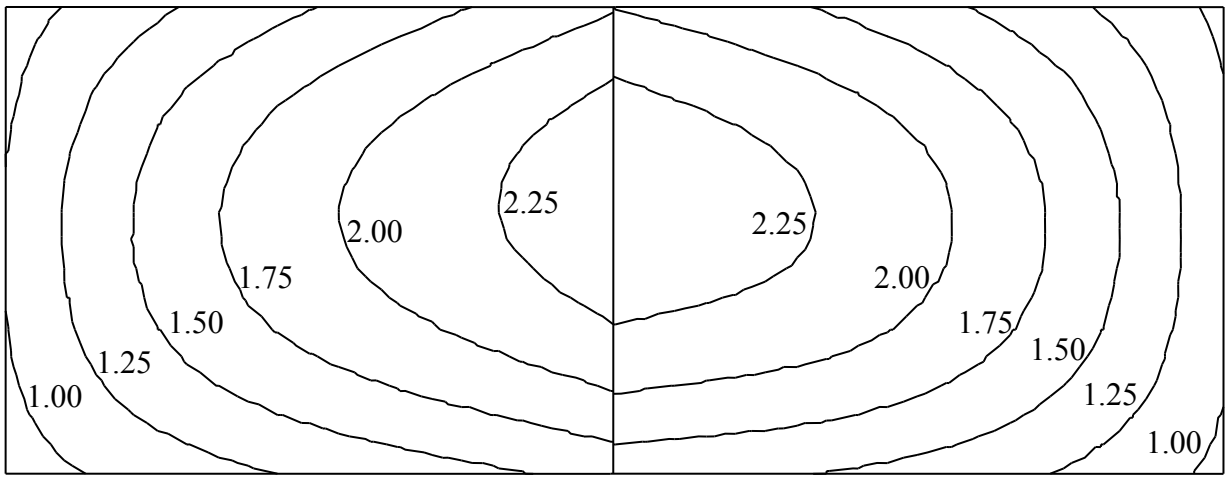


Bild 4.40 Isolinien der Setzungen *s* [cm]
Berechnung mit Interaktion und ohne Querkraftübertragung (Fall 2)

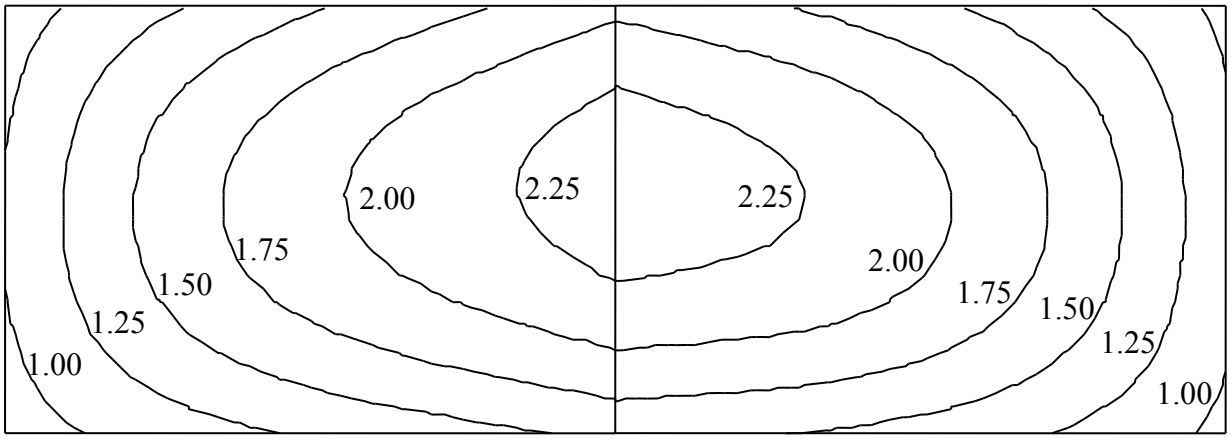


Bild 4.41 Isolinien der Setzungen *s* [cm]
Berechnung mit Interaktion und mit Querkraftübertragung (Fall 3)

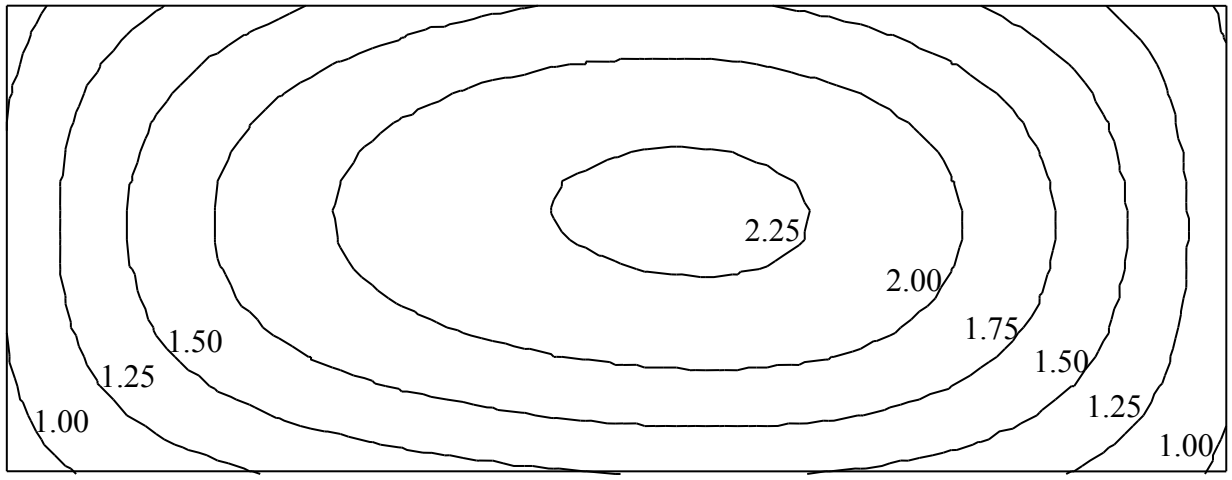


Bild 4.42 Isolinien der Setzungen *s* [cm]
Berechnung ohne Fuge (Fall 4)

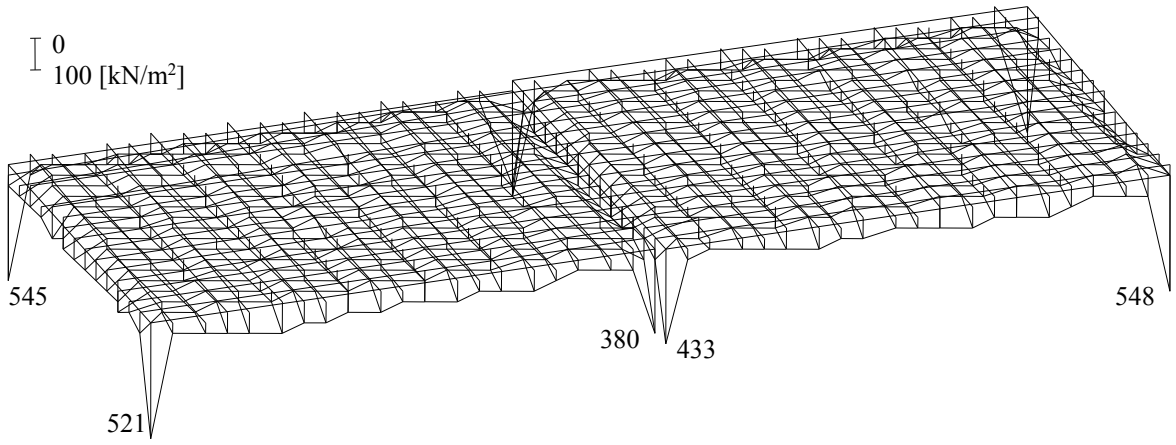


Bild 4.43 Isometrische Darstellung der Sohldrücke q [kN/m^2]
Berechnung ohne Interaktion (Fall 1)

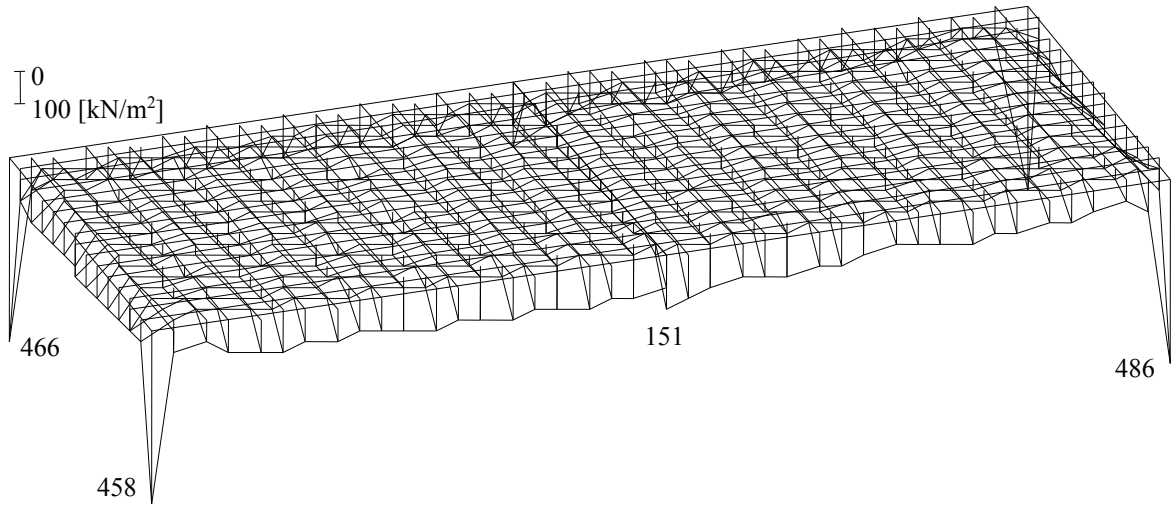


Bild 4.44 Isometrische Darstellung der Sohldrücke q [kN/m^2]
Berechnung mit Interaktion und ohne Querkraftübertragung (Fall 2)

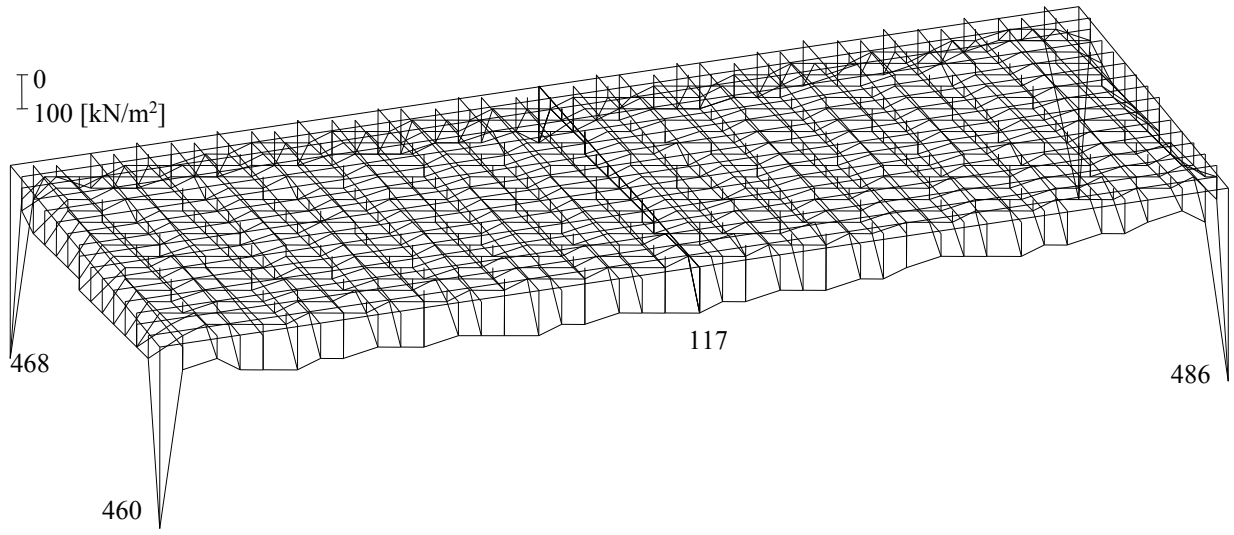


Bild 4.45 Isometrische Darstellung der Sohldrücke q [kN/m^2]
Berechnung mit Interaktion und mit Querkraftübertragung (Fall 3)

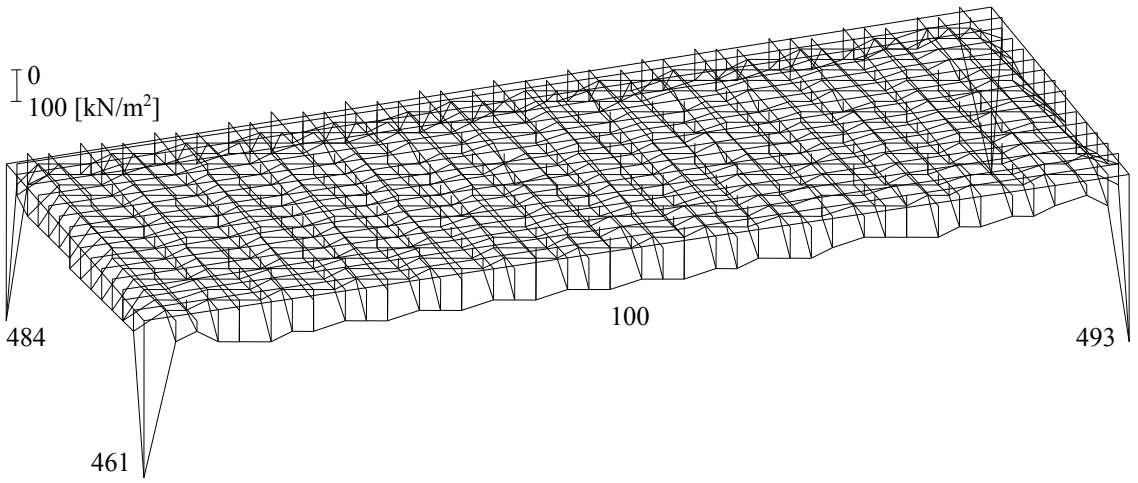


Bild 4.46 Isometrische Darstellung der Sohldrücke q [kN/m^2]
Berechnung ohne Fuge (Fall 4)

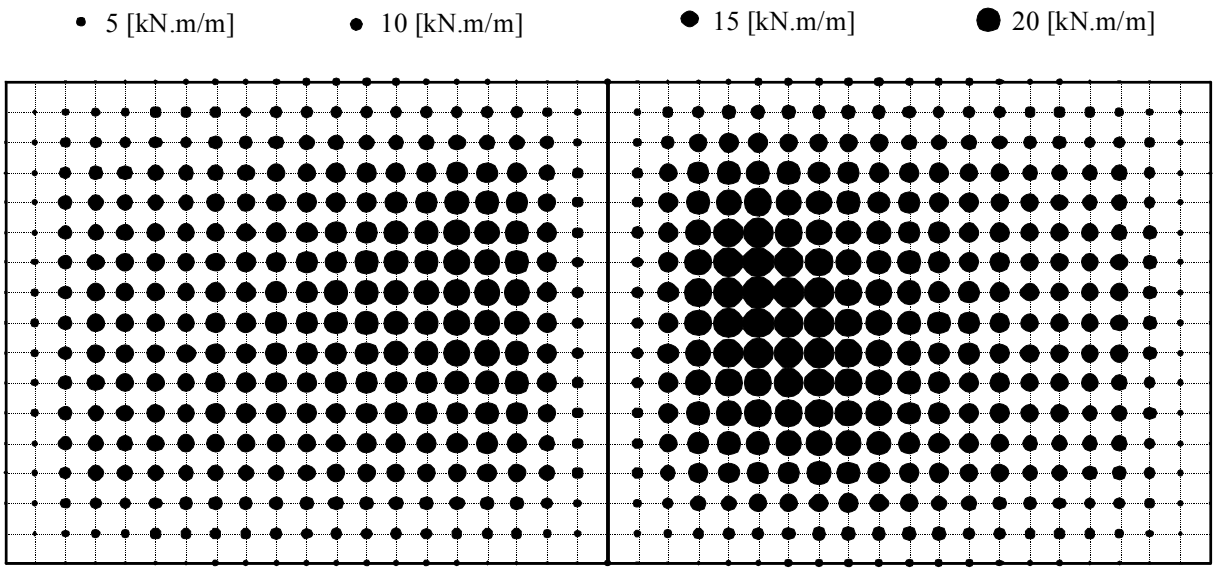


Bild 4.47 Kreisdiagramme der Momente m_x [kN.m/m]
Berechnung ohne Interaktion (Fall 1)

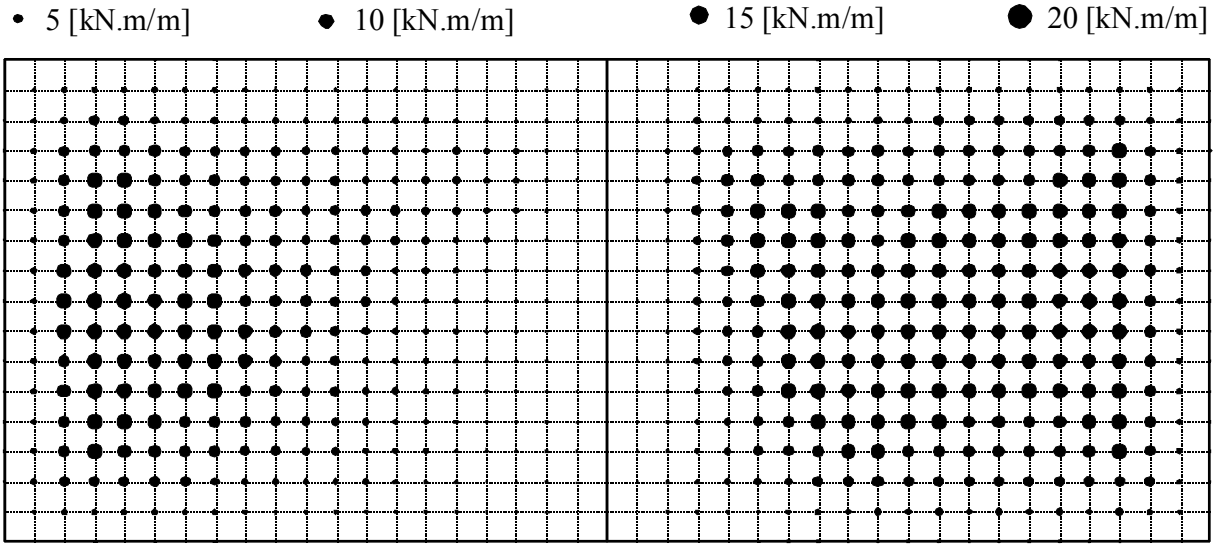


Bild 4.48 Kreisdiagramme der Momente m_x [kN.m/m]
Berechnung mit Interaktion und ohne Querkraftübertragung (Fall 2)

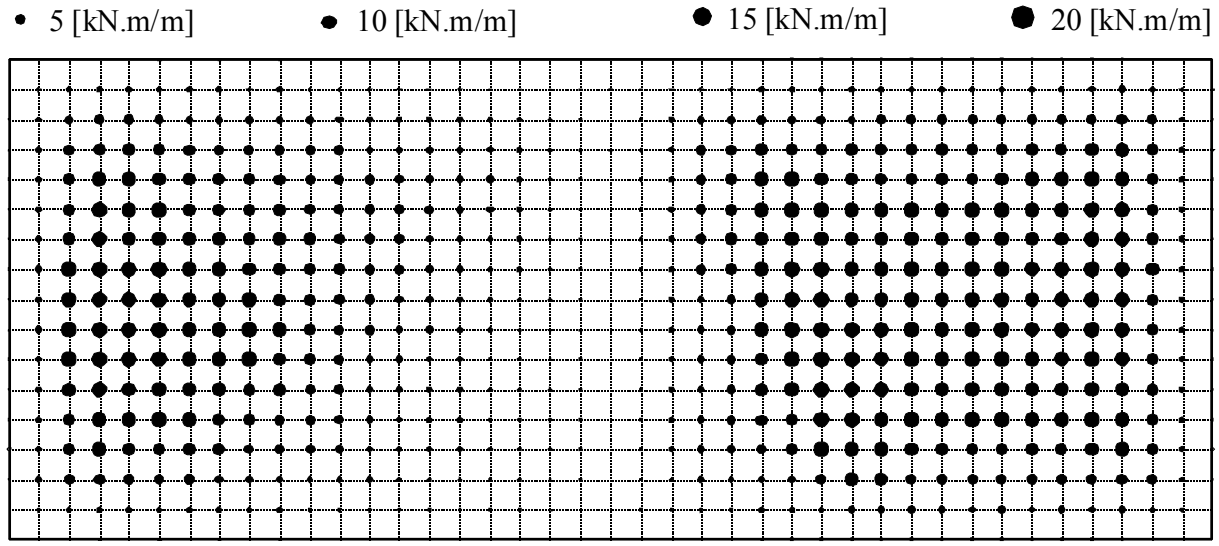


Bild 4.49 Kreisdiagramme der Momente m_x [kN.m/m]
Berechnung mit Interaktion und mit Querkraftübertragung (Fall 3)

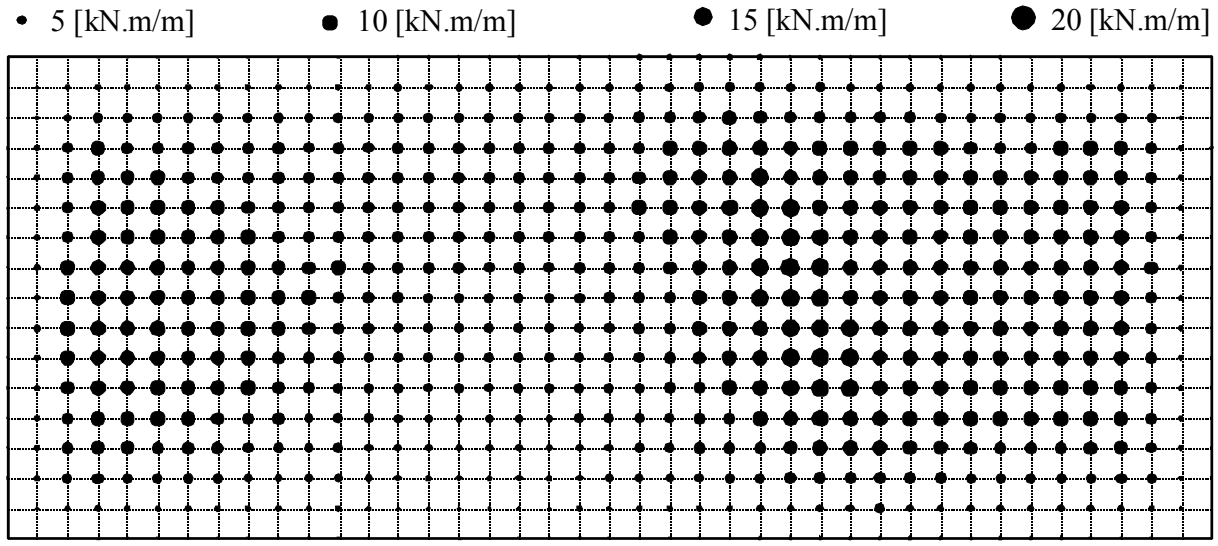


Bild 4.50 Kreisdiagramme der Momente m_x [kN.m/m]
Berechnung ohne Fuge (Fall 4)

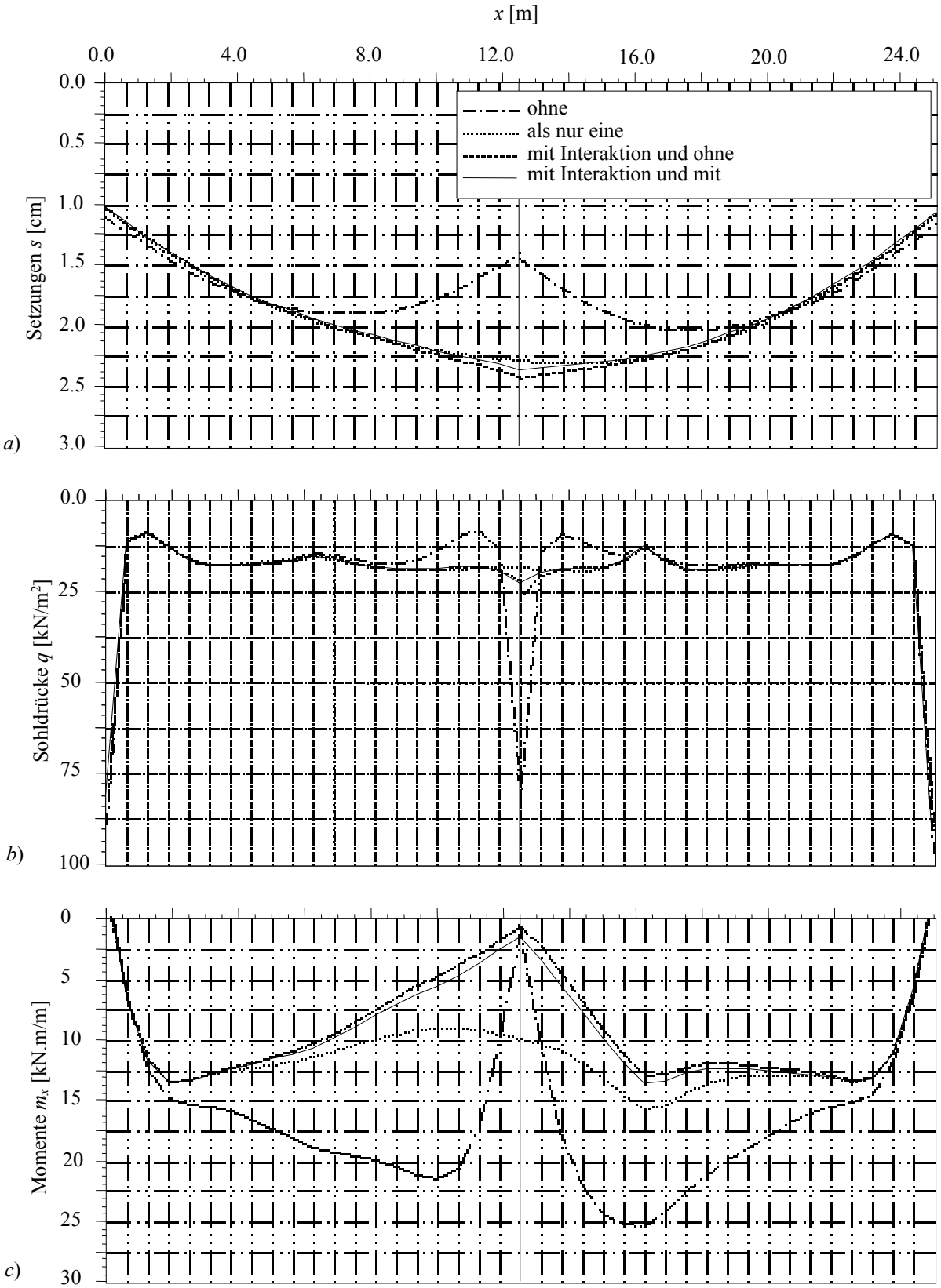


Bild 4.51 Setzungen, Sohldrücke und Momente im Längsschnitt der Platten I und II

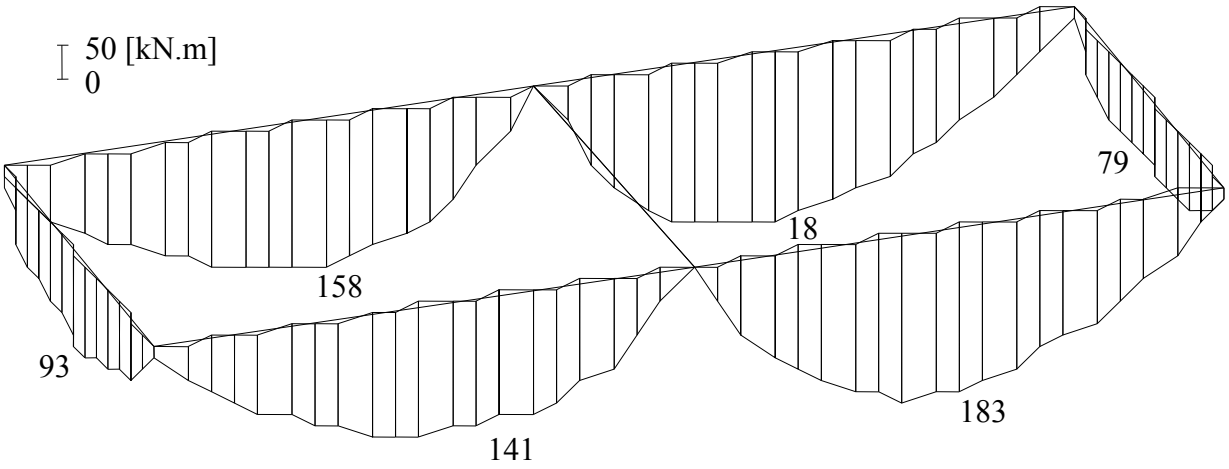


Bild 4.52 Stab-Biegemomente M_b [kN.m] im Anschluss Bodenplatte - Wand
Berechnung ohne Interaktion (Fall 1)

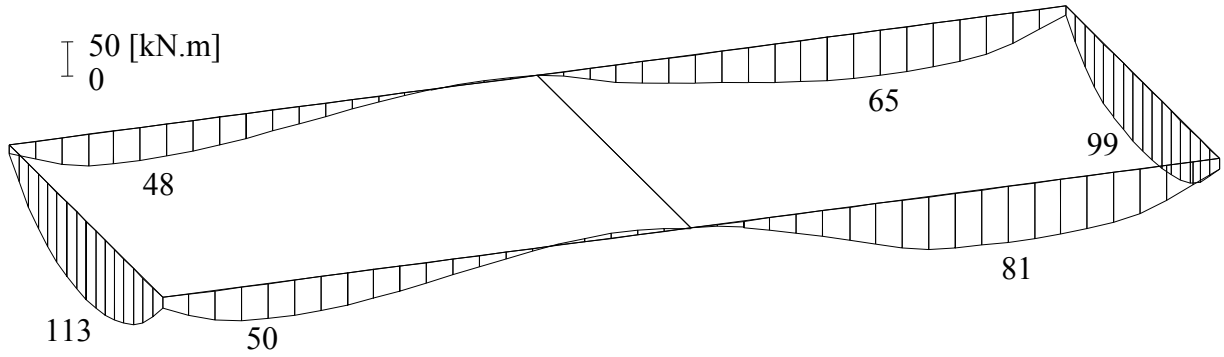


Bild 4.53 Stab-Biegemomente M_b [kN.m] im Anschluss Bodenplatte - Wand
Berechnung mit Interaktion und ohne Querkraftübertragung (Fall 2)

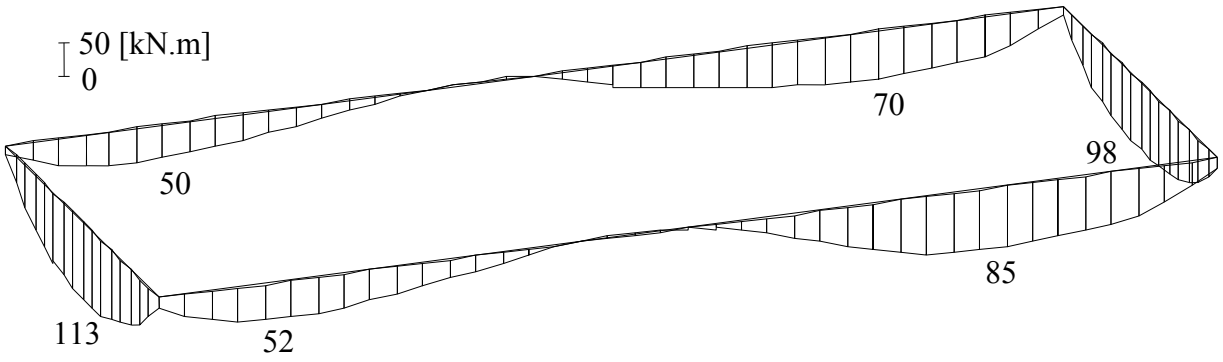


Bild 4.54 Stab-Biegemomente M_b [kN.m] im Anschluss Bodenplatte - Wand
Berechnung mit Interaktion und mit Querkraftübertragung (Fall 3)

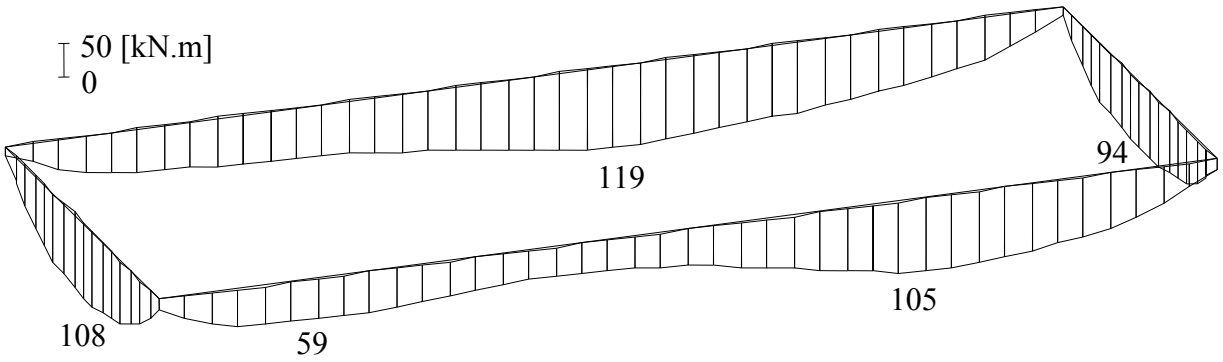


Bild 4.55 Stab-Biegemomente M_b [kN.m] im Anschluss Bodenplatte - Wand
Berechnung ohne Fuge (Fall 4)

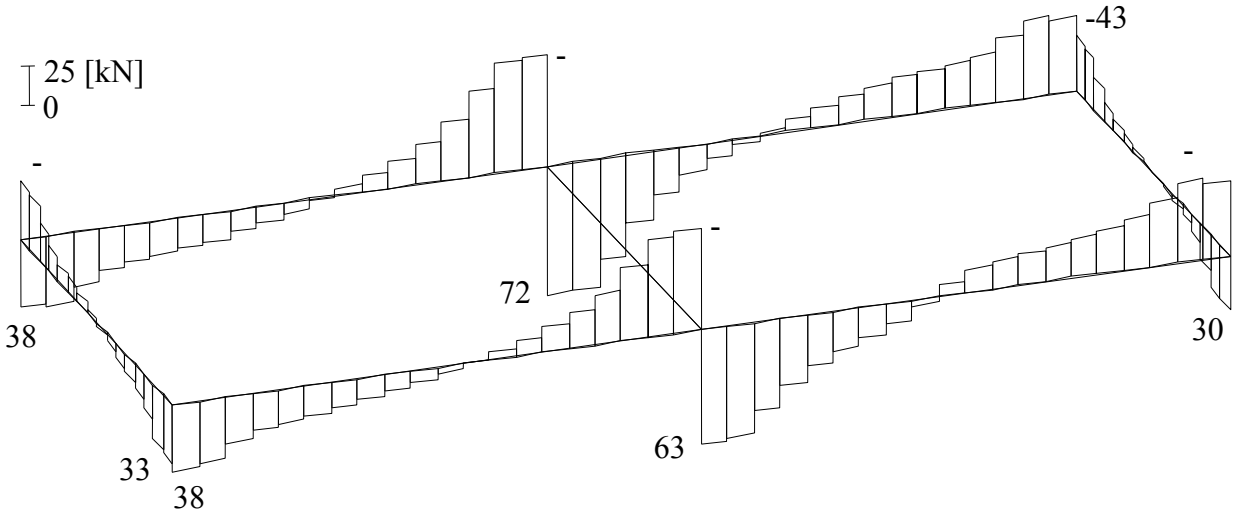


Bild 4.56 Stab-Querkräfte Q_s [kN]
Berechnung ohne Interaktion (Fall 1)

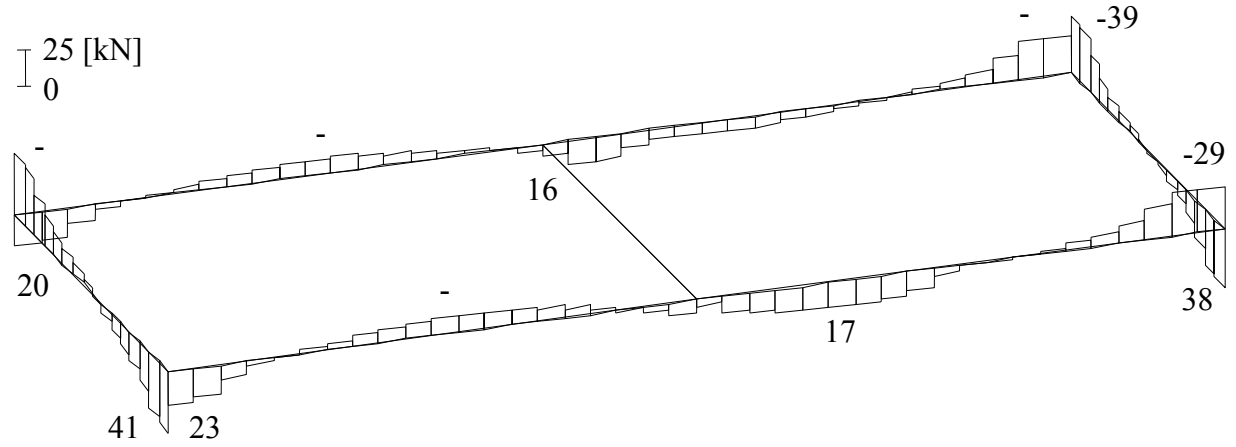


Bild 4.57 Stab-Querkräfte Q_s [kN]
Berechnung mit Interaktion und ohne Querkraftübertragung (Fall 2)

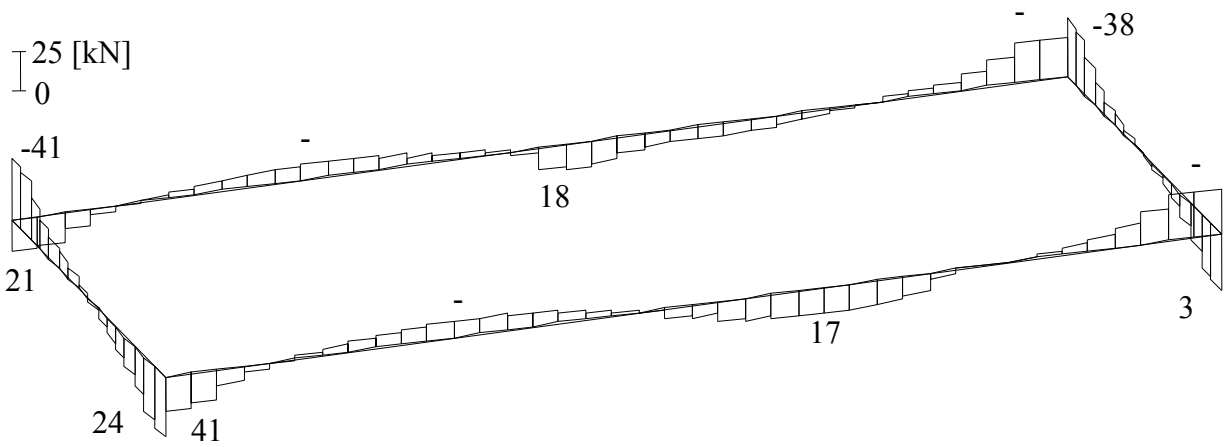


Bild 4.58 Stab-Querkräfte Q_s [kN]
Berechnung mit Interaktion und mit Querkraftübertragung (Fall 3)

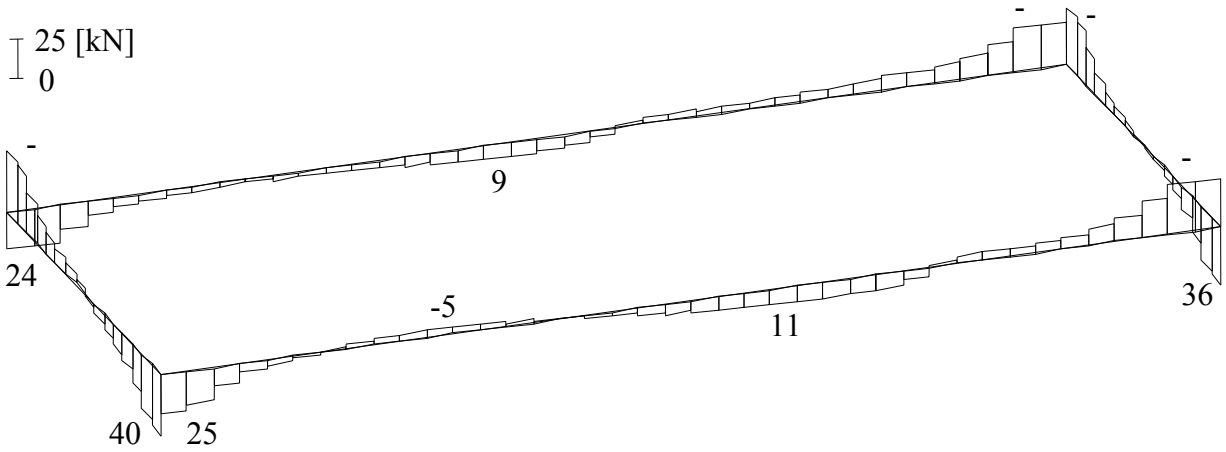


Bild 4.59 Stab-Querkräfte Q_s [kN]
Berechnung ohne Fuge (Fall 4)

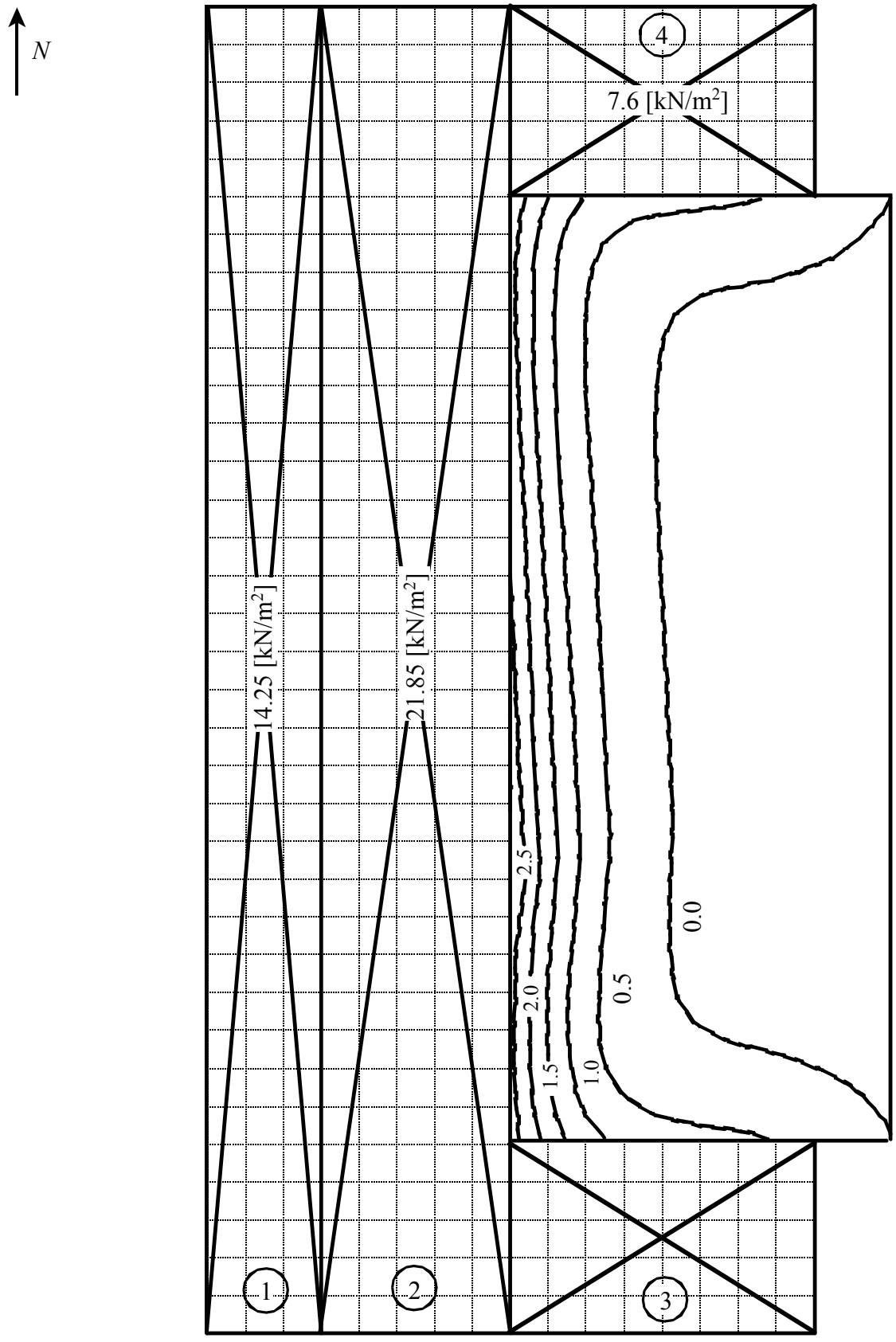


Bild 4.60 Isolinien der Setzungen *s* [cm] unter dem Schwimmbecken nach der Auffüllung um das Becken

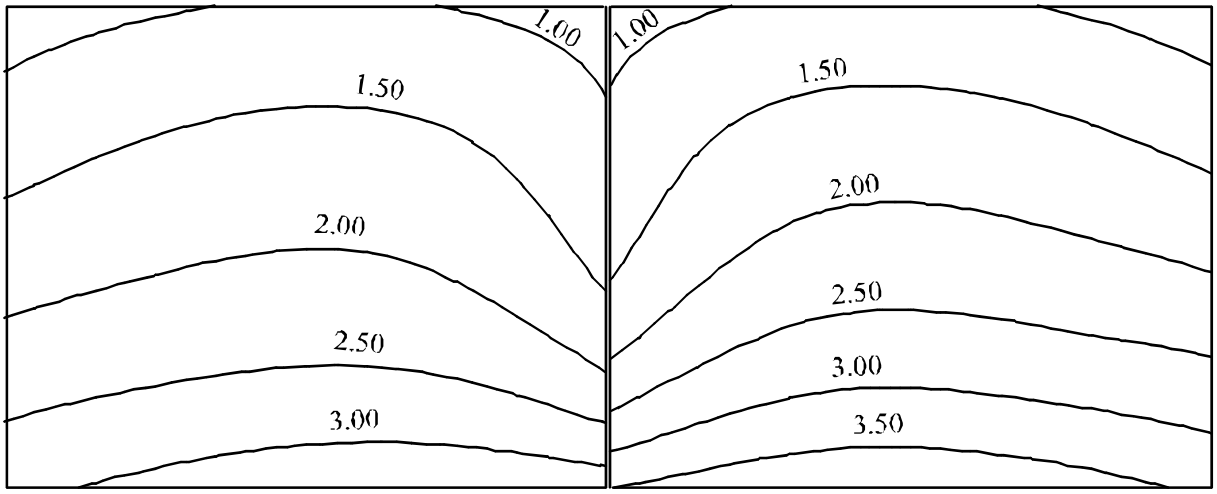


Bild 4.61 Isolinien der Setzungen *s* [cm]
Berechnung ohne Interaktion (Fall 1)
Mit Einfluss der seitlichen Auflast

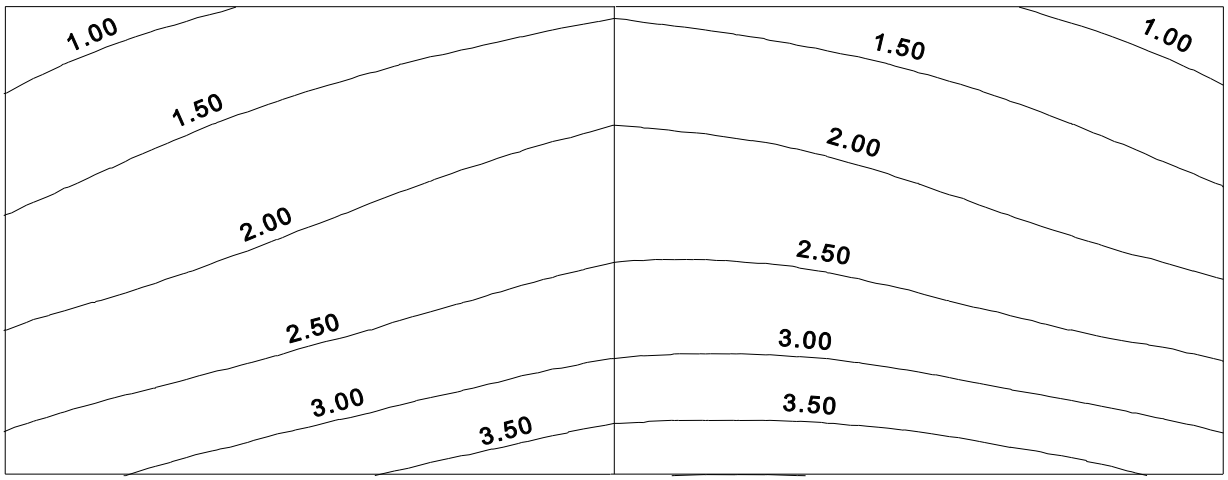


Bild 4.62 Isolinien der Setzungen *s* [cm]
Berechnung mit Interaktion und ohne Querkraftübertragung (Fall 2)
Mit Einfluss der seitlichen Auflast

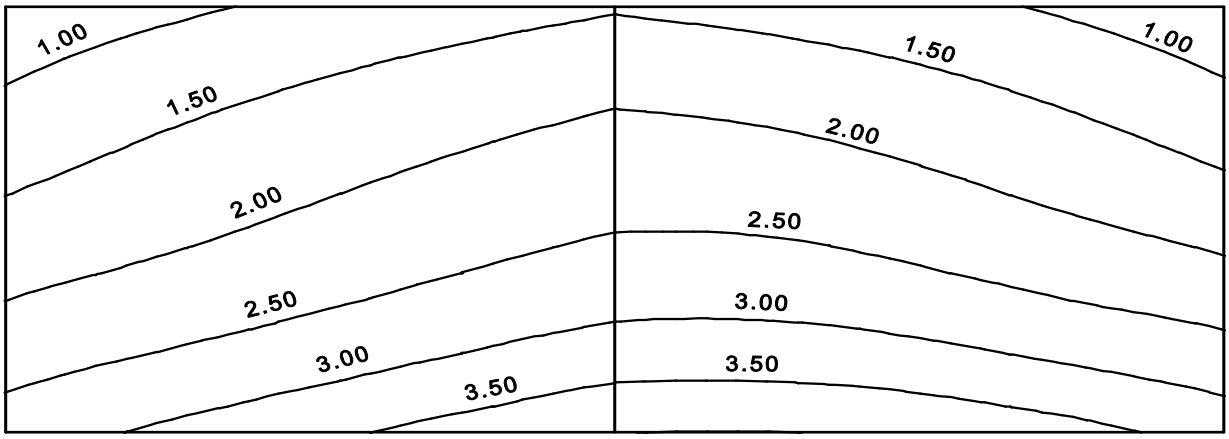


Bild 4.63 Isolinien der Setzungen *s* [cm]
Berechnung mit Interaktion und mit Querkraftübertragung (Fall 3)
Mit Einfluss der seitlichen Auflast

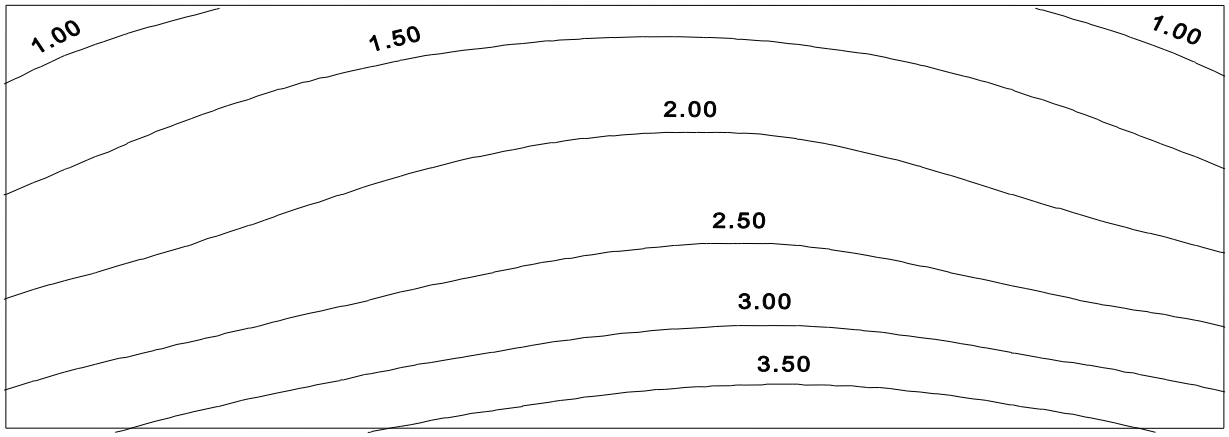


Bild 4.64 Isolinien der Setzungen *s* [cm]
Berechnung ohne Fuge (Fall 4)
Mit Einfluss der seitlichen Auflast

Abschnitt 5

Berechnung der Fundamentsteifigkeit

Inhalt

5.1	Einleitung		5- 2
5.2	Bestimmung der Fundamentsteifigkeit		5- 4
	5.2.1	Schlaffe Lösung	5- 4
	5.2.2	Starre Lösung	5- 5
	5.2.3	Elastische Lösung	5- 5
	5.2.4	Parameter k_r	5- 6
Beispiel 5.1		Steifigkeit einer einfachen Rechteckplatte	5- 7
Beispiel 5.2		Steifigkeit einer unregelmäßigen Platte auf unregelmäßigem Baugrund	5-12

5 Berechnung der Fundamentsteifigkeit

5.1 Einleitung

Ein Fundament wird als starr, elastisch oder schlaff betrachtet, abhängig vom Verhältnis zwischen der Steifigkeit des Fundaments und dem Baugrund.

Die älteste Arbeit für die Berechnung der Fundamentssteifigkeit stammt von *Borowicka* (1939). Er untersuchte das Problem der Sohldruckverteilung unter gleichförmigen belasteten Streifen und starren Fundamenten, die auf dem elastischen isotropen Halbraummedium ruhen. Die Untersuchung zeigte, dass die Verteilung der Sohldrücke, abhängig von der relativen Steifigkeit des Baugrund-Fundamentsystems k_B [-], definiert wird mit:

$$k_B = \frac{1}{6}\left(\frac{1-\nu_s^{\,2}}{1-\nu_b^{\,2}}\right)\left(\frac{E_b}{E_s}\right)\left(\frac{d}{b}\right)^3 \tag{5.1}$$

wobei:

ν_b	*Poisson*zahl des Fundaments	[-]
ν_s	*Poisson*zahl des Bodens	[-]
E_b	Elastizitätsmodul des Fundamentmaterials	[kN/m^2]
E_s	Elastizitätsmodul des Bodens	[kN/m^2]
b	Breite des Streifenfundaments oder Radius des Kreisfundaments	[m]
d	Fundamentdicke	[m]

Dabei zeigt $k_B = 0$ ein völlig schlaffes Fundament an, $k_B = \infty$ bedeutet ein völlig starres Fundament.

Nach der Untersuchung von *Borowicka* haben viele Autoren Formeln vorgestellt, um die Fundamentsteifigkeit für Platten zu berechnen, die auf verschiedenen Baugrundmedien ruhen. Zum Beispiel haben *Gorbunov/ Posadov* (1959) eine Formel für ein elastisches festes Medium vorgestellt. *Cheung/ Zienkiewicz* (1965) haben eine Formel für das *Winkler*-Medium und den isotropen elastischen Halbraum vorgestellt.

Auf der Basis einer großen Anzahl von vergleichenden Berechnungen für das Steifemodulverfahren hat *Graßhoff* (1987) verschiedene Grade von Systemsteifigkeit zwischen dem Fundament und dem Baugrund bis zum Fall praktischer Starrheit mit Hilfe der Gl. 5.2 vorgeschlagen. Die Gleichung wird immer noch bei vielen nationalen Normen wie deutscher Norm *DIN* 4018 und ägyptischer Norm *ECP* 196-1995 verwendet.

$$k_{st} = \frac{E_b}{E_s}\left(\frac{d}{l}\right)^3 \tag{5.2}$$

wobei:

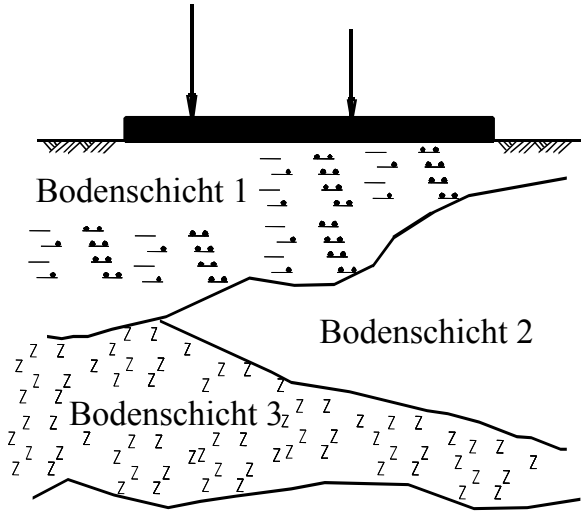
E_b	Elastizitätsmodul des Fundamentmaterials	[kN/m^2]
E_s	Elastizitätsmodul des Bodens	[kN/m^2]
d	Fundamentdicke	[m]
l	Fundamentlänge	[m]

Entsprechend der ägyptischen Norm *ECP* zeigt $k_{st} \geq 2$ ein starres Fundament an, $k_{st} \leq 0.005$ ein

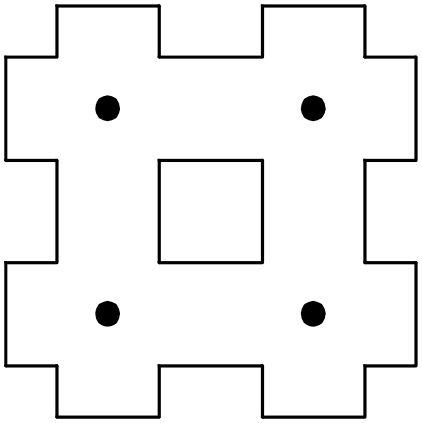
schlaffes Fundament und $0.005 < k_{st} > 2$ ein halbstarres Fundament. Bei *Graßhoff* (1987) zeigt $k_{st} = 1$ ein starres Fundament an, $k_{st} = 0.1$ ein steifes Fundament und $k_{st} = 0.01$ ein schlaffes Fundament.

Bei den meisten verfügbaren Formeln, die zur Berechnung der Fundamentsteifigkeit verwendet werden, müssen die Fundamente oder Platten regelmäßige Form oder einfache Belastungsgeometrie haben. Außerdem ist das Baugrundmodell ein isotropes Halbraummodell oder ein Baugrundmodell mit einer homogenen Schicht. Dies bedeutet, dass die praktische Anwendung dieser Formeln auf ebene Probleme begrenzt ist. Bild 5.1 zeigt einige praktische Probleme, wobei es sein kann, dass die Verwendung von traditionellen Formeln für die Berechnung der Fundamentsteifigkeit nicht anwendbar ist. Weiterhin kann es sein, dass die Verwendung von traditionellen Formeln nicht akzeptabel ist, wenn nichtlineare Berechnung des Baugrundes betrachtet wird oder wenn Nebeneinflüsse, wie die Einflüsse der Bodensenkung und Außenfundamente, erwartet werden. Die Fundamentsteifigkeit hängt von der Tiefe der Bodenschichten und ihrer elastischen Eigenschaften, Fundamentgeometrie, Fundamentmaterial, Fundamentdicke und der Verteilung der Lasten ab.

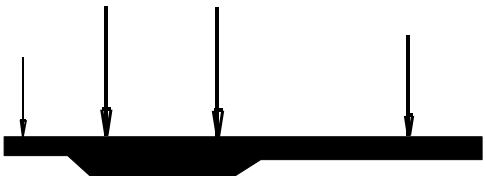
El Gendy (1998) und (1999) hat eine genauere Berechnung vorgeschlagen, um die Fundamentsteifigkeit zu bestimmen, die all die oben genannten Faktoren berücksichtigen kann. Diese Berechnung bietet die Möglichkeit, die Steifigkeit von Platten zu bestimmen. In dieser Berechnung können die Platten unregelmäßige Formen, Löcher, Buchtecken, variable Dicke haben. Die Platten können auch verschiedene Lastarten und Lastgeometrie haben. Weiterhin können die Platten auf unregelmäßigem Baugrund ruhen. Die Berechnung behandelt jedes Fundament als ein unabhängiges Problem, worin zwei Lösungen durchgeführt werden, voll schlaffe und voll starre außer der elastischen Lösung. Durch diese Lösungen kann die Systemsteifigkeit des Fundaments für jedes praktische Problem auf einem reellen Baugrundmedium für hohe Genauigkeit erhalten werden. Diese Berechnung ist im folgenden Abschnitt beschrieben.



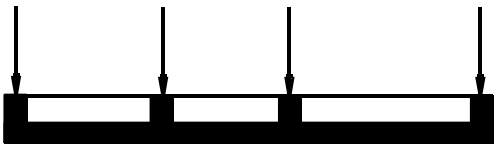
a) Fundament auf unregelmäßigem Baugrund



b) Trägerrostfundament oder Fundament mit Löchern



c) Fundament mit variabler Dicke



d) Geripptes Fundament

Bild 5.1 4 Beispiele, bei denen traditionelle Formeln nicht anwendbar sind

5.2 Bestimmung der Fundamentsteifigkeit

Heute ist die FE-Methode das leistungsfähigste Verfahren, das zur Lösung von vielen komplexen Problemen verfügbar ist. Sie kann fast für alle Ingenieurprobleme besonders in der Statikberechnung angewendet werden. Trotz der erfolgreichen Verwendung der FE-Methode in der Berechnung von Fundamenten kann es numerische Probleme während der Lösung des Systems von linearen Gleichungen verursachen, wenn das Fundament genügend starr ist. Hier kann gezeigt werden, dass das Fundament (wenn es dick genug ist und keine Momente infolge exzentrischer Belastungen vorhanden sind) viel steifer als der Baugrund sein wird, sodass an allen Stellen der Platte gleiche Setzungen auftreten. Hier anzunehmen, dass das Fundament völlig starr ist, ist vernünftig. Dementsprechend werden die zwei Lösungen, schlaffe und starre, außer der elastischen Lösung mit der FE-Methode, verwendet, um die Fundamentsteifigkeit oder die starre Dicke des Fundaments zu schätzen.

5.2.1 Schlaffe Lösung

Diese Lösung stellt ein Fundament mit 0 [%] Systemsteifigkeit dar. Wenn die Platte völlig schlaff (wie ein Damm) ist, wird die Belastung auf der Sohlfläche gleich der Sohlpressung auf dem Baugrund sein. Für den Satz von Rasterknoten der Platte sind die Bodensetzungen:

$$\{s\} = [c]\{Q\} \tag{5.3}$$

wobei:
$\{s\}$ Vektor der Setzung der Platte
$[c]$ Flexibilitätsmatrix der Platte
$\{Q\}$ Vektor des Sohldrucks der Platte

5.2.2 Starre Lösung

Diese Lösung stellt ein Fundament mit 100 [%] Systemsteifigkeit dar. Es gibt zwei Möglichkeiten, um die Plattensetzungen zu bestimmen:

- Wenn keine Momente infolge exzentrischer Belastungen vorhanden sind, treten an allen Stellen der Platte gleiche Setzungen w_o auf

- Wenn Momente einwirken, rotiert die Platte als starrer Körper. Es entstehen Setzungsdifferenzen zwischen den Plattenpunkten. Alle Setzungspunkte liegen aber auf einer Verbindungsgeraden

Bei völlig unsymmetrischer äußerer Belastung sind die Sohlkräfte Q_1 bis Q_n, die Setzung w_o des Plattenmittelpunktes und die Verdrehung θ_{xo} und θ_{yo} der Platte um die x- Achse und y- Achse die Unbekannten. Betracht man die n Kompatibilitätsgleichungen der starren Fundamentsverschiebung und der Setzung des Untergrunds an den n Knoten und den drei Gleichungen des allgemeinen Gleichgewichts, gilt die folgende Gleichung:

$$\{N\} = [X][k_s][X]^T \{\Delta\} \tag{5.4}$$

wobei:
$\{\Delta\}$ Vektor der Verformung der Platte aus w_o, tan θ_{yo} und tan θ_{xo}
$[X]^T$ Geometrische Matrix der Platte mit den Koordinaten x und y
$\{N\}$ Vektor der resultierenden Kräfte und Momente auf dem Fundament
$[k_s]$ Steifigkeitsmatrix für den Baugrund

5.2.3 Elastische Lösung

Diese Lösung stellt ein Fundament mit einer Systemsteifigkeit zwischen > 0 [%] und < 100 [%] dar. Die elastische Lösung betrachtet die Kompatibilität der Verformungen zwischen dem Fundament und dem Baugrund. Hier ist die Bodensetzung s gleich zur Fundamentverschiebung w. Die Steifigkeitsmatrix des gesamten Fundamentsystems ist die Summe der Steifigkeitsmatrix für das Fundament $[k_p]$ und den Baugrund $[k_s]$.

Die folgende Matrixgleichung drückt das Gleichgewicht des Fundament-Baugrundsystems aus:

$$\left[[k_p] + [k_s]\right] \{\delta\} = \{P\} \tag{5.5}$$

wobei:
$\{P\}$ Vektor der Auflasten
$\{\delta\}$ Verformungsvektor
$[k_p]$ Steifigkeitsmatrix für die Platte

5.2.4 Parameter k_r

Der Hauptfaktor in den Gln. 5.3, 5.4 und 5.5 ist die Verschiebung *w*, die hier gleich der Bodensetzung *s* ist. Deshalb wird die Definition der starren Körperbewegung verwendet, um die starre Dicke des Fundaments zu bestimmen. Wenn das Fundament völlig starr ist, rotiert das Fundament als starrer Körper. Es entstehen Setzungsdifferenzen zwischen den Fundamentpunkten. Alle Setzungspunkte liegen aber auf einer Verbindungsgeraden. Deshalb gibt Gl. 5.4 leicht die Ebene der Verschiebung, die nur durch drei Punkte definiert werden kann. Damit können die elastischen Setzungen (= Fundamentverformungen) von drei Punkten auf dem Fundament die gesamte Fundamentform definieren, wenn sie mit diesen starren Verschiebungen an denselben drei Punkten verglichen werden. Der Parameter k_r [%] an allen drei gewählten Punkten auf dem Fundament kann verwendet werden, um die Fundamentsteifigkeit darzustellen. Dieser Parameter ist eine Funktion der elastischen Setzung *s* und der starren Körperfortbewegung *w*. Er wird wie folgt geschrieben:

$$k_r = \left(1 - \frac{\Delta s_i}{w_i}\right) \times 100 \tag{5.6}$$

wobei:

s_i Bodensetzung im Punkt *i*
w_i starre Fundamentkörperverschiebung im Punkt *i*
Δs_i Absolute Differenz zwischen s_i und w_i in diesem Punkt *i*

Das Fundament kann als praktisch starr betrachtet werden, wenn eine Dicke (oder Systemsteifigkeit) k_r mehr als 90 [%] für drei gewählte Punkte auf dem Fundament ergibt.

Beispiel 5.1 Steifigkeit einer einfachen Rechteckplatte

1 Aufgabenstellung

Zum Vergleich mit komplexen Fundamentsteifigkeitsproblemen ist noch keine Lösung verfügbar. Zur Überprüfung der Berechnung von *El Gendy* (1998), um die Systemsteifigkeit des Fundaments zu bestimmen, wird deshalb ein einfaches Beispiel für eine Fundamentplatte betrachtet (Bild 5.2). Die Platte hat Abmessungen von 12 [m] × 12 [m].

2 Bodenkennwerte

Die Platte ruht auf einer homogenen Bodenschicht mit 20 [m] Mächtigkeit. Der Elastizitätsmodul des Bodenmaterials ist E_s = 10000 [kN/m^2]. Die *Poisson*zahl wird mit ν_s = 0.0 [-] für das Bodenmaterial angesetzt.

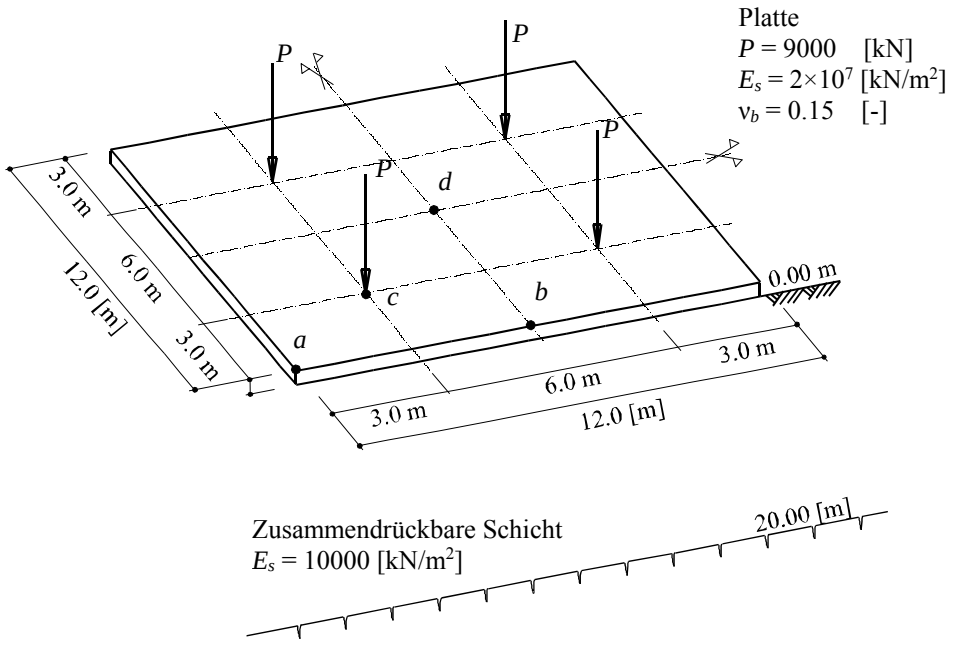


Bild 5.2 Abmessungen der Platte, Lasten und Baugrund

3 Materialkennwerte des Betons

Für das Plattenmaterial gilt:

Elastizitätsmodul	$E_b = 2 \times 10^7$	[kN/m^2]
*Poisson*zahl	$\nu_b = 0.15$	[-]
Wichte	$\gamma_b = 0.0$	[kN/m^3]

Das Eigengewicht wird in diesem Beispiel vernachlässigt**.**

4 Lasten

Die Lasten sind symmetrisch zu den Plattenachsen angeordnet (Bild 5.2a). Es sind 4 symmetrisch verteilte Einzellasten $P = 9000$ [kN] vorhanden.

5 Lösung der Aufgabe

Deninger (1964) hat dasselbe Beispiel mit Verwendung der finiten Differenzmethode bei Unterteilen der Platte in 6 × 6 Elemente untersucht. Jedes Element hat Abmessungen von 2 [m] × 2 [m]. Er hat die Plattendicke auf mehrere Werte von 0.4, 0.5, 0.6, 0.8 und 2.0 [m] untersucht.

Das Moment irgendwo in der Platte hängt von der Systemsteifigkeit der Platte, den Werten der Auflaten und Verteilung der Auflasten ab. Damit kann das Moment m_x an der Position der Einzellast unabhängig von Steifigkeitsformeln verwendet werden, um die starre Dicke der Platte in diesem Beispiel zu bestimmen. Hier wird die Platte als starr betrachtet an einer Dicke, an welcher das Moment m_x mehr als 90 [%] des Maximalmoments ergibt, das an diesem Punkt auftreten kann.

Die Platte in diesem Beispiel wird als starr für eine Dicke mehr als 0.85 [m] nach *Deninger* betrachtet. Eine Anwendung für die Gl. 5.2 bei diesem Beispiel gibt eine Systemsteifigkeit $k_{st} = 0.71$ [-]. Damit wird die Platte entsprechend dem Systemsteifigkeitgrad von *Graßhoff* (1987) als sehr steif betrachtet.

Reihen von Berechnungen mit Verwendung der FE-Methode für mehrere Werte der Plattendicke werden durchgeführt. Die Momente und die Setzungen an einigen gewählten Punkten werden gegen die Plattendicke geplottet, um die Plattensteifigkeit zu beschreiben.

Zuerst wird die Platte in 24 × 24 quadratische Elemente mit jeweils 0.5 × 0.5 [m^2] Fläche unterteilt, (Bild 5.3a). Dann wird die Platte in 12 × 12 quadratische Elemente mit jeweils 1 × 1 [m^2] Fläche unterteilt, wie im Bild 5.3b dargestellt.

Bei Nutzung der Symmetrie in Form, Baugrund und Belastungsgeometrie um die *x*- und *y*- Achse wird die Berechnung nur für ein Viertel der Platte durchgeführt.

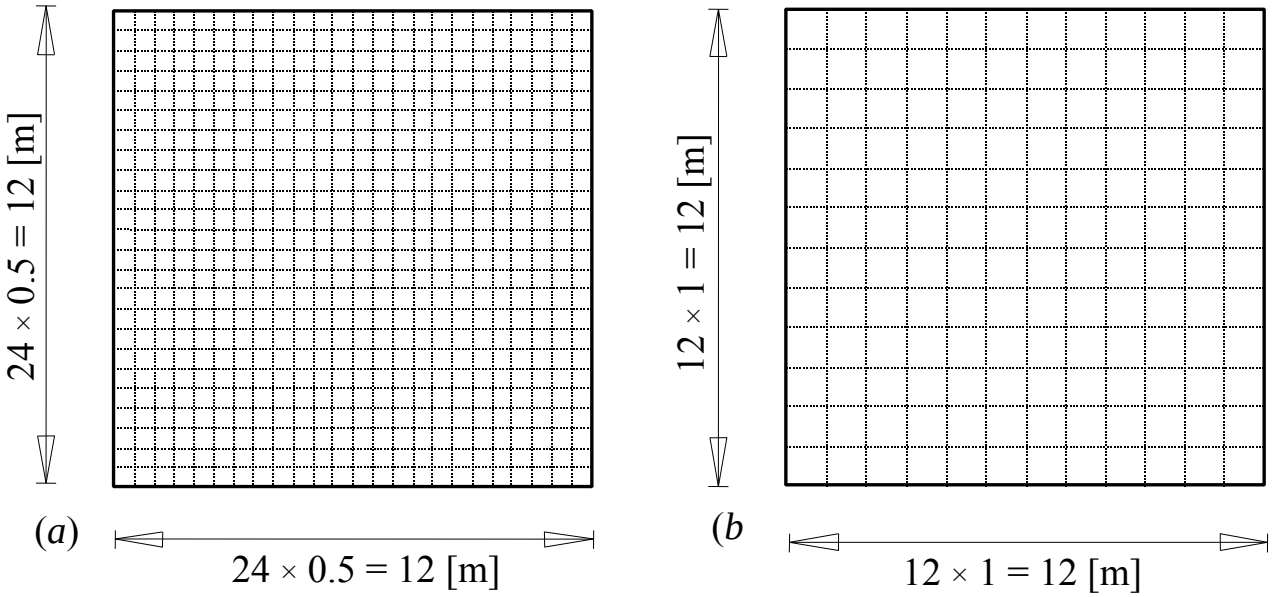


Bild 5.3 FE-Netz der Platte

6 Ergebnisse und Auswertung

Um die Konvergenz der Lösung mit der FE-Methode zu zeigen und zu überprüfen, werden die starre Dicke der Platte, die Bodensetzung *s* an vier charakteristischen Punkten *a*, *b*, *c* und *d* auf der Platte und die starre Körperverschiebung der Platte w_o, wenn die Platte völlig starr ist, gegen die Plattendicke in den Bildern 5.4 und 5.5 geplottet. Hier sind:

Punkt *a* Eckpunkt der Platte
Punkt *b* Mittelpunkt des Plattenrands
Punkt *c* Punkt unter der Last
Punkt *d* Mittelpunkt der Platte

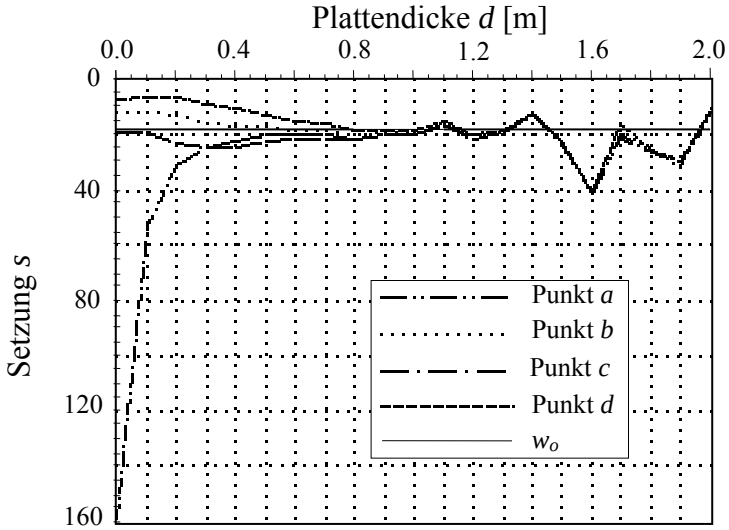


Bild 5.4 Setzung an vier charakteristischen Punkten mit Verwendung eines Netzes von 24 × 24 Elementen

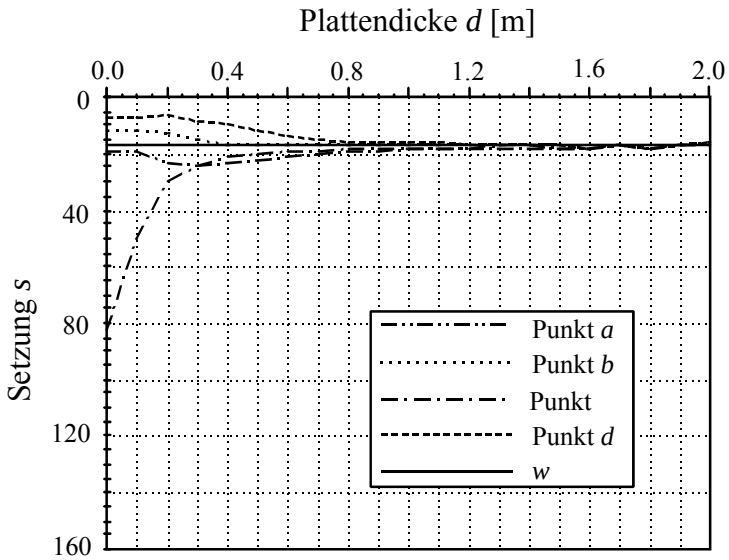


Bild 5.5 Setzung an vier charakteristischen Punkten mit Verwendung eines Netzes von 12 × 12 Elementen

Das Bild 5.6 zeigt das Moment m_x am Punkt *c* unter der Einzellast mit Verwendung von zwei Netzen mit 24 × 24 und 12 × 12 Elementen.

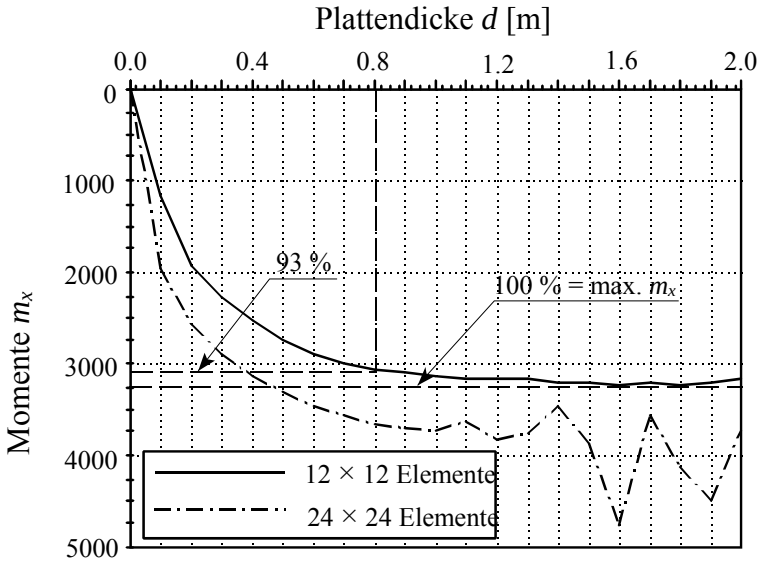


Bild 5.6 Momente m_x am charakteristischen Punkt *c*

Bild 5.4 zeigt, wenn ein verfeinertes Netz von 24 × 24 Elementen verwendet wird, wird die Lösung für die Plattendicke größer als 0.8 [m] Divergenz. Hier tritt keine Stabilität in der allgemeinen Matrix auf. Als Ergebnis, wenn die Platte starr genug ist, werden die Plattenverdrehungen null sein und an allen Stellen der Platte gleiche Verschiebungen w_o auftreten. Aus diesem Grund wird die Anzahl von Gleichungen größer sein als die Anzahl von Unbekannten. Ein anderes Problem kann sein, dass das Verhältnis zwischen der Plattenelementdicke und Elementgröße bei Anwendung der FE-Methode mit Verwendung der Plattenbiegeelemente beschränkt wird.

Bild 5.5 zeigt bei Verwendung eines Netzes von 12 × 12 Elementen gute Ergebnisse. Ein Vergleich zwischen Bild 5.4 und 5.5 zeigt, dass obwohl die Lösung durch Verwenden eines verfeinerten Netzes von 12 × 12 Elementen Divergenz wird, die starre Dicke der Platte bestimmt werden kann, weil die Grenze starrer Verschiebung von der starren Lösung bekannt ist.

Bild 5.6 zeigt, dass im Fall der Benutzung eines verfeinerten Netzes von 24 × 24 Elementen die *Deninger*sche Berechnung nicht verwendet werden kann, um die starre Dicke der Platte zu bestimmen, wobei die Position des Maximalmoments am Punkt *c* nicht klar im Bild ist. Weiterhin ist bei einer Platte mit komplexer Belastungsgeometrie eine Berechnung nicht praktisch, die die Steifigkeit der Platte nur am gewählten Punkt darstellt.

Bild 5.7 zeigt den Parameter k_r für die vier charakteristischen Punkte *a*, *b*, *c* und *d* der Platte. Bild 5.8 zeigt den Parameter k_r für dieselben charakteristischen Punkte, wenn eine gleichförmige Last von 250 [kN/m^2] die externen konzentrierten Lasten auf der Platte ersetzt, die gleich dem

durchschnittlichen Kontaktdruck, mit Verwendung eines Netzes von 12 × 12 Elementen ist.

Die Platte kann als starr betrachtet werden an einer Dicke mit k_r mehr als 90 [%] für alle charakteristischen Punkte.

Aus dem Bild 5.7 ist zu erkennen, dass die Platte als starr für eine Dicke mehr als 0.80 [m] betrachtet wird. Das Moment m_x bei dieser Dicke beträgt 93 [%] vom Maximalmoment an Punkt *c*. Diese Dicke ist auch anders als bei *Deninger* (1964) bei 5.6 [%] und macht die Platte sehr steif entsprechend *Graßhoff* (1987).

Entsprechend dieser Berechnung zeigt das Bild 5.8, dass die Platte als starr für eine Dicke mehr als 0.7 [m] betrachtet wird, wenn sie eine gleichförmige Last von 250 [kN/m^2] trägt. Dies bedeutet, dass die Belastungsgeometrie Einfluss auf die Plattensteifigkeit hat. Obwohl die Berechnung in diesem Beispiel für eine Rechteckplatte gezeigt ist, kann der Ansatz auch für allgemeine Probleme angewendet werden.

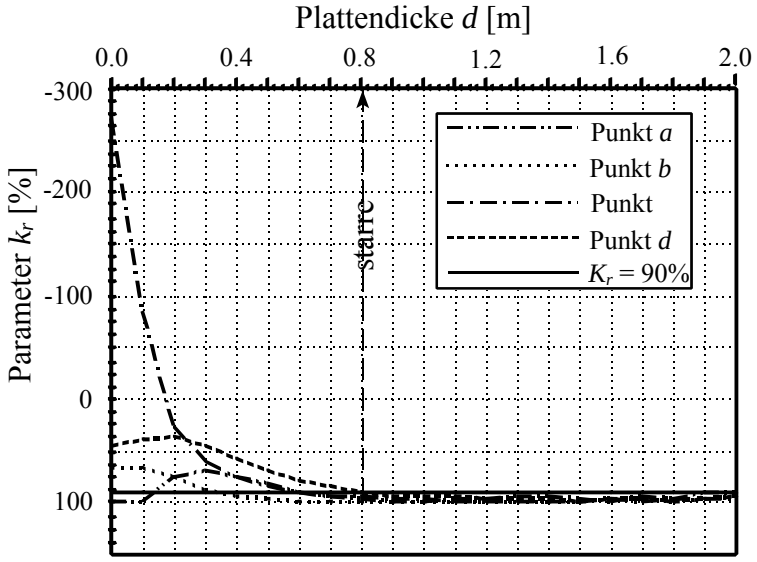


Bild 5.7 Parameter k_r für die charakteristischen Punkte
(Die Platte wird durch Einzellasten beansprucht)

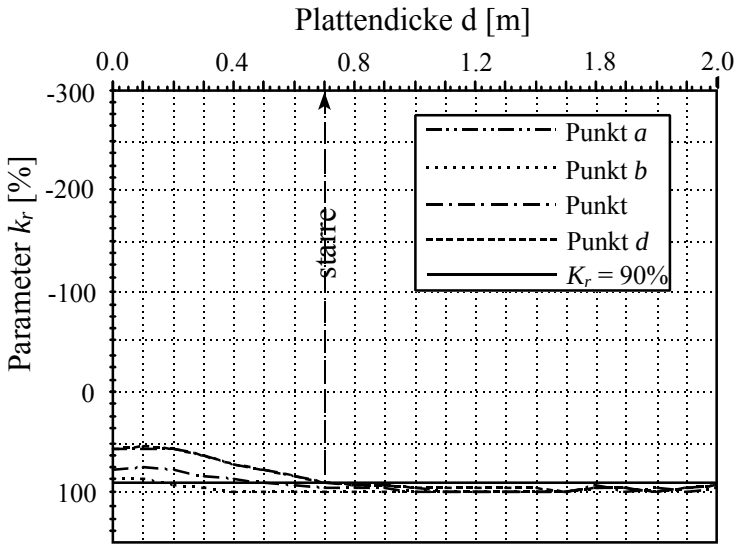


Bild 5.8 Parameter k_r für die charakteristischen Punkte
(Die Platte wird durch gleichförmige Last beansprucht)

Beispiel 5.2 Steifigkeit einer unregelmäßigen Platte auf unregelmäßigem Baugrund

1 Aufgabenstellung

Nachfolgend wird ein allgemeines Beispiel (Bilder 5.9 und 5.10) gerechnet, um die Anwendbarkeit der Systemsteifigkeitsberechnung nach *El Gendy* (1998) zu zeigen, und um die starre Dicke für eine Sohlplatte mit unregelmäßiger Grundrissform (z.B. Buchtecken und Löcher) zu bestimmen. Im untersuchten Fall ist die Platte verschiedenen äußeren Einwirkungen ausgesetzt: Einzellasten, Linienlasten, gleichförmig verteilten Lasten und Momenten in *x*- und *y*- Richtung (Bild 5.9).

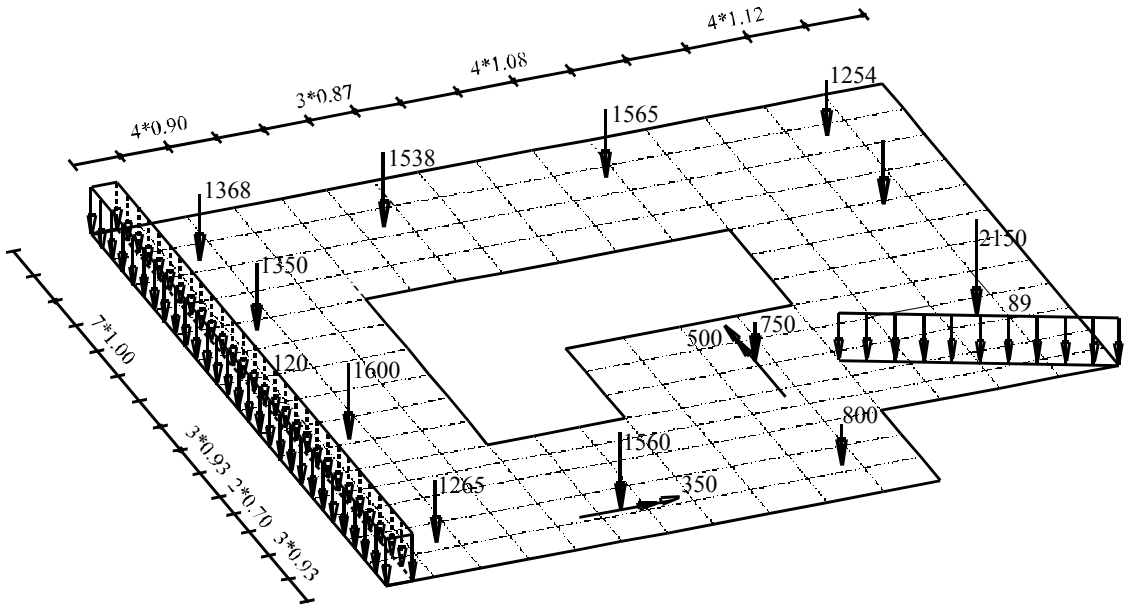


Bild 5.9 Bauwerksgrundriss und Lasten

2 Bodenkennwerte

Der Baugrund unter der Platte wird durch drei unterschiedliche Bohrprofile definiert. In jedem Bohrprofil sind mehrere Schichten mit verschiedenen Bodenmaterialien, wie in Bild 5.10 dargestellt, vorhanden. Im Programm *ELPLA* wird durch Interpolation zwischen den Bohrprofilen (Bild 5.10a) jedem Knoten ein Flexibilitätskoeffizient zugewiesen. Die *Poisson*zahl wird $\nu_s = 0.0$ [-] gesetzt und ist konstant für alle Bodenmaterialien. Der Einfluss von Erst- und Wiederbelastung und der Auftriebsdruck werden berücksichtigt. Die Gründungstiefe der Platte beträgt $d_f = 2.70$ [m].

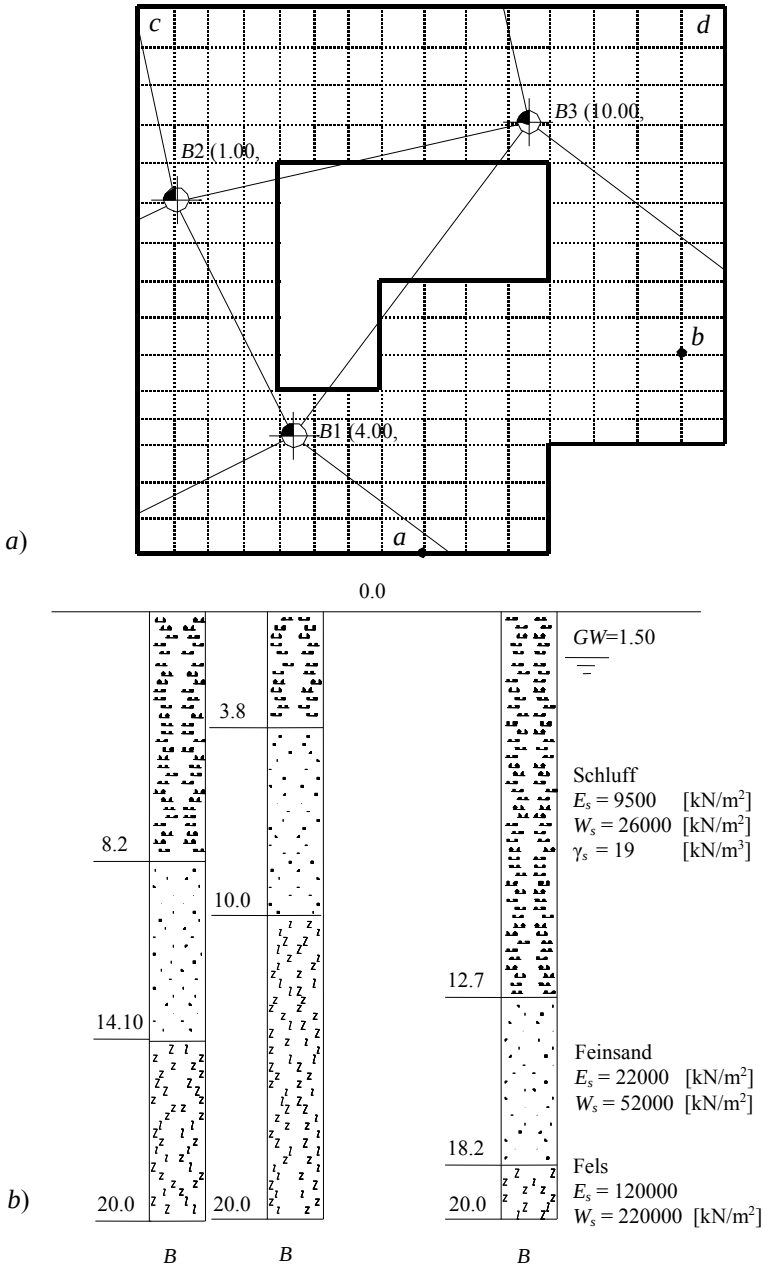


Bild 5.10 *a*) Lage der Bohrungen und Interpolationszonen
b) Bohrungen *B*1 bis *B*3 mit Schichtenfolgen und Bodenkenngrößen (Steifemoduli E_s, W_s und Wichten γ_s)

3 Materialkennwerte des Betons

Für Plattenmaterial und Plattendicke werden die folgenden Parameter angenommen:

Elastizitätsmodul	E_b	$= 2 \times 10^7$	[kN/m^2]
*Poisson*zahl	ν_b	= 0.25	[-]
Wichte des Betons	γ_b	= 0.0	[kN/m^3]
Plattendicke	d	= 0.5	[m]

Eigengewicht des Betons wird vernachlässigt.

4 Berechnung und Diskussion

Die verfügbare Lösung von *Kany*/ *El Gendy* (1995) für die Berechnung von Fundamentplatten auf dreidimensionalem Untergrund mit Interpolationsmethode wird hier bei der Berechnung dieses allgemeinen Beispiels verwendet.

Vier Punkte auf der Platte werden gewählt, um den Parameter k_r zu schätzen. Diese Punkte stellen die gesamte Fundamentsteifigkeit dar, wie im Bild 5.10a gezeigt. Bild 5.11 zeigt den Parameter k_r für diese Punkte. Man kann sehen, dass die Platte als starr für eine Dicke mehr als 1.01 [m] betrachtet wird.

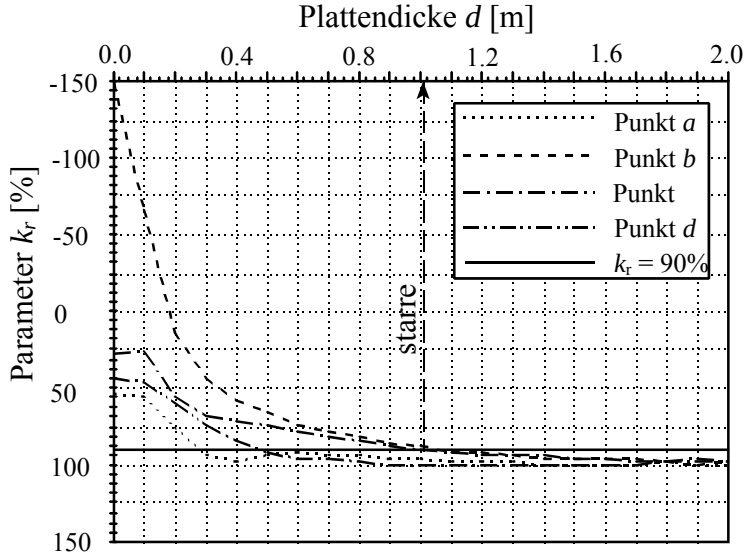


Bild 5.11 Parameter k_r für die charakteristischen Punkte *a*, *b*, *c* und *d*

Ein anderer Parameter $k´_r$, der ähnlich k_r ist, wird aus der Sohldruckform erhalten. Dieser Parameter ist gegen die Plattendicke für die 4 Punkte im Bild 5.12 geplottet. Hier wird k_r gegeben mit:

$$k'_r = \left(1 - \frac{\Delta q_i}{g_i}\right) \times 100 \tag{5.7}$$

wobei:

q_i Sohldruck aus elastischer Berechnung am Punkt *i*
g_i Sohldruck aus starrer Berechnung am Punkt *i*
Δq_i Absolute Differenz zwischen q_i und g_i an diesem Punkt *i*

Obwohl das Bild 5.12 eine starre Plattendicke von mehr als 1.05 [m] ergibt, fast wie in Bild 5.11, wird für die Bestimmung der starren Plattendicke empfohlen, den Parameter k_r zu verwenden, wobei die starre Bewegungsebene nur mit drei Punkten beschrieben werden kann.

Um die Gültigkeit der Berechnung für dieses Beispiel zu überprüfen, werden die Momente m_x und m_y am Punkt *b* gegen die Plattendicke im Bild 5.13 geplottet. Die Momente bei einer Plattendicke von 1.01 [m] werden mit den Maximalmomenten verglichen, die an diesem Punkt auftreten können. Es zeigt sich, dass beide Momente m_x und m_y sich berühren, wobei der Wert von m_x 92 [%] des Maximums m_x ist, während der Wert von m_y gleich 95 [%] an demselben Punkt ist.

Obwohl die Platte in diesem Beispiel eine konstante Dicke hat, kann man die Fundamentsteifigkeit bestimmen, wenn die Plattendicke variabel ist. In diesem Fall kann die Steifigkeit des Fundaments bestimmt werden, wobei der Parameter k_r gegen den Elastizitätsmodul des Plattenmaterials E_b an mehreren Werten von E_b geplottet wird.

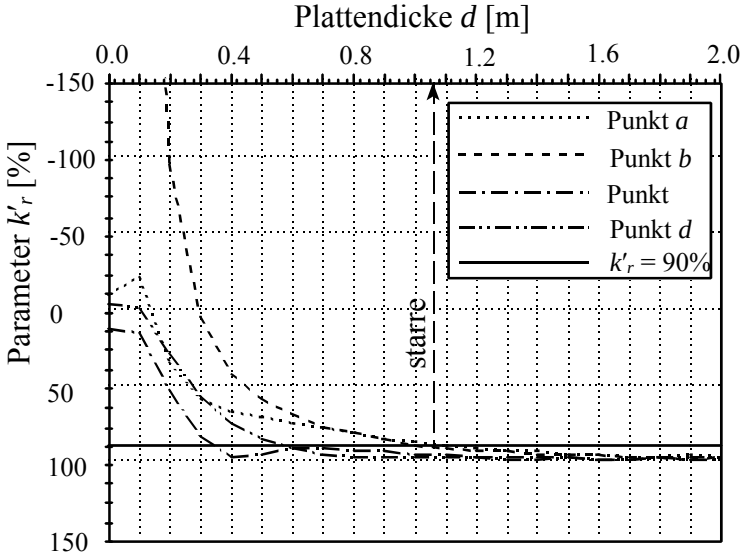


Bild 5.12 Parameter $k´_r$ für die charakteristischen Punkte *a*, *b*, *c* und *d*

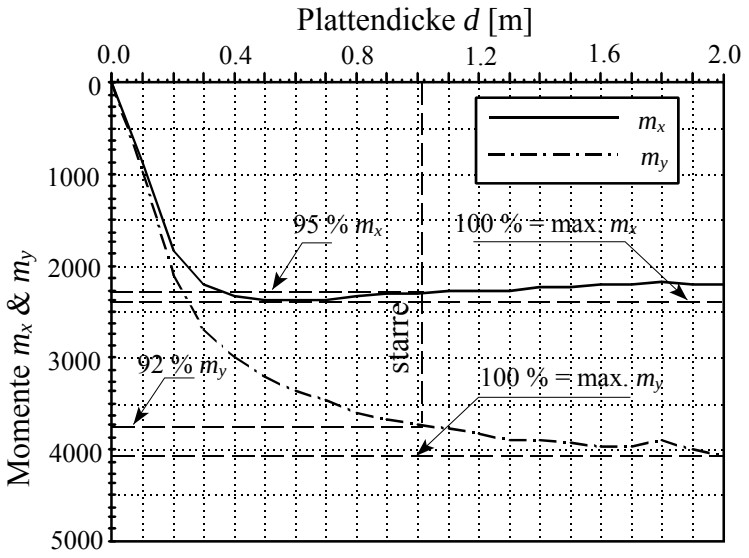


Bild 5.13 Momente m_x und m_y am charakteristischen Punkt *b*

Abschnitt 6

Einfluss der Überbausteifigkeit auf das Fundament

Inhalt

6.1	Einleitung	6- 2
6.2	Vereinfachte Berücksichtigung der Steifigkeit des Bauwerks	6- 3
6.2.1	Bauwerkssteifigkeit	6- 3
6.2.2	Steifigkeit des Untergrunds	6- 7
6.2.3	Systemsteifigkeit	6- 7
6.2.4	Modellierung von Wand-Decke-Überbau in der Plattenberechnung	6- 9
6.2.5	Bestimmung der Ersatzwandhöhe	6-10
6.3	Direkte Modellierung der Bauwerk/ Baugrund-Wechselwirkung	6-11
6.4	Modellierung der Bauwerk/ Baugrund-Wechselwirkung durch Iteration	6-12
6.4.1	Iterationsverfahren	6-13
6.4.2	Nichtlineares mathematisches Baugrundmodell	6-17
Beispiel 6.1	Berechnung der Gründungsplatte eines Hochhauses	6-19
Beispiel 6.2	Überprüfung des Iterationsverfahrens	6-28
Beispiel 6.3	Berechnung eines Bauwerks auf nichtlinearem Baugrund	6-33

6.1 Einleitung

Bei der Erstellung von Bauwerken auf zusammendrückbarem Untergrund setzen sich die Fundamente und damit auch das Bauwerk. Die Größe der Setzungen und Setzungsdifferenzen ist nicht nur abhängig von der Zusammendrückbarkeit des Untergrunds unter dem Bauwerk, der Gründungstiefe und mittleren Sohlpressungen der Fundamente und der Größe und Verteilung der Bauwerklasten auf den Untergrund. Sie ist auch von der Biegesteifigkeit des Rahmensystems abhängig.

Die Steifigkeit des Überbaus hat oft einen erheblichen Einfluss auf die Setzungen. Beim starren Bauwerk entstehen gleichmäßige Setzungen. Andererseits müssen bei elastischen Bauwerken oft erhebliche Setzungsdifferenzen aufgenommen werden.

Das gesamte Bauwerk besteht aus drei Teilen: Überbau, Fundament und Baugrund. Obwohl die Analyse des gesamten Bauwerks als eine Einheit sehr wichtig ist zur Ermittlung der Verformungen und Schnittgrößen, bleibt bei der praktischen Berechnung des Bauwerks oft die Interaktion zwischen den drei Teilen unberücksichtigt. Um die dreidimensionale Berechnung und Modellierung zu vermeiden, wird das Bauwerk auf starren Lagern berechnet, während das Fundament ohne Einfluss des Bauwerks berechnet wird, wobei von der Annahme ausgegangen wird, dass eine Verbindung zwischen den Stützen besteht. Eine genauere Berechnung des gesamten Bauwerks ist zudem sehr komplex.

Bei den Rechenverfahren zur Erfassung der Bauwerkssteifigkeit ist zu unterscheiden zwischen Berechnungen für ebene Bauwerke (Untersuchung in einer Ebene mit 2 Achsenrichtungen) und für räumliche Bauwerke (Untersuchung in 3 Achsenrichtungen). Ferner ist zu unterscheiden zwischen vereinfachten Verfahren, bei denen die Steifigkeit des Bauwerks durch Näherungsformeln berücksichtigt werden kann (*Meyerhof* (1953), *Sommer* (1972), *Kany* (1974)) und den verfeinerten Verfahren, bei denen das gesamte Bauwerkssystem mit Gründungsplatte und Überbau als eine Einheit behandelt wird , als ebenes oder räumliches System mit konventionellen Stabstatikverfahren nach *Kany* (1976) oder mit den Methoden der Finiten Elemente nach *Meyer* (1977), *Ellner/ Kany* (1976), Zilch (1993), *Kany/ El Gendy* (2000) bzw. der Finiten Differenzen nach *Bowles* (1974) oder *Deninger* (1964). Der Rechenaufwand steigt dann erheblich.

Für ebene Bauwerkssysteme wurden verschiedene Programme entwickelt, um Gründungsbalken nach dem Bettungsmodulverfahren oder Steifemodulverfahren nach *Kany* (1980), *Kany/ El Gendy* (1996) berechnen zu können. Derartige Programme sind nahezu bei allen auf baustatischem Gebiet arbeitenden Statik-Büros vorhanden. Bei Anwendung dieser Programme lässt sich meist auch die Steifigkeit des aufgehenden Bauwerks berücksichtigen.

Bei räumlichen starren Bauwerkssystemen sind die Verformungen des Bauwerks vernachlässigbar klein. Solche Bauwerke können z.B. aus steifen Wandscheiben oder dicken Fundamentblöcken (im Verhältnis zur Länge des Fundaments) bestehen. Hier würde die Berechnung mit Programmen für elastische Balken oder Platten auf numerische Probleme stoßen. Deshalb wurden von *Kany* (1974) und *Kany/ El Gendy* (2001) spezielle Programme mit einfachen Systemen linearer Gleichungen für starre Balken und Platten entwickelt.

Bei elastischen Bauwerkssystemen mit Flächengründungen, die in der Praxis in der Mehrzahl vorkommen, besitzt das Fundament in Verbindung mit dem Bauwerk eine solche Systemsteifigkeit,

dass bei der Ableitung der Lasten auf den Baugrund eine Kräfteumlagerung stattfindet. Dadurch entstehen Zusatzspannungen im Bauwerk. Sie können mit Computern berechnet und bei der Bemessung der Bauwerke verwendet werden. Es gibt Programme, bei denen es möglich ist, auch die Steifigkeit des aufgehenden Bauwerks zu erfassen, wie bei *Kany* (1976), *Ellner/ Kany* (1976), aber auch hier wird der Rechenaufwand erheblich.

Eine frühe Untersuchung zur Berücksichtigung der Steifigkeit des Bauwerks lieferte *Meyerhof* (1953), der Näherungsformeln vorgeschlagen hat, um die Steifigkeit mehrstöckiger Gebäuderahmen abzuschätzen. *Kany* (1974) hat die Biegesteifigkeit der mehrstöckigen Gebäuderahmen durch eine empirische Formel gegeben. Auch hat *Kany* (1977) das gesamte Bauwerk und den Baugrund mit einem direkten Verfahren berechnet. Nach der Differenzmethode hat *Deninger* (1964) ein Steifemodulverfahren und ein Rechenprogramm für rechteckige Gründungsplatten mit Wandscheiben entwickelt. Die Methode der finiten Elemente wird mit Erfolg auch zur Berechnung von Gründungsplatten mit Einfluss des Bauwerks verwendet. So wurde von *Kany/ El Gendy* (2000) eine Iterationsmethode entwickelt, mit der das gesamte Bauwerk berechnet werden kann. Nach der FE-Methode haben auch *Lee/ Brown* (1972) einen ebenen Rahmen auf einem zweidimensionalen Baugrundmodell berechnet. *Mikhaiel* (1978) hat die Steifigkeit der Wandscheiben und Plattendecken auf dem Fundament berücksichtigt. *Zilch* (1993) hat ein Verfahren für die Berechnung der Interaktion von Baugrund und Bauwerk über Iteration entwickelt. In den *EWB* (2001) sind die Grundlagen und Berechnungsverfahren zur Erfassung der Boden/ Bauwerk-Wechselwirkung erläutert, außerdem in *Smoltczyk*/ *Netzel*/ *Kany* (2001).

6.2 Vereinfachte Berücksichtigung der Steifigkeit des Bauwerks

6.2.1 Bauwerkssteifigkeit

Bei der Berechnung von Flächengründungen ist es nötig, den Einfluss der Bauwerkssteifigkeit zu untersuchen. Zu unterscheiden ist zwischen der Biegesteifigkeit des Bauwerks, die vom Verformungsverhalten des Untergrunds unabhängig ist, und der Systemsteifigkeit, die das Verhältnis der Biegesteifigkeit des Bauwerks zur Steifigkeit des Untergrunds ausdrückt.

Im Rahmen der Berechnung von Flächengründungen ergeben sich hauptsächlich folgende Fragestellungen:

- Wie sind Biegesteifigkeit und Systemsteifigkeit im Einzelfall zu berechnen?

- Bei welcher Systemsteifigkeit kann ein Bauwerk als praktisch starr bezeichnet werden?

- Wie groß ist jeweils der Einfluss der Biegesteifigkeit des Bauwerks auf die Berechnungsergebnisse?

Die Einwirkung des Überbaus auf das Fundament verursacht zusätzlich zu der Eigensteifigkeit des Fundaments eine weitere Versteifung des Systems. Dieser Einfluss ist umso größer, je größer das Verhältnis der Biegesteifigkeit des Überbaus zu derjenigen des Fundaments ist.

Die Biegesteifigkeit des Überbaus und Fundaments und die Steifigkeit des Untergrunds sind von vielen Autoren gleichermaßen betrachtet worden, wie *Brown/ Yu* (1986), *Lee/ Harrison* (1970) und *Meyerhof* (1953). Die absolute Biegesteifigkeit von Überbau K_B [kN.m^2], Fundament K_G [kN.m^2]

und Steifigkeit des Untergrunds K_s [kN.m^2] oder K_c [kN.m^2] kann berechnet werden, wie im folgenden Abschnitt beschrieben wird.

6.2.1.1 Biegesteifigkeit des Überbaus

Die Biegesteifigkeit des Überbaus wird ausgedrückt durch das Produkt aus dem Elastizitätsmodul E_B [kN/m^2] des Überbaus und dem ideellen Trägheitsmoment I_B [m^4] des gesamten Überbausystems:

$$K_B = E_B \, I_B \tag{6.1}$$

Nach *Meyerhof* (1953) kann die Biegesteifigkeit des mehrstöckigen Gebäuderahmens, der aus Deckenplatten und Stützen (oder Wandscheiben) zusammengesetzt ist, wie folgt näherungsweise erhalten werden (Bild 6.1):

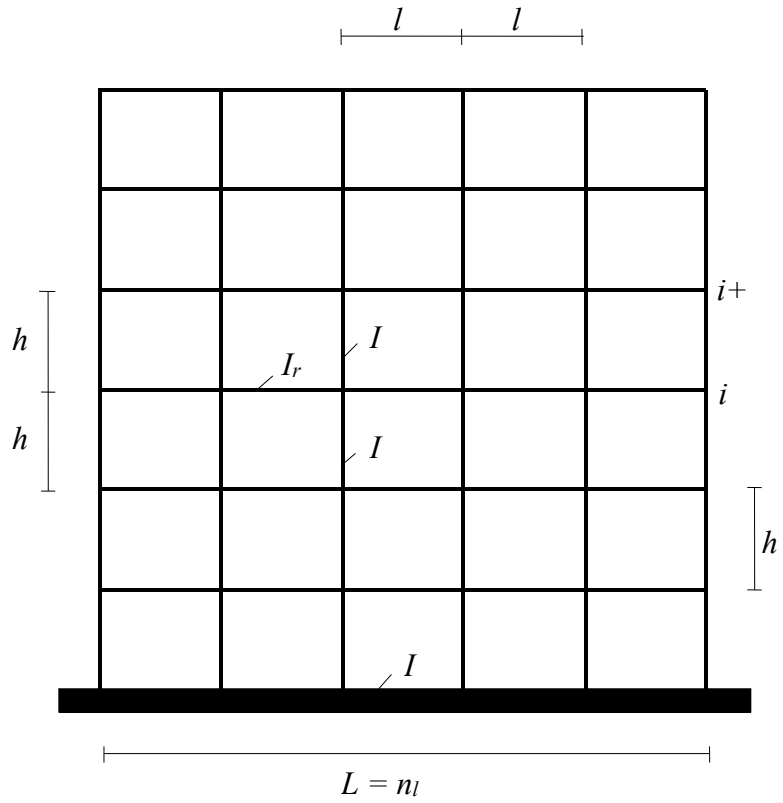


Bild 6.1 Details eines mehrstöckigen Gebäuderahmens mit Fundament (*Meyerhof*sche Formeln)

i) Offene Stockwerkrahmen

In einem Stockwerk *i* eines offenen mehrstöckigen Gebäuderahmens mit ungefähr gleich großen Feldern kann die Biegesteifigkeit wie folgt erhalten werden:

$$E_B \, I_i = E_B \, I_r \left\{ 1 + \left(\frac{K_u + K_o}{K_r + K_u + K_o} \right) \left(\frac{L^2}{l^2} \right) \right\} \tag{6.2}$$

wobei:

n_s	Anzahl der Felder	
L	Gesamtlänge des Rahmensystems (= $n_s\ l$)	[m]
$K_r = I_r/l$	Mittlere Steifigkeit der Decke	[m^3]
I_r	Trägheitsmoment der Decke	[m^4]
l	Spannweite der einzelnen Felder	[m]
$K_u = I_u/h_u$	Mittlere Steifigkeit der Stützen unter dem Stockwerk	[m^3]
I_u	Trägheitsmoment der Stützen unter dem Stockwerk	[m^4]
h_u	Höhe des Stockwerks unter der Decke	[m]
$K_o = I_o/h_o$	Mittlere Steifigkeit der Stützen über dem Stockwerk	[m^3]
I_o	Trägheitsmoment der Stützen über dem Stockwerk	[m^4]
h_o	Höhe des Stockwerks über der Decke	[m]
I_i	Ideelles Trägheitsmoment des Stockwerks i	[m^4]

Die gesamte Steifigkeit des ganzen Überbaus kann dann wie folgt errechnet werden:

$$K_B = E_B\ I_B = \sum_{i=1}^{n_s} E_B\ I_i \tag{6.3}$$

ii) Offene Stockwerkrahmen mit Versteifung durch Füllwände

Wird der Stockwerkrahmen durch Füllwände versteift, auf die Scherspannungen vom Rahmenwerk übertragen werden, so wird die Biegesteifigkeit der Gl. 6.2 in einem Stockwerk i weiter vergrößert:

$$K_B = E_B\ I_B = E_B\ I_i + \frac{E_f\ I_f\ L^2}{2\ h^2} \tag{6.4}$$

wobei:

$E_f\ I_f = E_f\ t_w\ h^3/12$	Biegesteifigkeit der Füllwand	[kNm^3]
I_f	Trägheitsmoment der Füllwand	[m^4]
E_f	Elastizitätsmodul des Füllwandmaterials	[kN/m^2]
t_w	Dicke der Füllwand	[m]
h	Höhe der Füllwand	[m]

iii) Der Überbau ist als hoher Träger (Scheibe) konstruiert

Wenn die Füllwände kontinuierlich verlaufen, so verhält sich das Überbausystem wie eine hohe Wand (Scheibe). Dann kann die Biegesteifigkeit des Rahmenwerks oft gegenüber derjenigen der Wände vernachlässigt werden, sodass sich die Biegesteifigkeit des Überbausystems wie folgt näherungsweise errechnet:

$$K_B = E_B\ I_B = \frac{E_B\ t_w\ H^3}{12} \tag{6.5}$$

wobei:

H Höhe der Wand oder des Überbaus [m]

Bei genügend großer Felderzahl n_l kann daher die folgende Näherungsformel zur Abschätzung der Steifigkeit von Stockwerksrahmen ohne Füllwände verwendet werden:

$$E_B\, I_B \approx E_B\, I_r\, n_s\, n_l^{\,2}\, \frac{2\,K_s}{K_r + 2\,K_s} \tag{6.6}$$

wobei:

$K_s = I_s/h$	Mittlere Steifigkeit der Stützen unter und über dem Stockwerk	[m³]
I_s	Trägheitsmoment der Stützen unter und über dem Stockwerk	[m⁴]
h	Höhe des Stockwerks	[m]

Die Gl. 6.6 ergibt sich aus Gl. 6.2, wenn K_s . K_u . K_o = konstant und $n_l^2\ 2K_s / (K_r + 2K_s) >> 1$ ist.

6.2.1.2 Biegesteifigkeit des Fundaments

Die Biegesteifigkeit eines Fundamens K_G [kNm²] mit Breite B [m] und Dicke d [m] kann wie folgt erhalten werden:

$$K_G = E_G\, I_G = \frac{E_G\, B\, d^3}{12} \tag{6.7}$$

wobei:

I_G	Trägheitsmoment des Fundaments	[m⁴]
E_G	Elastizitätsmodul des Fundaments	[kN/m²]

Die Biegesteifigkeit eines Bauwerks wird ausgedrückt durch das Produkt aus dem wirksamen Elastizitätsmodul E_b [kN/m²] des Bauwerks und dem ideellen Trägheitsmoment I [m⁴] des gesamten Bauwerkssystems. Nun kann die Biegesteifigkeit des gesamten Bauwerks ($E_b\, I$) ausgedrückt werden als die Summe aus der Biegesteifigkeit des Fundaments ($E_G\ I_G$) und der Biegesteifigkeit des Bauwerks ($E_B\ I_B$).

$$E_b\, I = E_G\, I_G + E_B\, I_B \tag{6.8}$$

wobei:

I	ideelles Trägheitsmoment des gesamten Bauwerkssystems	[m⁴]
E_b	wirksamer Elastizitätsmodul des Bauwerks	[kN/m²]

6.2.2 Steifigkeit des Untergrunds

Im Falle des Bettungsmodulverfahrens ist die Steifigkeit des Untergrunds eine Funktion des Bettungsmoduls k_s [kN/m³] und im Falle des Steifemodulverfahrens eine Funktion des Steifemoduls E_s [kN/m²] des Untergrunds.

Für ein rechteckiges Fundament mit Breite B [m] und Länge L_f [m] ist die Steifigkeit des Untergrunds beim Bettungsmodulverfahren K_w [kNm²]:

$$K_w = k_s\, L_f^{\,4}\, B \tag{6.9}$$

und beim Steifemodulverfahren K_k [kNm^2] ist:

$$K_k = E_s \, L_f^{\,3} \, B \tag{6.10}$$

6.2.3 Systemsteifigkeit

Ob ein Bauwerk als starr, elastisch oder schlaff anzusehen ist, hängt von dem Verhältnis zwischen der Biegesteifigkeit des Überbaus einschließlich des Fundaments und der Steifigkeit des Untergrunds ab.

Wenn man den Überbau vernachlässigt, kann die Systemsteifigkeit eines Fundamentbalkens mit rechteckförmigem Querschnitt auf einheitlichem Untergrund durch das folgende Verhältnis ausgedrückt werden:

Für Bettungsmodulverfahren K_c [-]:

$$K_c = \frac{E_B \, I}{k_s \, L_f^{\,4} \, B} = \frac{E_B}{12 \, k_s \, L_f} \left(\frac{d}{L_f} \right)^3 \tag{6.11}$$

Für Steifemodulverfahren:

$$K_s = \frac{E_B \, I}{E_s \, L_f^{\,3} \, B} = \frac{E_B}{12 \, E_s} \left(\frac{d}{L_f} \right)^3 \tag{6.12}$$

Hierin bedeuten:

K_c	Systemsteifigkeit beim Bettungsmodulverfahren	[-]
K_s	Systemsteifigkeit beim Steifemodulverfahren	[-]
E_B	Elastizitätsmodul des Balkenmaterials	[kN/m²]
I	$B \, d^3/12$ = Trägheitsmoment des Untergrunds des Balkenquerschnitts	[m^4]

Zur Berücksichtigung der Steifigkeit des Überbaues in den Gln. 6.11 und 6.12 wird das System Überbau und Fundament als eine Einheit betrachtet und mit einer ideellen Plattendicke d_i [m] berechnet. Die ideelle Plattendicke d_i [m] ist die Höhe eines Rechteckquerschnitts mit Breite B [m] und gleichem Trägheitsmoment I [m^4]. Das Trägheitsmoment I [m^4] in diesem Fall setzt sich aus der Biegesteifigkeit des gesamten Überbaus einschließlich des Fundaments zusammen, entsprechend Gl. 6.8.

$$d_i = \sqrt[3]{\frac{12 \, I}{B}} \tag{6.13}$$

Um außerdem den Einfluss des Überbaus auf das Fundament zu berücksichtigen, soll das Fundament mit einer ideellen Plattendicke d_i [m] statt der Originalplattendicke d [m] berechnet werden.

Erfahrungen, bei welchem Wert der Systemsteifigkeit zwischen Fundament und Untergrund von einer praktischen Starrheit gesprochen werden kann, liegen bereits vor: *Borowicka* (1939), *Graßhoff* (1987) und *Kany* (1974). Eine derartige Zusammenstellung ist beispielsweise in der Tabelle 6.1 der Erläuterungen zu *DIN* 4018 enthalten. Darüber hinausgehend werden neben dem praktisch starren

Fall auch verschiedene Grade der Steifigkeit genannt.

Eine praktische Bedeutung besitzt die Systemsteifigkeit außerdem bei der Entscheidung, ob ein Bauwerk bzw. schon sein Fundament als starr angenommen werden kann oder nicht. Im Falle starrer Fundamente bzw. starrer Bauwerke ergeben sich bei der Berechnung der Sohldruckverteilung in bestimmten Fällen Vereinfachungen. Beim Bettungsmodulverfahren geht der Sohldruck in die einfache Verteilung des Spannungstrapezverfahrens über. Beim Steifemodulverfahren kann für einfache Fundamentgrundrisse die Sohldruckverteilung nach den geschlossenen Formeln von *Boussinesq* (1885) berechnet werden. Auch sind für diesen Fall die Tabellen von *Kany* (1974) für den Sohldruck unter starren Fundamenten hilfreich.

Tabelle 6.1 Zahlenwerte für verschiedene Grade der Systemsteifigkeit

Bettungsmodulverfahren $K_{be} = 12\ K_c$ [1]	Steifemodulverfahren $K_{St} = 12\ K_s$ [1]	Bezeichnungen
$K_{Be} \geq 0.2$	$K_{St} \geq 1.0$	starr
$0.2 > K_{Be} \geq 0.08$	$1.0 > K_{St} \geq 0.4$	sehr steif
$0.08 > K_{Be} \geq 0.04$	$0.4 > K_{St} \geq 0.2$	mittelssteif
$0.04 > K_{Be} \geq 0.02$	$0.2 > K_{St} \geq 0.1$	steif
$0.02 > K_{Be} \geq 0.008$	$0.1 > K_{St} \geq 0.04$	weich
$0.008 > K_{Be} \geq 0.004$	$0.04 > K_{St} \geq 0.02$	mittelweich
$0.004 > K_{Be} \geq 0.002$	$0.02 > K_{St} \geq 0.01$	sehr weich
$0.002 > K_{Be}$	$0.01 > K_{st}$	schlaff

6.2.4 Modellierung von Wand-Decke-Überbau in der Plattenberechnung

In den meisten Entwurfsanwendungen wird nur die erhebliche zusätzliche Steifigkeit geliefert bei den Wänden (Scheiben). Hier ist es normalerweise ausreichend, die Wand und Deckenverbindungen durch Stabelemente, die mit der Mitte der Platte in den Grundrisspositionen verbunden sind, zu modellieren. Entsprechend geschätzten Messungen von Setzungen ist es normalerweise nur notwendig, ein oder zwei Stockwerke über den Decken zu betrachten.
Diese Steifigkeit kann ungefähr durch Definieren der mitwirkenden Wandabmessung bestimmt werden. Richtlinien zur Berechnung der mitwirkenden Plattenbreite b_{eff} [m] nach *Hemsley* (1998) werden im Bild 6.2 gegeben. Tabelle 6.2 zeigt auch die mitwirkenden Plattenbreiten für Innen- und Randwände. Diese mitwirkenden Plattenbreiten hängen davon ab, ob die Deckenplatten auf der Seite der Wand oder nur auf einer Seite durchlaufend sind. Plattenbreiten hängen auch vom Wandabstand B_w [m] und der Wandlänge L_w [m] ab. In der Berechnung werden die niedrigsten der drei Werte der Plattenbreite b_{eff} [m] in der Tabelle 6.2 verwendet.

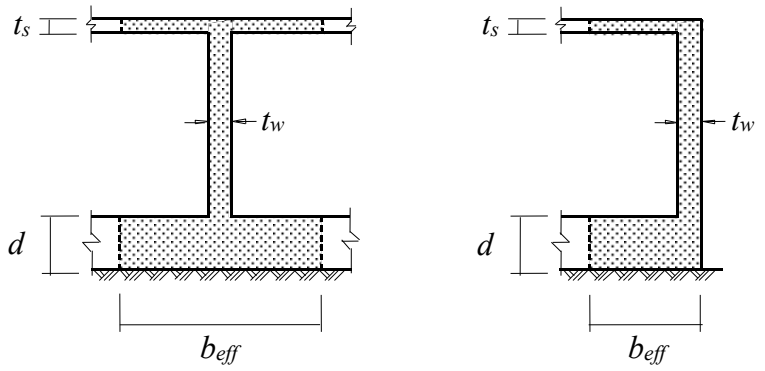


Bild 6.2 Mitwirkende Plattenbreiten für verwendete Stäbe zur Modellierung des Wand-Decke-Überbaus

Tabelle 6.2 Mitwirkende Plattenbreite der Wand (Dicke der Deckenplatte = t_s [m])

Lage der Wand	Mitwirkende Plattenbreite b_{eff} [m]		
Innenwand	$b_{eff} = t_w + 12\ t_s$	$b_{eff} = L_w / 3$	$b_{eff} = B_w$
Randwand	$b_{eff} = t_w + 4\ t_s$	$b_{eff} = L_w / 6$	$b_{eff} = B_w / 2$

6.2.5 Bestimmung der Ersatzwandhöhe

Um die Steifigkeit der Wand auf das FE-Netz durch Verwenden von zusätzlichen Stabelementen zu simulieren, müssen die tatsächlichen Eigenschaften der Stabelemente bestimmt werden. Die Steifigkeit der Wand kann erhalten werden durch Anordnung eines Ersatzbalkens in der mittleren Ebene der Platte. Die Abmessungen des Ersatzbalkens können genommen werden, wie im Bild 6.3 gezeigt. Zuerst erfolgt die Bestimmung des Trägheitsmoments des mitwirkenden Schnittes der Wand I_{pb} [m^4], die zwei Teile enthält (Plattenbreite und Steg). Dann kann die Ersatzhöhe des Stegs durch Gleichsetzen des Trägheitsmoments I_{pb} [m^4] mit zwei äquivalenten Trägheitsmomenten bestimmt werden. Dem ersten Trägheitsmoment entspricht eine rechteckige Breite I_p [m^4], während dem zweiten ein rechteckiger Steg I_w [m^4] entspricht. Die Ersatzhöhe des Stegs h_{Ers} [m] muss höher sein als die Summe der Plattendicke d [m] und Nettohöhe der Wand h_w [m]. Im FE-Modell werden die Wand und Deckenbreite von Stabelementen dargestellt mit der Eigenschaft von t_w [m] und h_{Ers} [m], während die Plattenbreite schon in die finiten Elemente der Platte einbezogen wird.

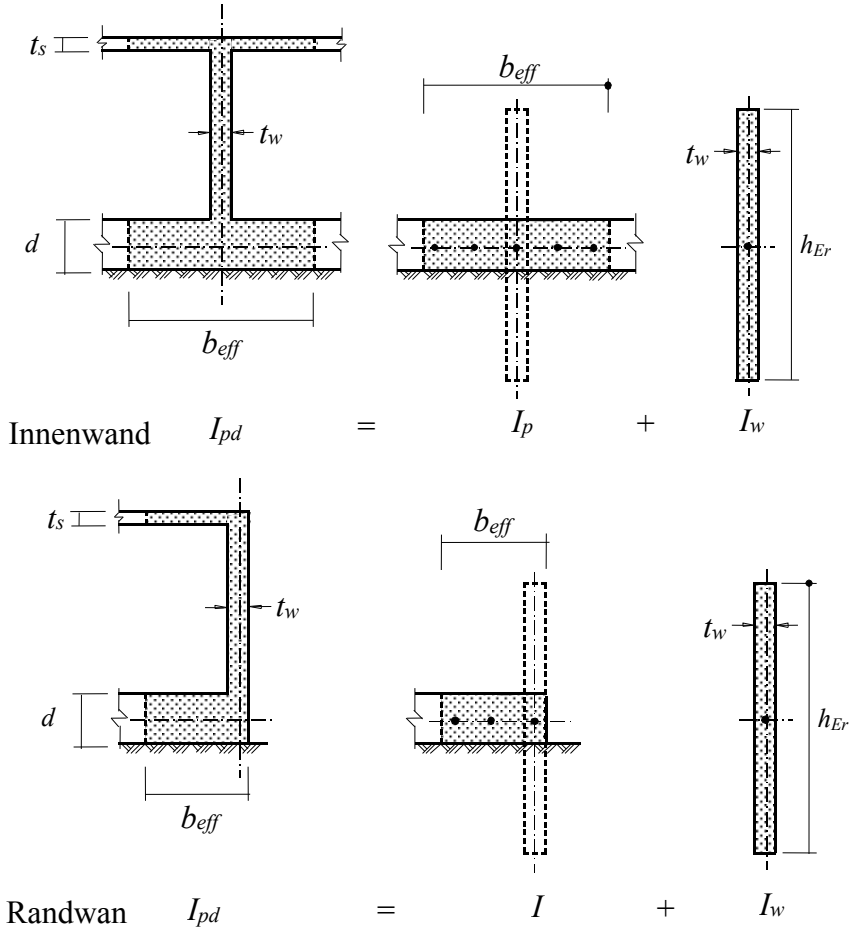


Bild 6.3 Bestimmen der Ersatzhöhe

6.3 Direkte Modellierung der Bauwerk/ Baugrund-Wechselwirkung

Zur Modellierung der Bauwerk/ Baugrund-Wechselwirkung kann die Steifigkeitsmatrix des ganzen Bauwerks aus der Summe der Steifigkeitsmatrizen des Überbaus, Fundaments und Untergrunds errechnet werden. Deshalb können die drei Teile als eine Einheit behandelt werden und zwar durch Berücksichtigung der Kompatibilität von Verformungen zwischen dem Überbau, dem Fundament und dem Untergrund. In diesem Fall ist die Verformung des Überbaus gleich der Verformung des Fundaments, und die Setzung des Bodens ist gleich der Verformung des Fundaments. Die Gleichgewichtsgleichung für das ganze Bauwerk (Überbau - Fundament - Untergrund) kann wie folgt in Matrixform geschrieben werden:

$$[K_t]\{U\} = \{F\} \tag{6.14}$$

wobei:
$[K_t]$ Gesamtsteifigkeitsmatrix des ganzen Bauwerks
$\{U\}$ Verformungsvektor des ganzen Bauwerks
$\{F\}$ Lastvektor des ganzen Bauwerks

Das Gleichungssystem 6.14 kann direkt mit dem *Gauß*schen Algorithmus gelöst werden. Zur Lösung der umfangreichen Gleichungssysteme ist ein Computer mit entsprechendem Speichervolumen erforderlich, weil der Rechenaufwand bei der direkten Analyse erheblich ist.

6.4 Modellierung der Bauwerk/ Baugrund-Wechselwirkung durch Iteration

Meistens wird bei der Interaktionsanalyse des Bauwerks eine Einheit für Rahmenstrukturen entwickelt. Eine genauere Modellierung für das Bauwerk ist möglich, wenn die Stützen, Scheiben, Decken und Fundamente als dreidimensionales Problem mit Benutzung von Plattenelementen und Stabelementen mit sechs Freiheitsgraden in jedem Knoten modelliert werden. Die sechs Freiheitsgrade bestehen aus drei Verschiebungen *u, v, w* und drei Verdrehungen θ_x, θ_y, θ_z. Die Anwendung dieser Methode zur Berechnung des Bauwerks ist wenig praxisnah, weil diese lange Zeit und große Speicherkapazität benötigt. Man erhält bei solchen Berechnungen eine große Gesamtmatrix für das Bauwerk. In vielen praktischen Fällen können aber Teile von Verschiebungen oder Verdrehungen unberücksichtigt bleiben. So werden zum Beispiel bei einem Bauwerk mit nur vertikalen Lasten und horizontalen Steifigkeiten der Decken und Fundamente keine horizontalen Verschiebungen oder Verdrehungen erwartet. Deshalb können die Horizontalspannungen und Verformungen unberücksichtigt bleiben. In diesem Fall wird die Größe der Steifigkeitsmatrix des Bauwerks erheblich reduziert, wenn eine geeignete Berechnung durchgeführt wird. Ein Beispiel für das Problem ist die Analyse von mehrstöckigen Gebäuden, wobei der Freiheitsgrad im Knoten eines Teilsystems sich unterscheidet von dem anderen. Bei Fundamentplatten und Decken hat jeder Knoten drei Freiheitsgrade: eine Verschiebung *w* und zwei Verdrehungen θ_x, θ_y. In Überbauteilen gibt es zwei Verschiebungen *u, v* in Scheiben, drei Verschiebungen *u, v, w* und drei Verdrehungen θ_x, θ_y, θ_z im räumlichen Stabwerk. Es gibt im Baugrund nur eine Verschiebung *w*. Ein Vorteil des in diesem Beitrag vorgeschlagenen Iterationsverfahrens ist die Möglichkeit, für Teilsysteme die Inkompatibilität im Freiheitsgrad überschreiten zu können. Bei Berücksichtigung der erforderlichen Verschiebungen und Verdrehungen während des Iterationsprozesses kann die Rechenzeit erheblich reduziert werden.

In diesem Beitrag wird eine genauere und schnelle Methode mit Benutzung eines Iterationsverfahrens zur Berechnung von Fundamenten mehrstöckiger Gebäude mit Einfluss der Bauwerkssteifigkeit beschrieben. Bei Benutzung dieses Iterationsverfahrens wird die Rechenzeit erheblich reduziert im Vergleich zu den konventionellen Analysen der Bauwerk/ Baugrund-Wechselwirkung. In dem Verfahren wird das Gesamtsystem Bauwerk/ Baugrund in drei Teilsysteme aufgeteilt. Die drei Teilsysteme Stützen, Decken und Fundament werden getrennt voneinander untersucht. Man braucht zwei getrennte Programme, ein Programm zur Berechnung von Plattendecken und Fundament, das zweite Programm zur Berechnung der Stützen. Die Steifigkeit jedes Teilsystems z.B. Decke oder Fundament, das mit den Stützen verbunden ist, wird durch Federkonstanten repräsentiert. Für diese Zwecke wurden zwei Computerprogramme entwickelt, ein Programm zur Berechnung von Deckenplatten und Fundamentplatten mit oder ohne Stäbe, das zweite Programm für die Berechnungen von räumlichem Stabwerk. Die zwei Programme sind Standard-FE- Lösungen für Plattenelemente- und Stabelemente-Typen.

6.4.1 Iterationsverfahren

Zur Erläuterung des Berechnungsverfahrens wird das Gesamtsystem von Stützen, Decken und Fundament gemäß Bild 6.4 (0) als ein typisches Beispiel betrachtet. Im Berechnungsverfahren

werden die Stützen, Decken und das Fundament getrennt voneinander ermittelt. Die Knoten für jedes Teilsystem werden auch getrennt nummeriert. Zur Berücksichtigung des Einflusses der Bauwerkssteifigkeit auf das Fundamentsystem wird das Iterationsverfahren wie folgt durchgeführt (Bild 6.4):

(1) Berechnung jeder Decke getrennt auf starren Lagern,
dann Ermittlung der Deckenreaktionen $\{R\}$ infolge Lasten für die Decke auf starren Lagern

$$\{R\}_i = \{R_x, R_y, R_z, RM_x, RM_y, RM_z\}^T_i \tag{6.15}$$

wobei $\{R\}_i$ der Vektor der Deckenreaktionen im Knoten i und R_x, R_y, R_z, RM_x, RM_y und RM_z die Reaktionskräfte und Momente in x-, y- und z- Richtung sind

(2) Aus den Deckenreaktionen $\{R\}$ nach (1) erfolgt die Berechnung des Stützenrahmens auf starren Lagern, danach die Ermittlung der Stützenreaktionen $\{V\}$

$$\{V\}_i = \{V_x, V_y, V_z, VM_x, VM_y, VM_z\}^T_i \tag{6.16}$$

wobei $\{V\}_i$ der Vektor der Stützenreaktionen im Knoten i und V_x, V_y, V_z, VM_x, VM_y und VM_z die Reaktionskräfte und Momente in x-, y- und z- Richtung sind

(3) Aus den Stützenreaktionen $\{V\}$ nach (2) erfolgt die Berechnung der zugehörigen Baugrund- und Fundamentverformungen $\{\delta_f\}$

$$\{\delta_f\}_i = \{u_f, v_f, w_f, \theta_{xf}, \theta_{yf}, \theta_{zf}\}^T_i \tag{6.17}$$

wobei $\{\delta_f\}_i$ der Vektor der Fundamentverformungen im Knoten i und u_f, v_f, w_f, θ_{xf}, θ_{yf} und θ_{zf} die Verschiebungen und Verdrehungen in x-, y- und z- Richtung sind

(4) Mit den Fundamentverformungen $\{\delta_f\}$ nach (3) kann die Steifigkeit des Fundaments unter den Stützen ermittelt werden. Das geschieht durch Ermittlung einer Gruppe von Federkonstanten $\{k_f\}$, um die Fundamentsteifigkeit unter den Stützen darzustellen

$$\begin{aligned}\{k_f\}_i &= \{k_{uf}, k_{vf}, k_{wf}, k_{\theta xf}, k_{\theta yf}, k_{\theta zf}\}^T_i \\ &= \left\{\frac{V_x}{u_f}, \frac{V_y}{v_f}, \frac{V_z}{w_f}, \frac{VM_x}{\theta_{xf}}, \frac{VM_y}{\theta_{yf}}, \frac{VM_z}{\theta_{zf}}\right\}^T_i\end{aligned} \tag{6.18}$$

Hierbei sind k_{uf}, k_{vf}, k_{wf} Senkfedersteifigkeiten in x-, y- und z- Richtung,
$k_{\theta xf}$, $k_{\theta yf}$ und $k_{\theta zf}$ sind Drehfedersteifigkeiten in x-, y- und z- Richtung

Aus den Deckenreaktionen $\{R\}$ nach (1) wird der Stützenrahmen auf die Federlagerung $\{k_f\}$ getrennt berechnet. Danach erfolgt die Ermittlung der Stützenverformungen $\{\delta_c\}$

$$\{\delta_c\}_i = \{u_c, v_c, w_c, \theta_{xc}, \theta_{yc}, \theta_{zc}\}^T_i \tag{6.19}$$

wobei $\{\delta_c\}_i$ die Vektoren der Stützenverformungen im Knoten i sind. Ferner sind u_f, v_f, w_f, θ_{xf}, θ_{yf} und θ_{zf} die Verschiebungen und Verdrehungen in x-, y- und z- Richtung

(5) Mit den Stützenverformungen $\{\delta_c\}$ nach (4) können die Steifigkeiten der Stützen unter der Deckenposition ermittelt werden. Diese werden durch Ermittlung einer Gruppe von Federkonstanten $\{k_s\}$ um die Stützensteifigkeiten dargestellt:

$$\begin{aligned}\left\{ k_c \right\}_i &= \left\{ k_{uc} , k_{vc} , k_{wc} , k_{\theta xc} , k_{\theta yc} , k_{\theta zc} \right\}^T{}_i \\ &= \left\{ \frac{R_x}{u_c}, \frac{R_y}{v_c}, \frac{R_z}{w_c}, \frac{RM_x}{\theta_{xc}}, \frac{RM_y}{\theta_{yc}}, \frac{RM_z}{\theta_{zc}} \right\}^T{}_i \end{aligned} \tag{6.20}$$

Hierbei sind k_{uc}, k_{vc}, k_{wc} die Senkfedersteifigkeiten in *x*-, *y*- und *z*- Richtung.
Ferner sind $k_{\theta xc}$, $k_{\theta yc}$ und $k_{\theta zc}$ die Drehfedersteifigkeiten in *x*-, *y*- und *z*- Richtung

Die Decken werden auf Federlagern $\{k_s\}$ getrennt berechnet. Danach erfolgt die Ermittlung der Deckenverformungen $\{\delta_c\}$

$$\left\{ \delta_s \right\}_i = \left\{ u_s , v_s , w_s , \theta_{xs} , \theta_{ys} , \theta_{zs} \right\}^T{}_i \tag{6.21}$$

$\{\delta_s\}_i$ ist der Vektor der Deckenverformungen im Knoten *i* und u_s, v_s, w_s, θ_{xs}, θ_{ys} und θ_{zs} sind die Verschiebungen und Verdrehungen in *x*-, *y*- und *z*- Richtung. Berechnung der neuen Deckenreaktionen $\{R\}$ aus den Federkonstanten $\{k_s\}$:

$$\begin{aligned}\left\{ R \right\}_i &= \left\{ k_{uc}\, u_s , k_{vc}\, v_s , k_{wc}\, w_s , k_{\theta xc}\, \theta_{xs} , k_{\theta yc}\, \theta_{ys} , k_{\theta zc}\, \theta_{xs} \right\}^T{}_i \\ &= \left\{ R_x , R_y , R_z , RM_x , RM_y , RM_z \right\}^T{}_i \end{aligned} \tag{6.22}$$

(6) Aus den Deckenreaktionen $\{R\}$ nach (5) Ermittlung der Stützenreaktionen $\{V\}$ bei Berechnung der Stützenrahmen getrennt für die in (3) ermittelten $\{\delta_f\}$ Lagerverformungen

(7) Aus den Stützenreaktionen $\{V\}$ nach (6) Berechnung der zugehörigen Baugrund- und Fundamentverformungen $\{\delta_f\}$

Die Schritte (4) bis (7) müssen in einem Iterationsverfahren so lange durchlaufen werden, bis die Verformungen der Stützen in den Knoten mit den zugehörigen Verformungen der Decken und auch des Fundaments übereinstimmen.

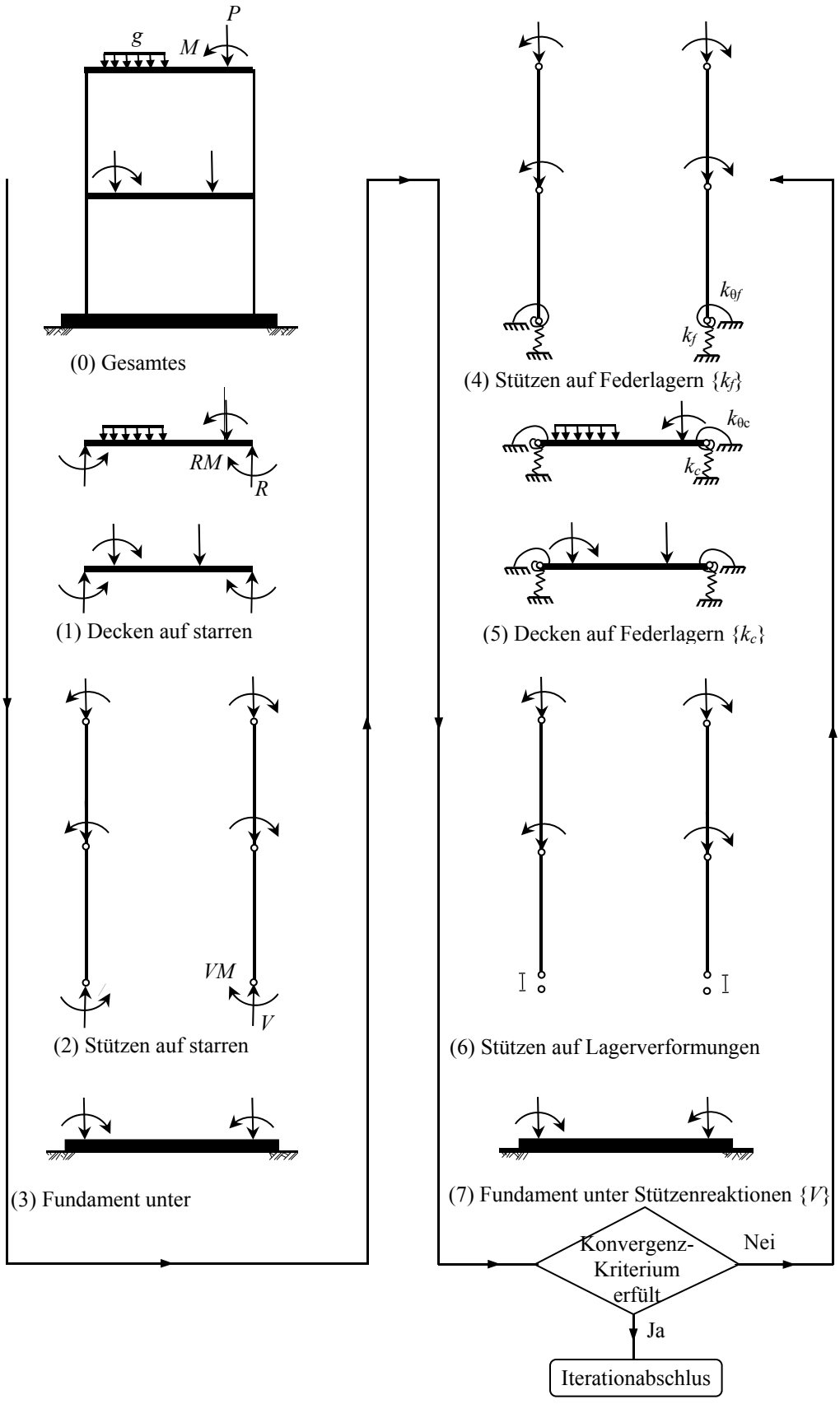


Bild 6.4 Interaktion des Überbaus und des Fundaments durch Iteration

6.4.2 Nichtlineares mathematisches Baugrundmodell

Ein mathematisches Modell für Gründungsplatten auf nichtlinearem Baugrund mit dem Bettungsmodulverfahren wird bei *Baz* (1987) und *Hasnien* (1993) gezeigt. Dieses Modell wird auch hier für die Berechnung von Fundamenten mit Einfluss der Bauwerkssteifigkeit gewählt. In diesem mathematischen Modell wird der Baugrund durch eine infinite Anzahl von Federn mit nichtlinearer Beziehung zwischen Sohldruck und Setzung der Feder dargestellt. Damit kann man das nichtlineare Verhalten der Beziehung der Sohldruck-Setzung unter dem Fundament bei Gl. 6.23 analog der Hyperbelfunktion und die Spannung-Dehnung-Beziehung des Bodens erfassen:

$$q_i = \frac{w_i}{\frac{1}{k_t} + \frac{w_i}{q_{ult}}} \tag{6.23}$$

Darin ist q_i [kN/m^2] der Sohldruck im Knoten i und w_i [m] ist die Setzung im Knoten i, k_t [kN/m^3] bei Anfangsbettung. Ferner ist q_{ult} [kN/m^2] der Sohldruck beim Grundbruch des Bodens.

Die Erweiterung dieses nichtlinearen Baugrundmodells wird in diesem Beitrag erläutert, um das nichtlineare Verhalten beim Steifemodulverfahren zu erfassen. In diesem Fall wird die Anfangsbettung durch Variable aus linearer Berechnung von Fundamenten nach dem Steifemodulverfahren angenommen (Gl. 6.24):

$$k_{ti} = \frac{q_{li}}{w_{li}} \tag{6.24}$$

k_{ti} [kN/m^3] ist die Anfangsbettung im Knoten i, q_{li} [kN/m^2] und w_{li} [m] sind die linearen Sohldrücke und Setzungen im Knoten i.

Das lineare Verhalten des Bodens wird sowohl im Bettungsmodulverfahren als auch im Steifemodulverfahren durch Iteration erfasst, und zwar wie folgt (Bild 6.5):

- Beim Iterationsschritt (j) ist der nichtlineare Sohldruck q_i im Knoten i:

$$q_i^{(j)} = k_{si}^{(j)}\, w_i^{(j)} \tag{6.25}$$

  k_{si} ist der Bettungsmodul im Knoten i. Er ist gleich der Anfangsbettung k_{ti} im ersten Iterationsschritt

- Beim nächsten Iterationsschritt (j+1) wird der Bettungsmodul k_{si} modifiziert durch Gl. 6.23:

$$k_{si}^{(j+1)} = \frac{1}{\frac{1}{k_{ti}} + \frac{w_i^{(j)}}{q_{ult}}} \tag{6.26}$$

Diese Schritte sind so lange zu wiederholen, bis die gewünschte Genauigkeit ε zwischen dem nichtlinearen Sohldruck q_i im Iterationsschritt (j) und im früheren Iterationsschritt (j-1) erreicht ist.

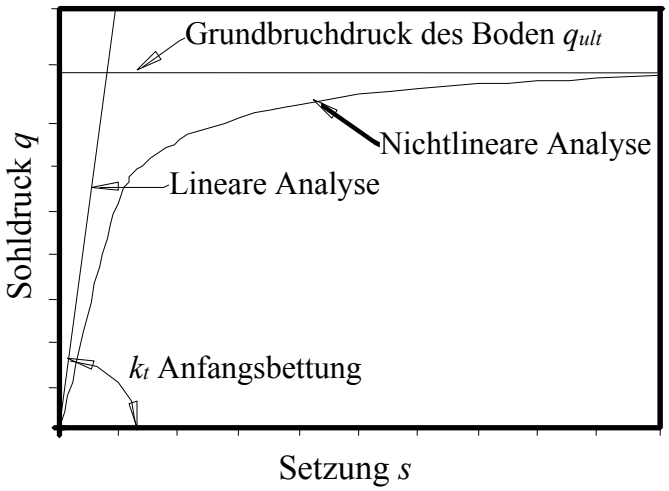


Bild 6.5 Sohldruck-Setzung-Diagramm, lineare und nichtlineare Berechnung

Beispiel 6.1 Berechnung der Gründungsplatte eines Hochhauses

1 Aufgabenstellung

In diesem Beispiel wird der Einfluss der Biegesteifigkeit des Überbaues auf die Setzungen und Sohldrücke der Gründungsplatte eines Hochhauses untersucht.

Es soll die Gründungsplatte des in Bild 6.6 in 3 Schnitten vereinfacht dargestellten Bauwerks berechnet werden. Es handelt sich um einen Stahlbetonskelettbau mit Keller und 13 Geschossen (Geschosshöhe 3 [m]) bei 18 Feldern mit je 3.6 [m] Stützenabstand. Die gesamte Bauwerkslänge beträgt 66 [m], die Gesamtbreite des Kellerfußbodens 17.55 [m]. Die Plattendicke ist 1.2 [m]. In den nachfolgenden Untersuchungen soll die Gründungsplatte unter Berücksichtigung der Untergrundverhältnisse ermittelt und eine vorläufige Abschätzung der Bauwerksverformungen vorgenommen werden. Es folgt dann die Berechnung der Setzungen und Sohldrücke, wobei Vergleichsberechnungen für vier Fälle durchgeführt werden:

1) Für die nicht ausgesteifte Sohlplatte
2) Für das Verbundsystem Sohlplatte-Keller
3) Für das Verbundsystem Sohlplatte-Keller-Hochbau
4) Für die völlig starre Sohlplatte

Die Eigensteifigkeit des Bauwerksystems in Längsrichtung ist aus den Zahlenangaben der Bilder 6.6 und 6.7 zu berechnen.

2 Untergrund

Nach dem in Bild 6.7 dargestellten Schichtenbild besteht der Untergrund bis in 11.6 [m] Tiefe unter Gelände aus einer sandigen Tonschicht mit einem Steifemodul E_s = 14 000 [kN/m^2]. Unter der sandigen Tonschicht steht in 11.60 [m] Tiefe praktisch unnachgiebiger Sandsteinfels in großer Mächtigkeit an. Die Setzungsanteile aus der Wiederbelastung des Bodens werden vernachlässigt. Die Gründungstiefe unter der ursprünglichen Geländehöhe beträgt 3.80 [m]. Als Baugrundmodell wird das Steifemodulverfahren verwendet.

3 Materialkennwerte des Betons

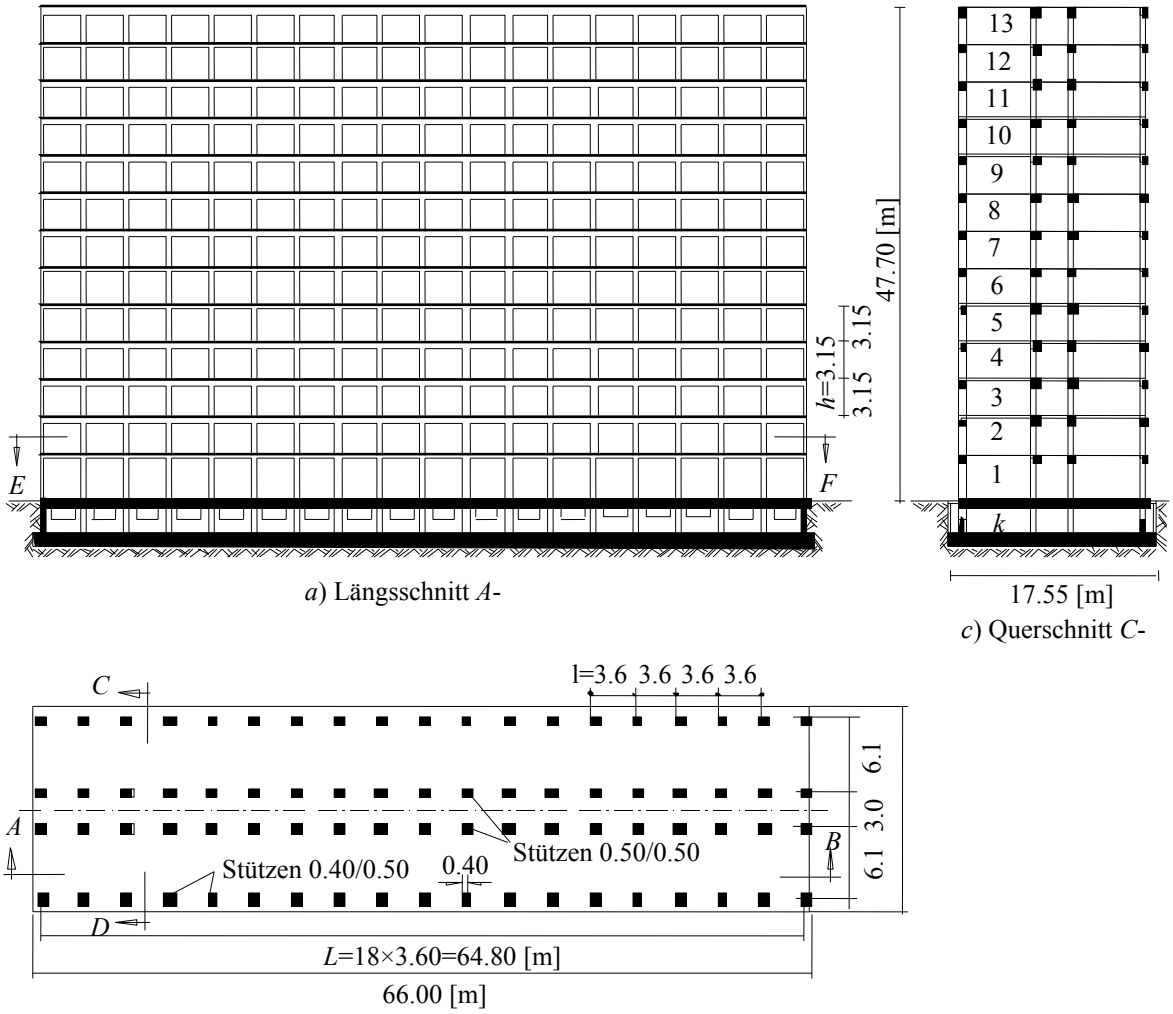
Für das Bauwerksmaterial gilt:

Elastizitätsmodul	E_b	$= 2.1 \times 10^7$	[kN/m^2]
*Poisson*zahl	ν_b	$= 0.25$	[-]
Wichte	γ_b	$= 0.0$	[kN/m^3]

Das Eigengewicht wird in diesem Beispiel vernachlässigt.

4 Lasten

Laut statischer Berechnung des aufgehenden Bauwerks ergeben sich bei der vorläufigen Annahme starrer Auflagerung des aufgehenden Bauwerks auf den Gründungskörper für die zweimal 17 Stützen der Außenwände je 2700 [kN] Stützenlast und für die zweimal 17 Stützen seitlich des Mittelganges je 2500 [kN] Belastung auf den Gründungskörper. Für die vier Eckenstützen ergeben sich je 1350 [kN], für vier Randstützen je 1250 [kN] Stützenlast. Die Lasten mit FE-Netz der Platte werden im Bild 6.8 gezeigt.



a) Längsschnitt *A*-

c) Querschnitt *C*-

b) Grundriss (Schnitt *E*-*F*)

Bild 6.6 Darstellung der Bauwerksverhältnisse

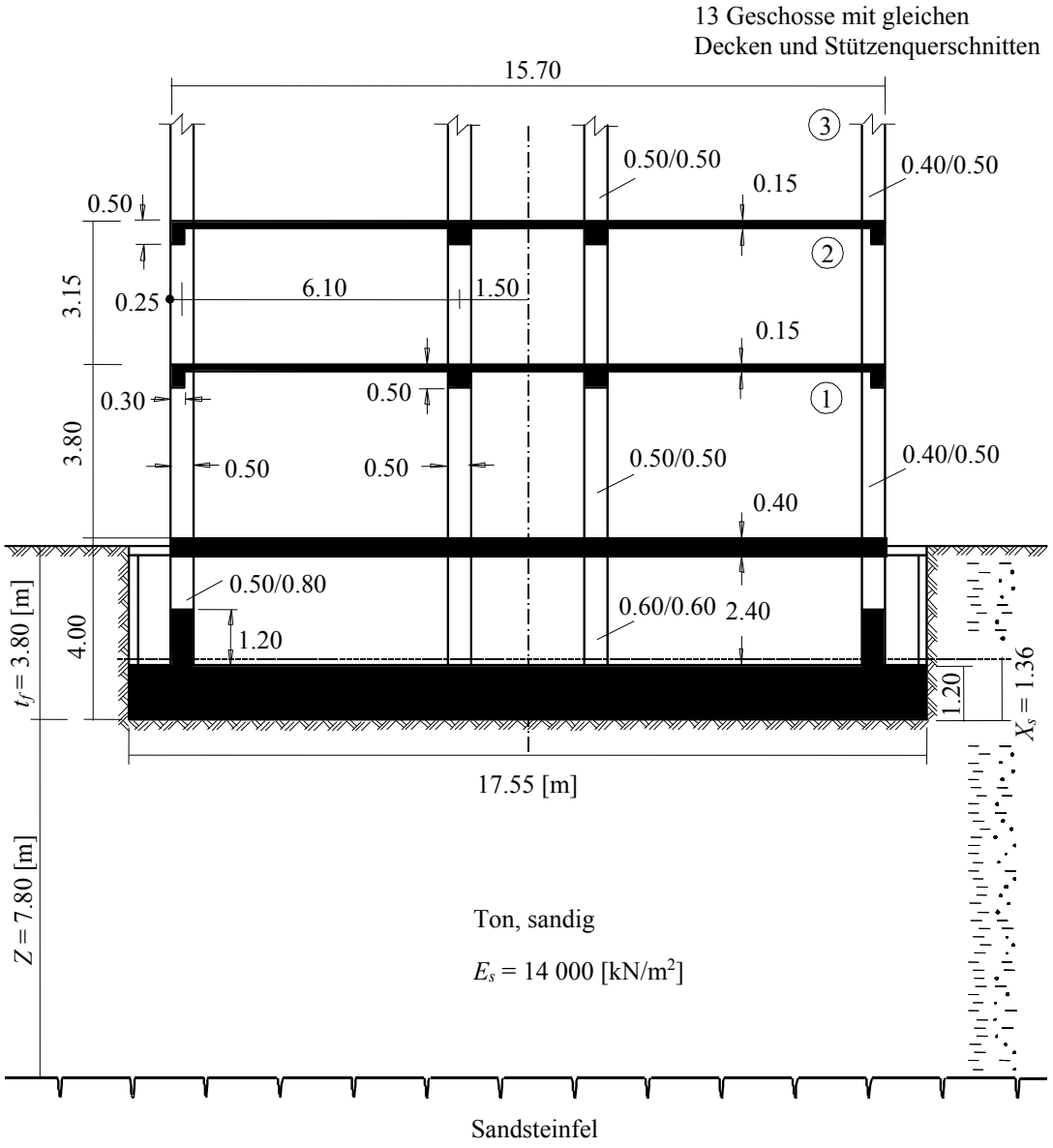


Bild 6.7 Untergrundverhältnisse und Abmessungen des Fundamentkörpers der Decken und Stützen (Querschnitte)

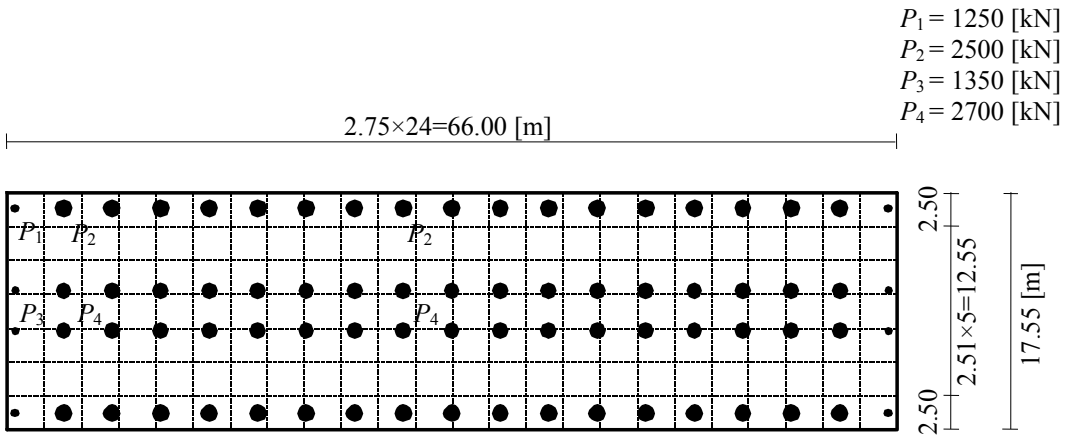


Bild 6.8 FE-Netz der Platte mit Lasten

5 Lösung der Aufgabe

5.1 Berechnung für die nicht ausgesteifte Sohlplatte

Werden zunächst die Setzungen und Sohldrücke unter der Voraussetzung berechnet, dass außer der Eigensteifigkeit der Sohlplatte (Dicke $d = 1.2$ [m]) keine anderweitige Aussteifung wirksam ist, so erhält man die Biegesteifigkeit der Platte aus K_G:

$$K_G = E_G\, I_G = E_G\, \frac{B\, d^3}{12} = 2.1\times 10^7\, \frac{17.55\,(1.2)^3}{12} = 5.31\times 10^7\ [\mathrm{kN/m^3}]$$

und Systemsteifigkeit K_{st}

$$K_{st} = 12\, K_s = \frac{E_b}{E_s}\left(\frac{d}{L_f}\right)^3 = \frac{2.1\times 10^7}{14000}\left(\frac{1.2}{66}\right)^3 = 0.009\,[\text{-}]$$

Die Platte ist schlaff nach Tabelle 6.1, $0.01 > K_{st}$.

5.2 Berechnung für das Verbundsystem Sohlplatte-Keller

Die Voraussetzung, dass die Sohlplatte, die Kellerwände und die Kellerdecke einen biegesteif verbundenen Querschnitt darstellen, ist bei entsprechender Ausbildung und Bewehrung des Kellersystems und starrer Verbindung mit der Fundamentplatte erfüllt. Legt man den in Bild 6.7 dargestellten Querschnitt der folgenden Berechnung zugrunde, so erhält man für diesen Gründungskörper folgende Höhe x_s der waagerechten Schwerlinie:

$$x_s = \frac{\sum F_i\, x_i}{\sum F_i} = \frac{(17.55\times 1.2\times 0.6)+(2\times 0.5\times 1.2\times 1.8)+(0.4\times 15.7\times 3.8)}{(17.55\times 1.2)+(2\times 0.5\times 1.2)+(0.4\times 15.7)} = 1.36\,[\mathrm{m}]$$

Damit ergibt sich als Trägheitsmoment I_G des Gründungssystems nach dem *Steiner*schen Satz:

$$I_G = \left(\frac{17.55 \times (1.2)^3}{12} + 17.55 \times 1.2 \times (0.76)^2 \right) + 2 \left(\frac{0.5 \times (1.2)^3}{12} + 0.5 \times 1.2 \times (0.44)^2 \right)$$
$$+ \left(\frac{15.70 \times (0.4)^3}{12} + 15.7 \times 0.4 \times (2.44)^2 \right) = 52.54 \, [\mathrm{m}^4]$$

Damit ist die Bauwerkssteifigkeit K_G:

$$K_G = E_G \, I_G = 2.1 \times 10^7 \times 52.4 = 110.33 \times 10^7 \, [\mathrm{kN/m}^3]$$

Die ideelle Plattendicke d_i ist dann:

$$d_i = \sqrt[3]{\frac{12\,I}{B}} = \sqrt[3]{\frac{12 \times 52.54}{17.55}} = 3.3 \, [\mathrm{m}]$$

und Systemsteifigkeit K_{st}

$$K_{st} = 12\,K_s = \frac{E_b}{E_s} \left(\frac{d}{L_f} \right)^3 = \frac{2.1 \times 10^7}{14000} \left(\frac{3.3}{66} \right)^3 = 0.1875 \, [\text{-}]$$

Die Platte ist steif nach Tabelle 6.1, $0.2 > K_{St} \geq 0.1$.

5.3 Berechnung für das Verbundsystem Sohlplatte-Keller-Hochbau

Dieses Bauwerkssystem besteht aus dem unter Ziffer 5.2 berechneten System Sohlplatte-Keller, auf das der aufgehende Hochbau (13 Stockwerke, 18 Felder) statisch unbestimmt aufgelagert ist. Dadurch wird er einerseits zur Fortleitung der Querkräfte hinzugezogen und bewirkt andererseits eine zusätzliche Versteifung des Systems in der Längsrichtung. Dieser Einfluss soll in den nachfolgenden Berechnungen untersucht werden.

Es wird angenommen, dass nur die Rahmenwirkung der Stockwerkrahmen wirksam ist und ein wesentlicher Beitrag der Füllwände zur Aussteifung nicht besteht. Zunächst werden die Steifigkeitszahlen K der Decke und Stützen bestimmt:

Trägheitsmoment der Decke I_r

Nach *Beton-Kalender* (1957), Seite 47 oder *El Behairy* (1992), Seite 17 erhält man:

$$\frac{\sum b_o}{b} = \frac{2\,(0.3 + 0.5)}{15.7} = \frac{1.6}{15.7} = 0.102,$$
$$\frac{d}{d_o} = \frac{0.15}{0.5} = 0.3,$$
$$\mu = 0.0193$$
$$I_r = \mu \, b \, d_o^{\,3} = 0.0193 \times 15.7 \times (0.5)^3 = 0.0379 \, [\mathrm{m}^3]$$

Mittlere Biegesteifigkeit der Decke K_r

$$K_r = \frac{I_r}{l} = \frac{0.0379}{3.6} = 0.01053[\mathrm{m}^3]$$

Trägheitsmoment der Stützen I_s

Die Stützen sind 2 Mittelstützen mit Querschnitt 0.5 × 0.5 [m] und 2 Außenstützen mit Querschnitt 0.5 × 0.4 [m].

$$I_s = 2\left(\frac{0.5\times 0.5^3}{12} + \frac{0.5\times 0.4^3}{12}\right) = 0.01575[\mathrm{m}^4]$$

Mittlere Steifigkeit der Stützen K_s

$$K_s = \frac{I_s}{h} = \frac{0.01575}{3.15} = 0.005[\mathrm{m}^3]$$

Da alle Decken und Stützen gleiche Querschnitte haben sollen, erhält man als wirksames Trägheitsmoment I_B des Stockwerkrahmens nach *Meyerhof* (1953):

$$I_B = I_r\, n_s\, n_s^{\,2}\, \frac{2\,K_s}{K_r + 2\,K_s} = 0.0379\times 13\times 18^2\, \frac{2\times 0.005}{0.01053 + 2\times 0.005} = 77.76[\mathrm{m}^4]$$

Biegesteifigkeit des Überbaus K_B

$$K_B = E_B\, I_B = 2.1\times 10^7 \times 77.76 = 163.29\times 10^7\ [\mathrm{kN/m}^3]$$

Biegesteifigkeit des gesamten Bauwerks K_b

$$K_b = K_G + K_B = 110.33\times 10^7 + 163.29\times 10^7 = 273.62\times 10^7\ [\mathrm{kN/m}^3]$$

Ideelles Trägheitsmoment des Bauwerks I

$$I = \frac{K_b}{E_b} = \frac{273.62\times 10^7}{2.1\times 10^7} = 130.3[\mathrm{m}^4]$$

Ideelle Plattendicke d_i

$$d_i = \sqrt[3]{\frac{12\,I}{B}} = \sqrt[3]{\frac{12\times 130.3}{17.55}} = 4.46[\mathrm{m}]$$

und Systemsteifigkeit K_{st}

$$K_{st} = 12\,K_s = \frac{E_b}{E_s}\left(\frac{d}{L_f}\right)^3 = \frac{2.1\times 10^7}{14000}\left(\frac{4.46}{66}\right)^3 = 0.463[\text{-}]$$

Die Platte ist sehr steif nach Tabelle 6.1, $1.0 > K_{St} \geq 0.4$.

5.4 Berechnung für die völlig starre Platte

Zur Abschätzung des Einflusses der Versteifung durch das Bauwerk wird nun der Extremwert der Steifigkeit, die völlig starre Sohlplatte berechnet. Für diese ist die Plattendicke $d = \infty$, während die Biegesteifigkeit der Platte $K_G = \infty$ ist.

Die Ergebnisse sind in den Bildern 6.6 und 6.10 als Setzungen und Sohldrücke dargestellt. Die Setzungen und Sohldrücke werden mit ideeller Plattendicke d_i gerechnet. Ferner werden nachfolgend die Ergebnisse zu Beispiel 6.1 in Tabellenform wiedergegeben. Die Ergebnisse der Bauwerkssteifigkeit für 4 unterschiedliche Berechnungen werden in Tabelle 6.3 gezeigt, so dass man die Unterschiede gut erkennen kann.

6 Schlussfolgerungen

Die Untersuchungen zeigen, dass die Ergebnisse mit dem Einfluss der Bauwerksteifigkeit anders sind. Im Übrigen zeigt das Zahlenbeispiel einen Weg, wie man auch bei komplizierteren Bauwerkssystemen die Setzungen und Sohldruckaufnahme auf den Untergrund berechnen kann.

Tabelle 6.3 Ergebnisse der Bauwerkssteifigkeit für 4 unterschiedliche Berechnungen

Berechnung	Trägheits-moment I [m^4]	Biege-steifigkeit $K = E_b I$ [kN/m^3]	ideelle Plattendicke d_i [m]	System-steifigkeit K_{st} [1]	Grad der System-steifigkeit
nicht ausgesteifte Sohlplatte	2.53	5.31×10^7	1.20	0.009	schlaff $0.01 > K_{st}$
Verbundsystem Sohlplatte-Keller	52.54	110.33×10^7	3.30	0.1875	steif $0.2 > K_{St} \geq 0.1$
Verbundsystem Sohlplatte-Keller-Hochbau	130.30	273.62×10^7	4.46	0.463	sehr steif $1.0 > K_{St} \geq 0.4$
völlig starre Sohlplatte	∞	∞	∞	∞	starr $K_{St} \geq 1.0$

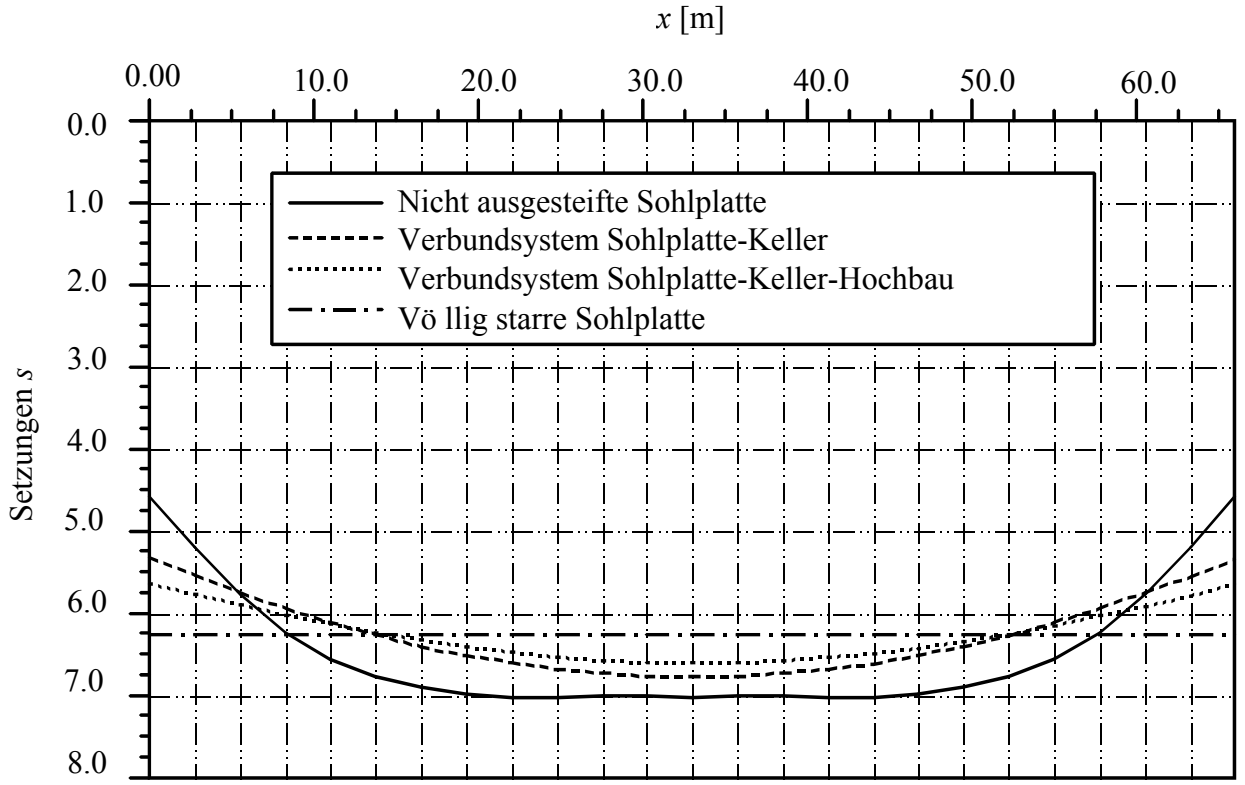


Bild 6.9 Setzungen s [cm] in Längsrichtung in der Mitte des Bauwerks

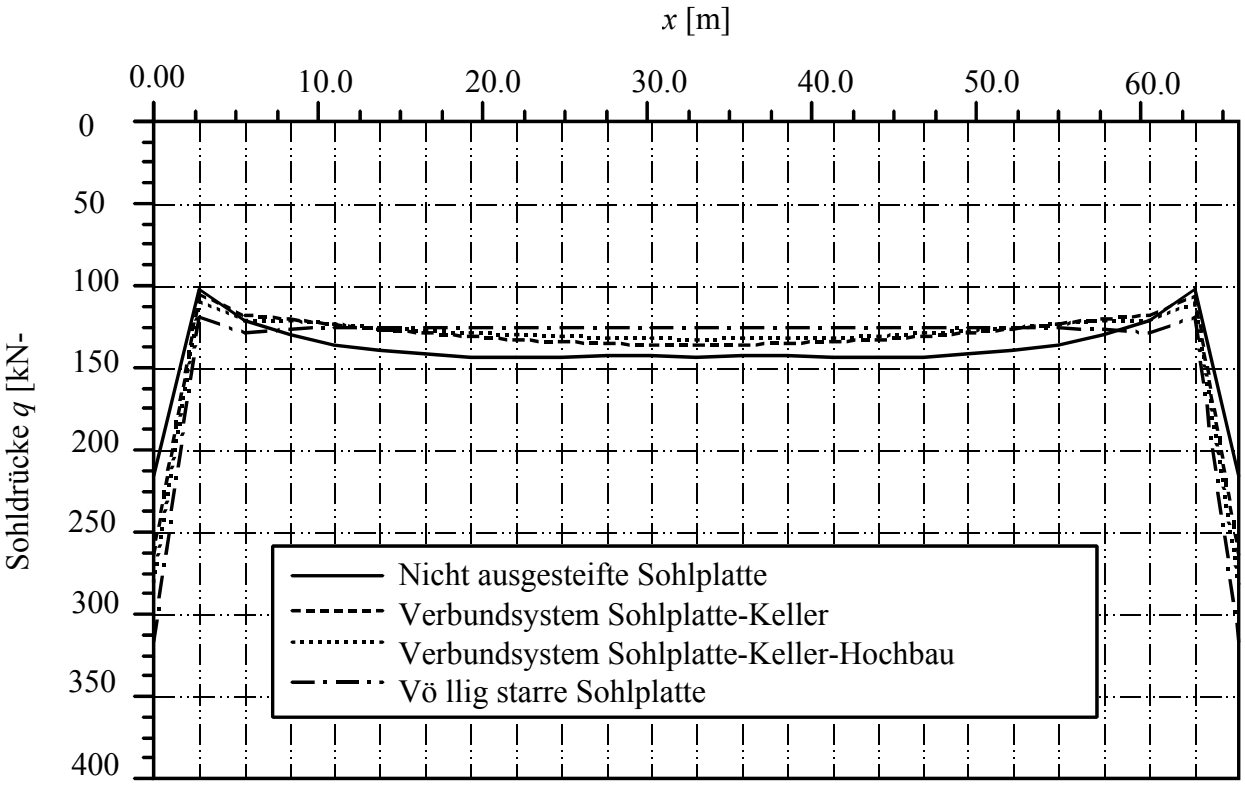


Bild 6.10 Sohldrücke q [kN/m^2] in Längsrichtung in der Mitte des Bauwerks

Beispiel 6.2 Überprüfung des Iterationsverfahrens

1 Aufgabenstellung

Zur Überprüfung des Iterationsverfahrens und Wertung seiner Genauigkeit wird ein fünfstöckiges Gebäude mit 36 Stützen auf einem Fundament behandelt. Das Gebäude hat ein regelmäßiges Stützenraster in *x*- und *y*- Richtung (Raster in 5.0 [m] Länge). Mit Ausnahme der Höhe des ersten Stockwerks von 4.0 [m] sind die Höhen der anderen Stockwerke = 3.0 [m]. Die typische Decke der fünf Stockwerke weist Skew-Panelled Stäbe auf, wie im Bild 6.11 dargestellt. Größe und Lasten der Deckenstäbe werden in der Tabelle 6.4 gezeigt. Fundament ist ein Trägerrost mit 0.5 [m] Dicke und 2.5 [m] Breite, Bild 6.12. Die Stützen sind quadratisch, die Stützenquerschnitte und Größen für jedes Stockwerk sind in der Tabelle 6.5 gezeigt.

Materialkennwerte des Betons sind:

Elastizitätsmodul	$E_b =$	3×10^7	[kN/m^2]
*Poisson*zahl	$\nu_b =$	0.15	[-]
Schubmodul	$G_b =$	1.3×10^7	[kN/m^2]

Der Baugrund unter dem Fundament wird als *Winkler*-Modell idealisiert. Der Bettungsmodul des Boden beträgt $k_s = 40000$ [kN/m^3].

Tabelle 6.4 Größe und Belastung der Deckenstäbe

Stabtyp	Größe		Last [kN/m]
	Dicke [m]	Breite [m]	
Außenstab B1	0.50	0.25	15
Innenstab B2	0.70	0.25	30

Tabelle 6.5 Stützenquerschnitte

Stock	Stützenquerschnitte [m×m]		
	Modell C1	Modell C2	Modell C3
1. und 2. Stock	0.40 × 0.40	0.50 × 0.50	0.60 × 0.60
3. und 4. Stock	0.30 × 0.30	0.40 × 0.40	0.50 × 0.50
5. Stock	0.25 × 0.25	0.30 × 0.30	0.40 × 0.40

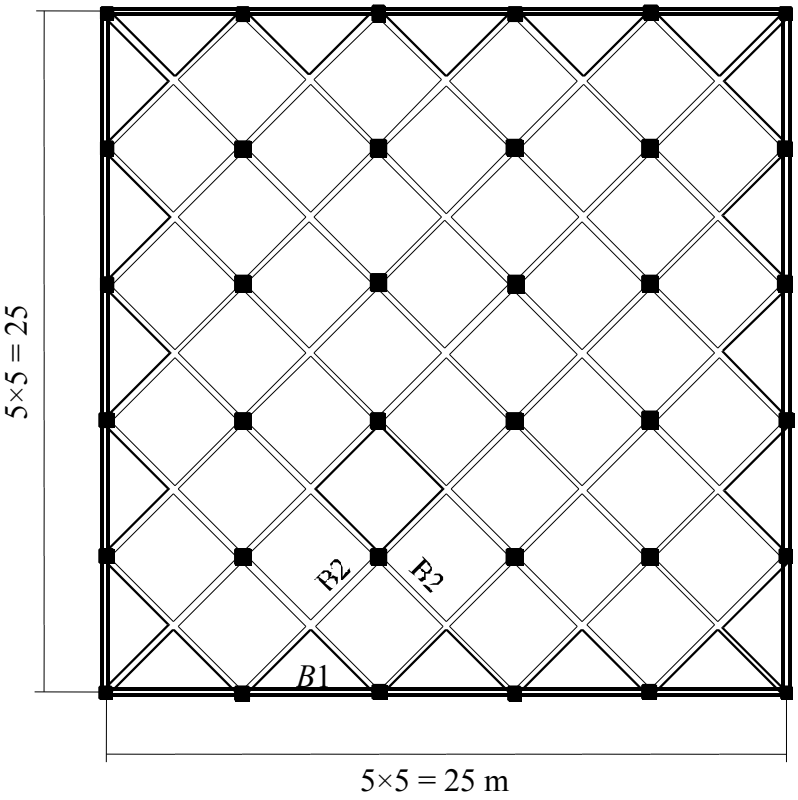


Bild 6.11 Typische Decke im Grundriss (Skew-Panelled Stäbe)

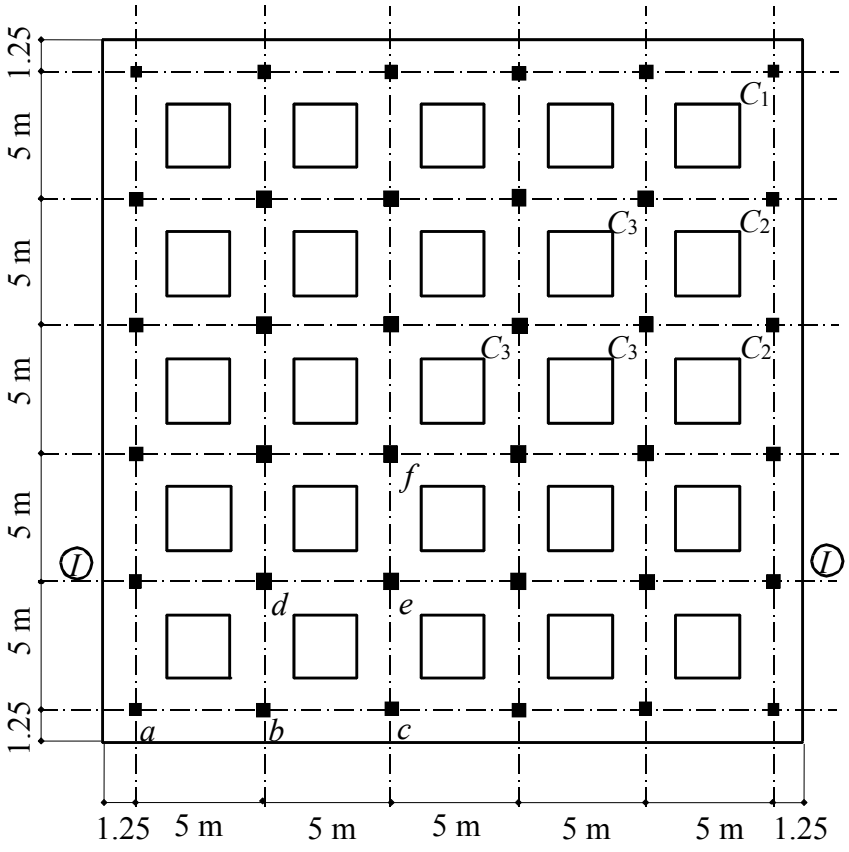


Bild 6.12 Grundriss des Fundaments mit Stützen

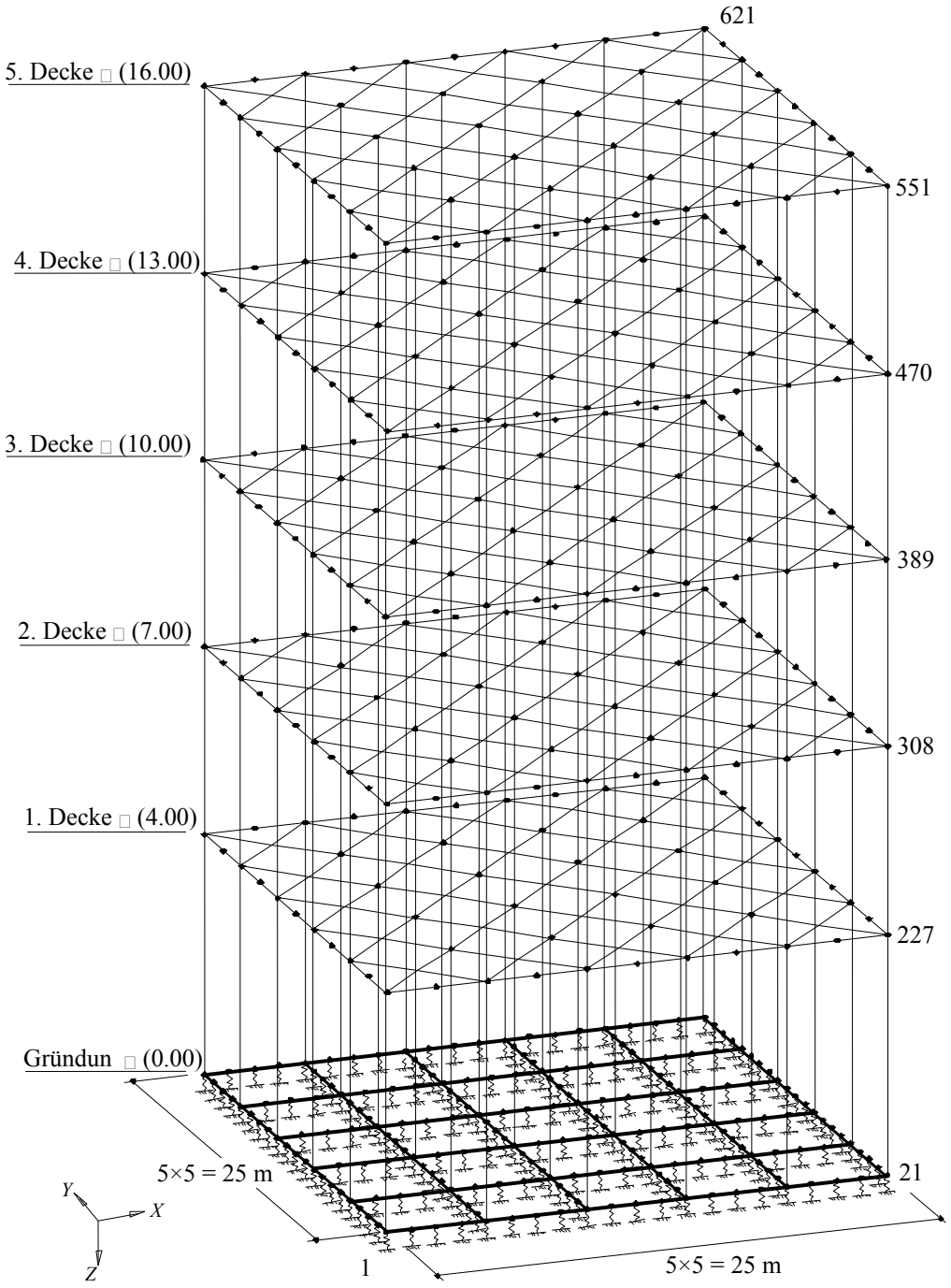


Bild 6.13 Statisches System des räumlichen Stabwerks mit Fundament auf elastischen Federn

2 Berechnung

Zum Vergleich zwischen den Ergebnissen der Bauwerksanalyse bei Anwendung des vorgeschlagenen Iterationsverfahrens mit konventionellen Methoden ohne Iteration wird das Bauwerk als räumliches Stabwerk auf Trägerrost modelliert, das auf elastischen Federn ruht. Elementtyp für Tragwerk und Fundament sind Stabelemente, wie im Bild 6.13 dargestellt.

Für die Berechnung mit konventioneller Methode ohne Iteration wird das Bauwerk in 1120 räumliche Stabelemente mit 621 Knoten unterteilt. Jeder Knoten hat sechs Unbekannte. Daraus ergibt sich ein Gleichungssystem mit 3726 Gleichungen. Für die Berechnung mit dem vorgeschlagenen Iterationsverfahren wird das Bauwerk in drei Teile aufgeteilt: Decken, Stabwerk (Stützen) und Fundament. Die Anzahl der Elemente für Decke, Stabwerk und Fundament sind 140, 180 und 240. Daraus ergeben sich 81, 216 und 216 Knoten für Decke, Stabwerk und Fundament. Weil auf das Bauwerk symmetrische vertikale Lasten einwirken, wird der Einfluss der horizontalen Lasten nicht berücksichtigt. Deshalb werden die horizontalen Verschiebungen *u, w* und Spannungen für die Decken in der Berechnung nicht untersucht.

Bei der Berechnung mit der konventionellen Methode wird ein dreidimensionales räumliches Rahmenprogramm für die Berechnung des Bauwerks benutzt. Um die horizontalen Verschiebungen und Spannungen zu berücksichtigen, werden in diesem Fall die Schnittflächen der Stabdecken und Fundamente mit sehr kleinen Werten definiert.

Da es einfacher ist, zwei- oder dreidimensionale Programme für die Analyse jedes Teilsystems des Bauwerks getrennt zu benutzen, wird bei der Berechnung mit dem Iterationsverfahren ein zweidimensionales Stabprogramm für die Berechnung von Decken und Fundament benutzt, um damit die horizontalen Verschiebungen und Spannungen zu eliminieren. Ein dreidimensionales Rahmenprogramm wird für die Berechnung der Stützen benutzt.

Wegen der Symmetrie in Form, Größe, Lasten und Baugrund genügt es, nur ein Viertel des Bauwerks zu untersuchen. Das gesamte Bauwerk wird dagegen zur Überprüfung der Ergebnisse betrachtet.

3 Diskussion der Ergebnisse

Zur Überprüfung des Iterationsverfahrens werden in der Tabelle 6.6 die Ergebnisse der Verformungsberechnungen in den sechs gewählten Punkten *a* bis *f* des Fundaments (Bild 6.12) bei Berechnung mit und ohne Iteration miteinander verglichen.

Tabelle 6.6 Vergleich zwischen den Verformungen in den gewählten Punkten für die Berechnung mit und ohne Iteration

Punkt	*w* [cm]		θ_x [-]		θ_y [-]	
	mit Iteration	ohne Iteration	mit Iteration	ohne Iteration	mit Iteration	ohne Iteration
a	0.214	0.213	0.00043	0.00042	-0.00043	-0.00042
b	0.229	0.229	0.00038	0.00037	0.00009	0.00008
c	0.219	0.219	0.00036	0.00035	-0.00003	-0.00003
d	0.308	0.308	-0.00011	-0.00009	0.00011	0.00009
e	0.291	0.291	-0.00011	-0.00009	-0.00004	-0.00003
f	0.269	0.270	0.00004	0.00004	-0.00004	-0.00004

Die maximale Differenz zwischen der vertikalen Verschiebung der Decken und Stützen und zwischen denen der Stützen und dem Fundament in verbündetem Knoten wird bezeichnet als Genauigkeitszahl

$$\varepsilon_w = \left(\frac{w_c - w_p}{w_c} \right) \times 100 [\%]$$

Hierbei ist ε_w = Genauigkeitszahl [%] für vertikale Verschiebung in Prozent, w_c = vertikale Verschiebung der Stütze und w_p = vertikale Verschiebung der Decken oder des Fundaments.

Die Genauigkeitszahl des gesamten Bauwerks war ε_w = 0.6 [%] für die Verschiebung nach vier Schritten. Dies führt zu 0.47 [%] Setzungsfehler für das Fundament. Aus obigem Vergleich kann geschlossen werden, dass die Ergebnisse des Iterationsverfahrens mit denen ohne Iteration gut übereinstimmen.

Die Berechnung des Bauwerks wurde mit einem Computer Pentium 100 mit 64 Mb RAM durchgeführt. Benötigt wurden zur Lösung des Gleichungssystems mit Iteration 39 Minuten und für die Lösung des Gleichungssystems ohne Iteration 6.5 Stunden. Die Rechenzeit ohne Iteration ist also in diesem Beispiel 10mal so groß wie mit Iteration. Andere Berechnungen bei Iterationsverfahren für dasselbe Beispiel mit Benutzung eines Stab/ Platten-Elementeprogramms für Decken und Fundament ergaben eine Rechenzeit von 43 Minuten. Das bedeutet, dass die lange Rechenzeit verursacht wird zur Lösung der großen Matrix für das gesamte Bauwerk, die in diesem Fall eine große Bandbreite hat.

Beispiel 6.3 Berechnung eines Bauwerks auf nichtlinearem Baugrund

1 Aufgabenstellung

Nachfolgend wird das neue Iterationsverfahren benutzt, um das Verhalten des Fundaments auf nichtlinearem Baugrund mit Einfluss der Bauwerkssteifigkeit zu untersuchen. Das vorhergehende Beispiel 6.2 mit den Bildern 6.11 und 6.12 wird hier mit einigen Änderungen gewählt, um die Berechnung eines Bauwerks auf nichtlinearem Baugrund zu zeigen.

Bei der Decke wird eine Plattendicke von 22 [cm] mit Skew-Panelled Stäben gewählt. Diese ist gleichförmig belastet mit 11.8 [kN/m^2]. Als Fundament dient eine Gründungsplatte mit Löchern. Die Größen der Stäbe, Stützen und des Fundaments bleiben wie im Beispiel 6.2.

2 Bodenkennwerte

Bei diesen Berechnungen werden zwei Baugrundmodelle untersucht:

- Bettungsmodulverfahren
- Steifemodulverfahren

Die Fundamentgründung liegt auf einem gleichmäßigen Untergrund mit 10 [m] Mächtigkeit. Der Bodentyp wird repräsentiert durch den Steifemodul E_s für das Steifemodulverfahren. Dies führt zu dem Bettungsmodul k_s für das Bettungsmodulverfahren. Tabelle 6.7 zeigt zwei unterschiedliche Bodentypen, die in dieser Untersuchung mit den Bodeneigenschaften E_s und k_s behandelt werden. Die zwei Modelltypen für den Boden werden gewählt, um das Verhalten von weichem und steifem Boden zu zeigen. Als *Poisson*zahl wird $\nu_s = 0.3$ [-] für beide Modelltypen gesetzt.

Tabelle 6.7 Bodeneigenschaften für zwei unterschiedliche Bodentypen

Bodentyp	k_s [kN/m^3]	E_s [kN/m^2]	q_{ult} [kN/m^2]
Weicher Boden	4 000	18 000	200
Steifer Boden	40000	180000	400

3 Berechnung

Um die Unterschiede zwischen den Ergebnissen der linearen und nichtlinearen Baugrundanalyse mit und ohne Interaktion des Überbaus für die zwei Baugrundmodelle zu zeigen, wird das Fundament für die beiden Bodentypen vier mal wie folgt berechnet:

5) Platte auf linearem Baugrund ohne Einfluss der Bauwerkssteifigkeit
6) Platte auf nichtlinearem Baugrund ohne Einfluss der Bauwerkssteifigkeit
7) Platte auf linearem Baugrund mit Einfluss der Bauwerkssteifigkeit
4) Platte auf nichtlinearem Baugrund mit Einfluss der Bauwerkssteifigkeit

Das Fundament wird in 504 quadratische Elemente mit jeweils 1.25 [m] × 1.25 [m] Fläche unterteilt. Die typische Decke eines Stockwerks wird in 100 quadratische Elemente mit jeweils 1.00 [m] × 1.00 [m] Fläche unterteilt, um die Plattendicke zu repräsentieren. Die Plattenelemente werden mit 140 Stabelementen verbunden, um die Skew-Pannelled Stäbe darzustellen. Bei der Berechnung des Fundaments ohne Interaktion des Überbaus erhält man die Fundamentauflasten aus den Deckenreaktionen infolge Lasten auf die Decke mit starren Lagern (Tabelle 6.8).

Tabelle 6.8 Lasten auf das Fundament ohne Interaktion des Überbaus

Punkt	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
Last [kN]	480	1085	975	3000	2630	2270

Mit dem Steifemodulverfahren erhält man die Anfangsbettung k_{ti} durch die lineare Berechnung des Fundaments (Gl. 6.24). Beim Bettungsmodulverfahren ist die Anfangsbettung k_t gleich dem Bettungsmodul k_s.

Bei dem gewählten System ist der Baugrund horizontal geschichtet. Ferner sind sowohl der Grundriss als auch die Lasten symmetrisch angeordnet. Diese zweiachsige Symmetrie in Form und Lastgeometrie bezüglich der *x*- und *y*- Achse wird genutzt, indem nur ein Viertel des Bauwerks berechnet wird.

4 Ergebnisse und Diskussion

Die Bilder 6.14 bis 6.25 zeigen die Verteilung der Setzungen, Sohldrücke und Momente im Schnitt I des Bildes 6.12 für 16 Berechnungsfälle. Allgemein kann man aus diesen Bildern für die beiden untersuchten Modelle und Bodentypen Folgendes erkennen:

- Die Setzungen sind bei nichtlinearen Berechnungen mit oder ohne Interaktion des Überbaus unter allen Knoten des Fundaments größer als bei linearen Analysen

- Bei der nichtlinearen Berechnung wird der Sohldruck durch Senkung seines Wertes unter den Stützen und Steigerung des Wertes im Feld zwischen den Stützen verändert. Dies führt zur Annäherung des Sohldrucks an die mittlere Sohlpressung unter dem Fundament, insbesondere bei weichem Boden

- Durch die Umverteilung des Sohldrucks unter dem Fundament ist bei der nichtlinearen Analyse das Stützenmoment größer geworden, während das Feldmoment kleiner wurde

- Die maximalen Setzungen, Sohldrücke und Momente aus der Berechnung mit Interaktion des Überbaus sind kleiner als aus der Berechnung ohne Interaktion

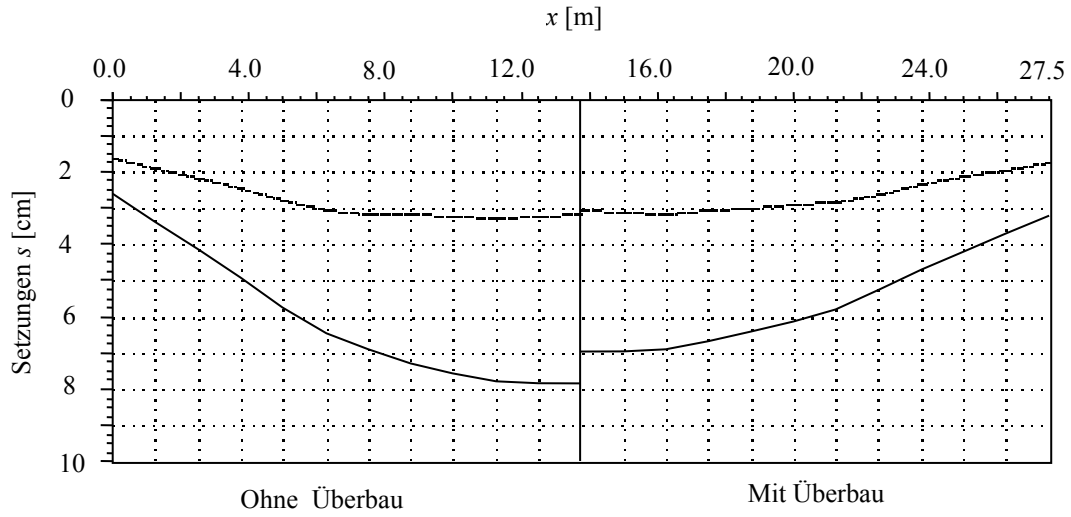


Bild 6.14 Setzungen s [cm] im Schnitt I (bettungsm odulverfahren-weicher Boden)

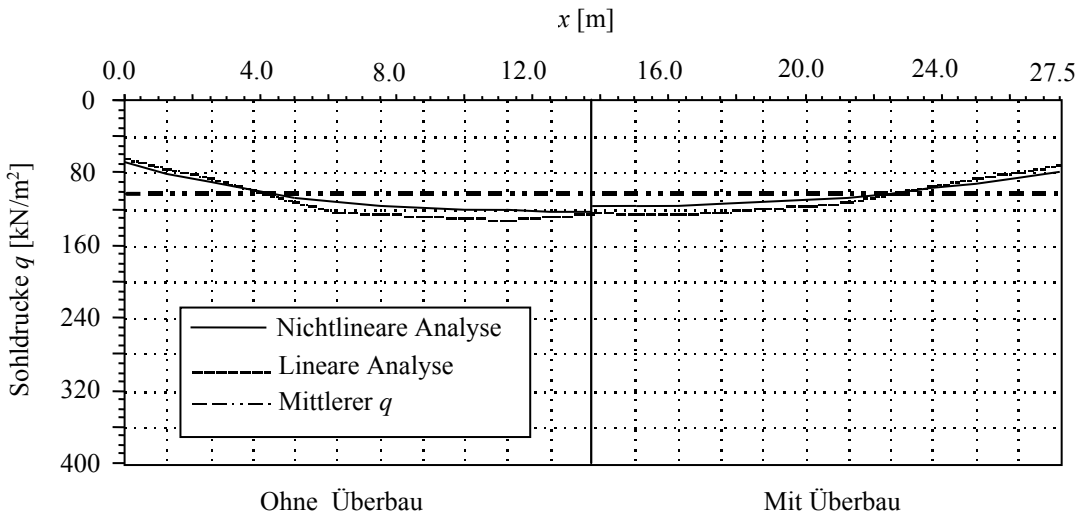


Bild 6.15 Sohldruck q [kN/m^2] im Schnitt I (bettungsm odulverfahren-weicher Boden)

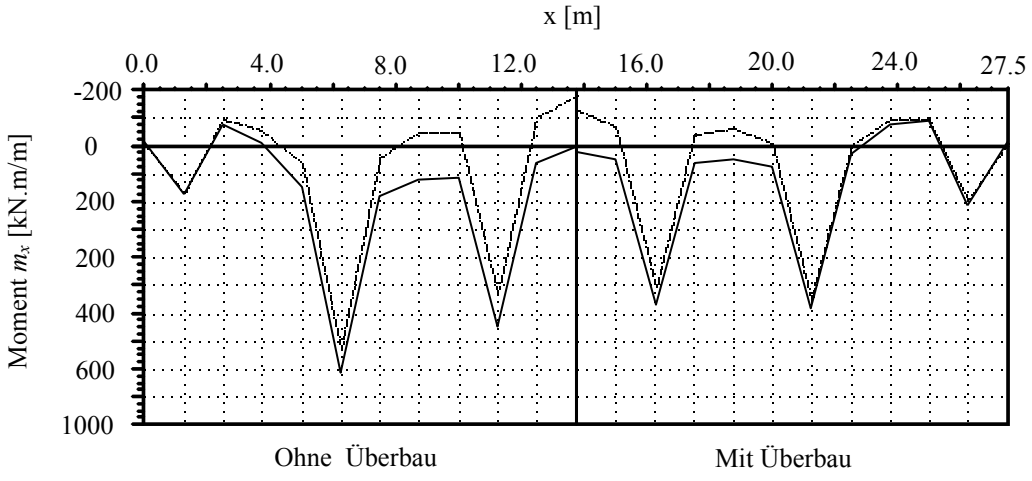


Bild 6.16 Moment m_x [kN.m/m] im Schnitt I (bettungsm odulverfahren-weicher Boden)

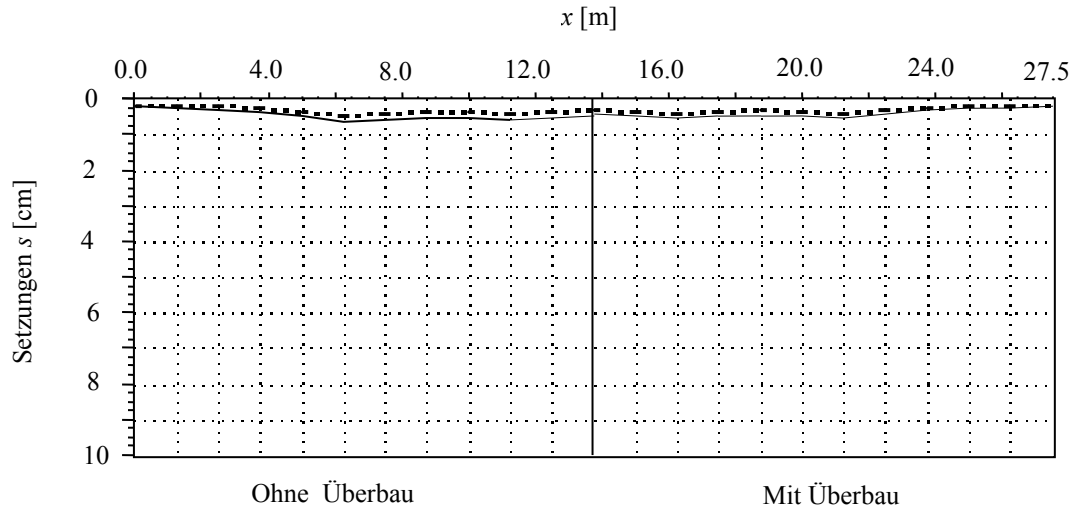


Bild 6.17 Setzung s [cm] im Schnitt I (Bettungsmodulverfahren-steifer Boden)

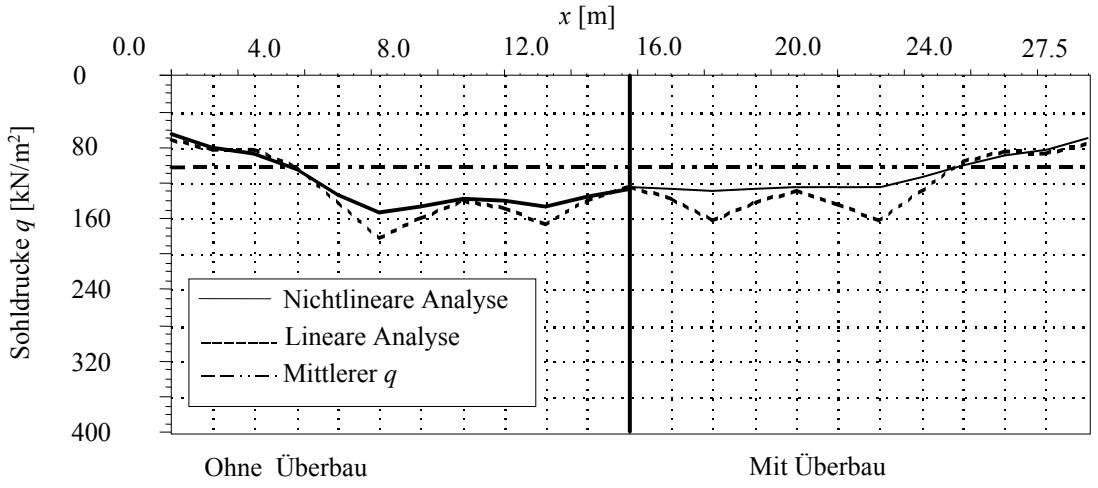


Bild 6.18 Sohldruck q [kN/m^2] im Schnitt I (Bettungsmodulverfahren-steifer

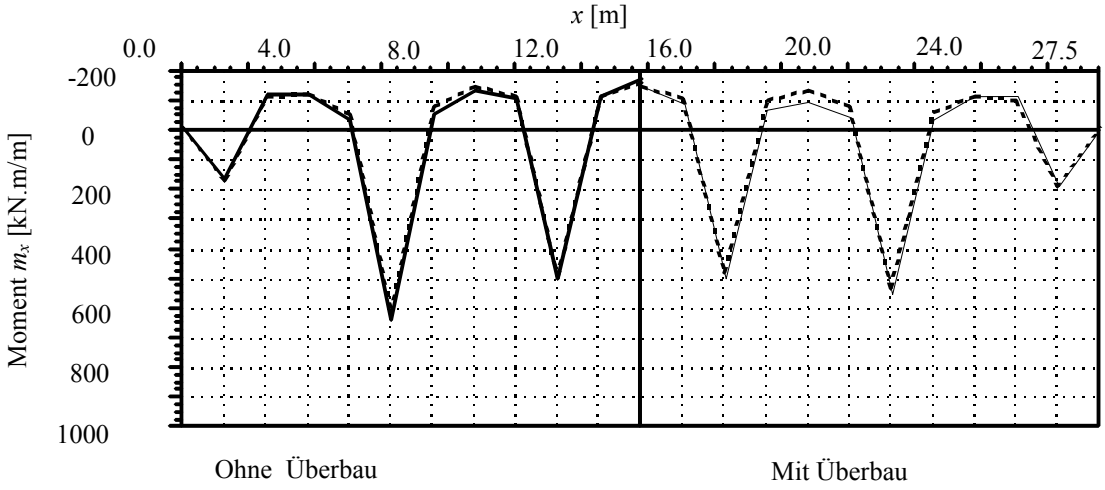


Bild 6.19 Moment m_x [kN.m/m] im Schnitt I (Bettungsmodulverfahren-steifer Boden)

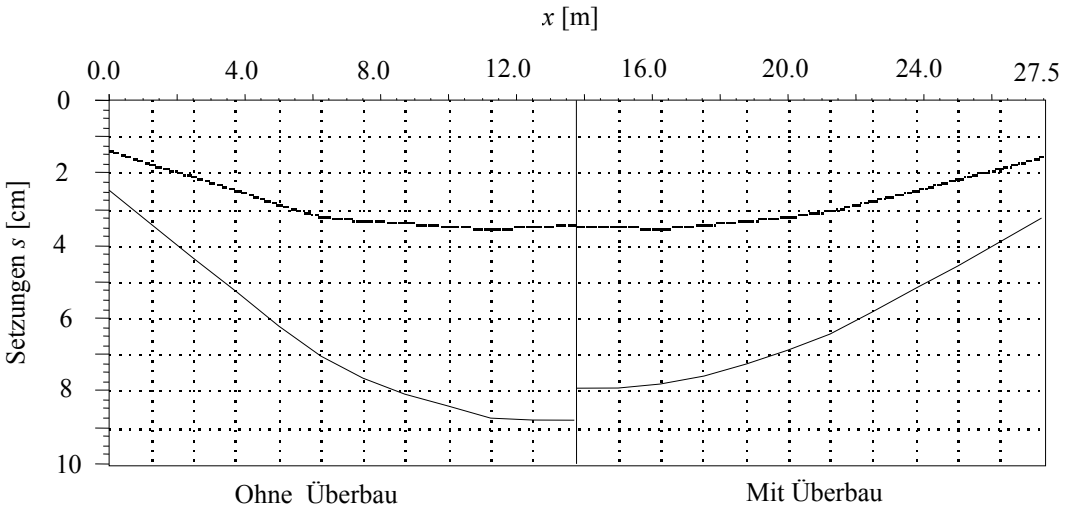


Bild 6.20 Setzung s [cm] im Schnitt I (Steifemodulverfahren-weicher Boden)

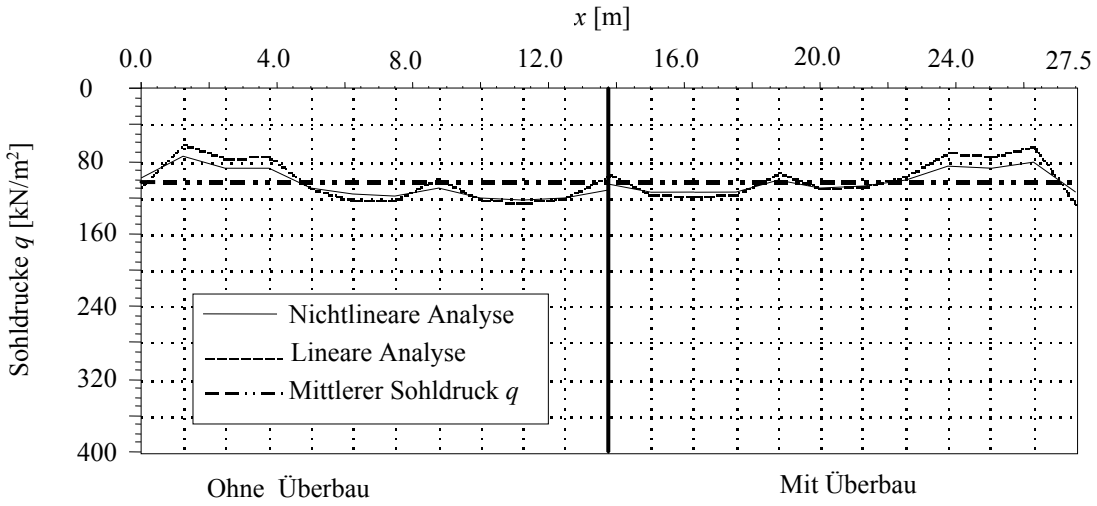


Bild 6.21 Sohldruck q [kN/m^2] im Schnitt I (Steifemodulverfahren-weicher

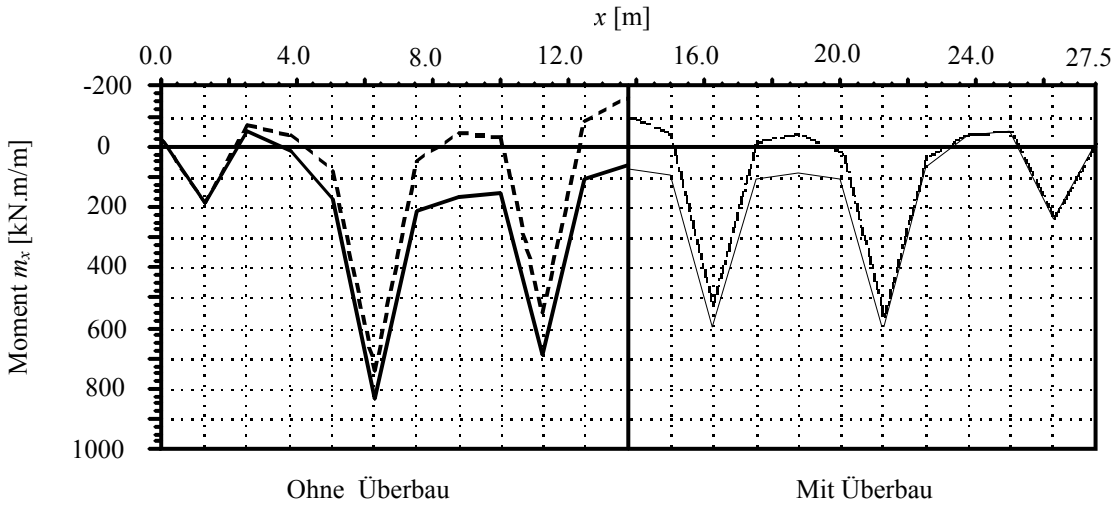


Bild 6.22 Moment m_x [kN.m/m] im Schnitt I (Steifemodulverfahren-weicher Boden)

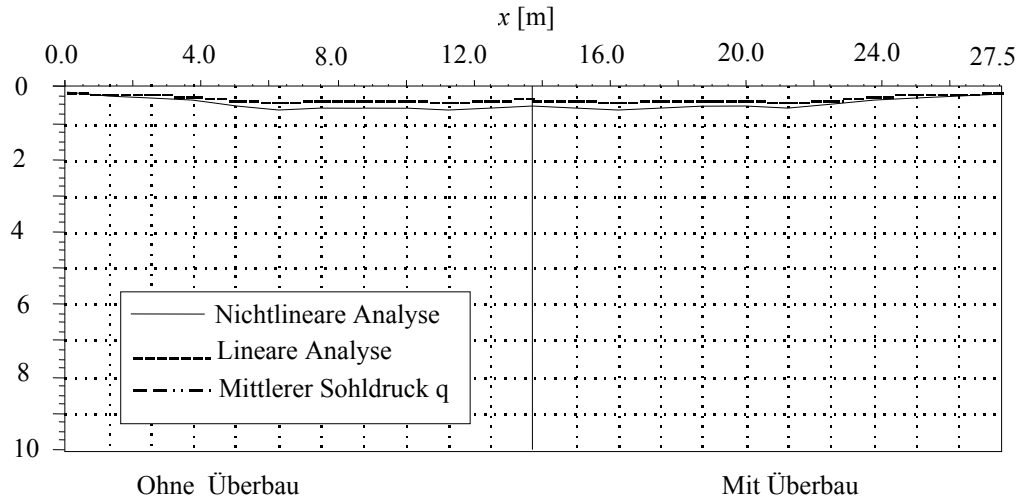


Bild 6.23 Setzung s [cm] im Schnitt I (Steifemodulverfahren-steifer Boden)

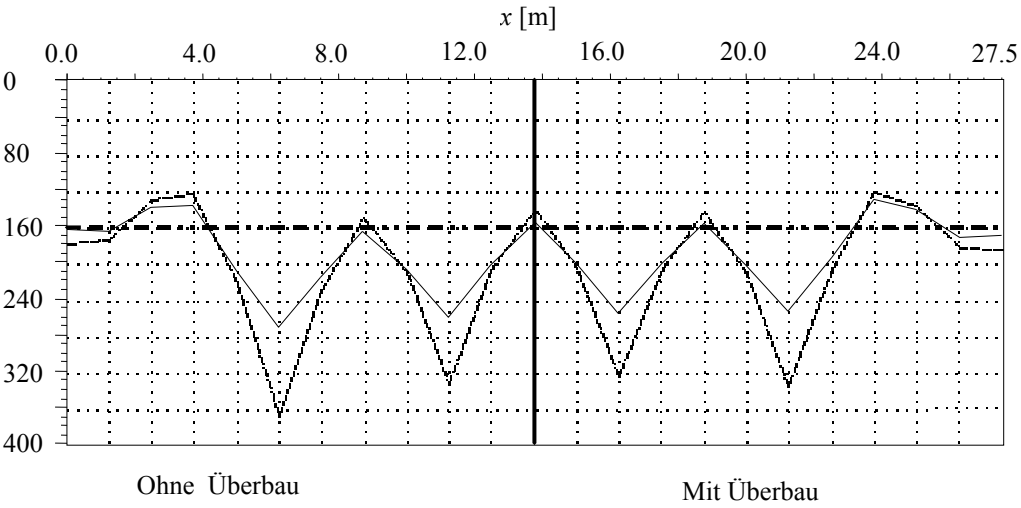


Bild 6.24 Sohldruck q [kN/m^2] im Schnitt I (Steifemodulverfahren-steifer

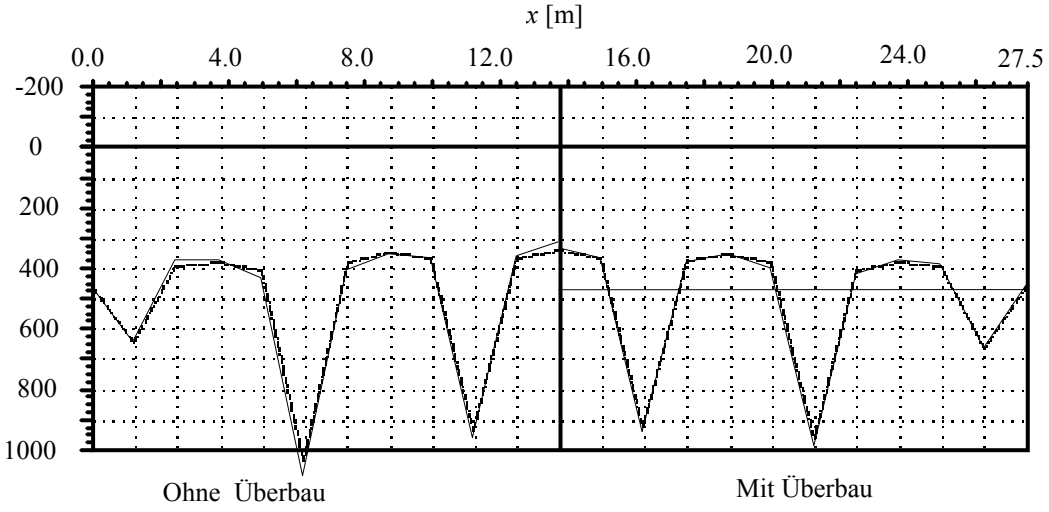


Bild 6.25 Moment m_x [kN.m/m] im Schnitt I (Steifemodulverfahren-steifer Boden)

In den nachfolgenden Tabellen 6.9 bis 6.10 werden die maximalen Setzungen, Sohldrücke unter den Stützen, Stützmomente und Feldmomente und deren Unterschiede Δ wiedergegeben.

Tabelle 6.9 Vergleich der maximalen Setzungen *max.s*

System Baugrund/ Bauwerk	Setzungs-berechnung	Setzung	weicher Boden E_s = 18 000 [kN/m²]		steifer Boden E_s = 180 000 [kN/m²]	
			Bettungs-modul-verfahren	Steife-modul-verfahren	Bettungs-modul-verfahren	Steife-modul-verfahren
ohne Interaktion	linear	s_{ln} [cm]	3.27	3.51	0.45	0.44
	nichtlinear	s_{nl} [cm]	7.85	8.81	0.62	0.64
	$\Delta = 100 \times (s_{nl} - s_{ln}) / s_{ln}$ [%]		140	151	38	46
mit Interaktion	linear	s_{ln} [cm]	3.15	3.50	0.41	0.42
	nichtlinear	s_{nl} [cm]	6.94	7.93	0.54	0.58
	$\Delta = 100 \times (s_{nl} - s_{ln}) / s_{ln}$ [%]		120	126	32	38

Tabelle 6.10 Vergleich der Sohldrücke *q* unter der Stütze

System Baugrund/ Bauwerk	Setzungs-berechnung	Sohldruck	weicher Boden E_s = 18 000 [kN/m²]		steifer Boden E_s = 180 000 [kN/m²]	
			Bettungs-modul-verfahren	Steife-modul-verfahren	Bettungs-modul-verfahren	Steife-modul-verfahren
ohne Interaktion	linear	q_{ln} [kN/m²]	131	126	182	310
	nichtlinear	q_{nl} [kN/m²]	122	122	152	212
	$\Delta = 100\times(q_{nl} - q_{ln}) / q_{ln}$ [%]		-7	-3	-17	-32
mit Interaktion	Linear	q_{ln} [kN/m²]	126	119	163	276
	nichtlinear	q_{nl} [kN/m²]	115	114	139	196
	$\Delta = 100\times(q_{nl} - q_{ln}) / q_{ln}$ [%]		-9	-4	-15	-29

Tabelle 6.11 Vergleich der Stützmomente m_x

System Baugrund/ Bauwerk	Setzungs-berechnung	Stütz-momente	weicher Boden E_s = 18 000 [kN/m^2]		steifer Boden E_s = 180 000 [kN/m^2]	
			Bettungs-modul-verfahren	Steife-modul-verfahren	Bettungs-modul-verfahren	Steife-modul-verfahren
ohne Interaktion	linear	m_{ln} [kN.m/m]	725	742	609	557
	nichtlinear	m_{nl} [kN.m/m]	812	836	638	613
	$\Delta = 100*(m_{nl} - m_{ln})/ m_{ln}$ [%]		12	13	5	10
mit Interaktion	linear	m_{ln} [kN.m/m]	554	558	528	490
	nichtlinear	m_{nl} [kN.m/m]	587	596	538	517
	$\Delta = 100*(m_{nl} - m_{ln})/ m_{ln}$ [%]		6	7	2	6

Tabelle 6.12 Vergleich der Feldmomente m_x

System Baugrund/ Bauwerk	Setzungs-berechnung	Feld-momente	weicher Boden E_s = 18 000 [kN/m^2]		steifer Boden E_s = 180 000 [kN/m^2]	
			Bettungs-modul-verfahren	Steife-modul-verfahren	Bettungs-modul-verfahren	Steife-modul-verfahren
ohne Interaktion	linear	m_{ln} [kN.m/m]	-184	-161	-162	-136
	nichtlinear	m_{nl} [kN.m/m]	3.84	62	-178	-157
	$\Delta = 100\times(m_{nl} - m_{ln})/ m_{ln}$ [%]		102	139	10	15
mit Interaktion	linear	m_{ln} [kN.m/m]	-125	-104	-153	-128
	nichtlinear	m_{nl} [kN.m/m]	22	74	-159	-138
	$\Delta = 100\times(m_{nl} - m_{ln})/ m_{ln}$ [%]		118	171	4	9

Aus den Ergebnissen lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

Setzung (Tabelle 6.9)

Die maximale nichtlineare Setzung ist für weiche Böden größer als die maximale lineare Setzung für die Berechnungen mit und ohne Interaktion des Überbaus. Bei steifen Böden sind sie kleiner.

Sohldruck (Tabelle 6.10)

Für Böden mit linearem Setzungsverhalten ist der Sohldruck bei weichen Böden größer als bei Böden mit nichtlinearem Setzungsverhalten (unter der Stütze). Es ist klar, dass die Sohldruckverteilung für Bettungsmodulverfahren und Steifemodulverfahren bezüglich ihrer Form nicht ähnlich ist. Der Sohldruck unter der Stütze ist bei steifem Boden mit dem Steifemodulverfahren größer als mit dem Bettungsmodulverfahren. Im Gegensatz hierzu ist es bei weichem Boden umgekehrt.

Biegemomente (Tabellen 6.11 und 6.12)

Bei Verwendung linearer oder nichtlinearer Setzungsberechnungen sind die Stützmomente für steifen Boden, die Werte der Stützmomente ähnlich (mit und ohne Interaktion des Überbaus).

Bei weichen Böden gibt es keine großen Unterschiede bei den Stützmomenten zwischen linearem und nichtlinearem Setzungsverhalten. Bei den Feldmomenten ist der Unterschied größer. Die Ergebnisse im Schnitt I der Bilder 6.24 bis 6.25 zeigen auch, dass sich im Feld zwischen den Stützen das Feldmoment von negativen zu positiven Werten bei der nichtlinearen Berechnung des Fundaments geändert hat.

Abschnitt 7

Nichtlineare Berechnung von Fundamenten

Inhalt

7.1	Nichtlineare Berechnung von Fundamenten für ein Modell mit einfacher Annahme	7- 2
7.1.1	Einleitung	7- 2
7.1.2	Beschreibung des Verfahrens	7- 3
7.2	Nichtlineare Berechnung von Fundamenten mit Bettungsmodulverfahren und Steifemodulverfahren	7- 6
7.2.1	Einleitung	7- 6
7.2.2	Beschreibung des Verfahrens	7- 6
Beispiel 7.1	Überprüfung der nichtlinearen Berechnung für das Bettungsmodulverfahren	7-11
Beispiel 7.2	Nichtlineare Berechnung von ausmittig belasteten Rechteckfundamenten	7-14
Beispiel 7.3	Nichtlineare Berechnung beim ausmittig belasteten Kreisfundament	7-18
Beispiel 7.4	Elastoplastische Berechnung einer Platte nach dem Steifemodulverfahren	7-22

7 Nichtlineare Berechnung von Fundamenten

7.1 Nichtlineare Berechnung von Fundamenten für ein Modell mit einfacher Annahme

7.1.1 Einleitung

Das einfachste Modell zur Berechnung der Sohldrücke unter den Fundamenten nimmt eine lineare Verteilung des Sohldrucks auf der Unterseite des Fundaments an (statisch bestimmt). Um die Gleichgewichtsbedingungen zu erfüllen, müssen die Vertikalkomponente der Resultierenden der Lasten und die Resultierende des Sohldruckkörpers in ein und derselben Wirkungslinie liegen und entgegengesetzt gleich groß sein. Wenn alle Sohldrücke positiv sind, wird das Fundamentsystem als linear berücksichtigt, und es wird der Sohldruck in diesem Fall wie folgt angesetzt:

$$q_i = \frac{N}{A_f} + \frac{M_y\, I_x - M_x\, I_{xy}}{I_x\, I_y - I_{xy}^{\,2}}\, x_i + \frac{M_x\, I_y - M_y\, I_{xy}}{I_x\, I_y - I_{xy}^{\,2}}\, y_i \qquad (7.1)$$

Hierin bedeuten:

N	Lotrechte Komponente der Resultierenden aus den Lasten	[kN]
q_i	Sohldruck im Knoten i	[kN/m^2]
x_i	Lage des Knotens i auf der x- Achse vom Schwerpunkt des Fundaments	[m]
y_i	Lage des Knotens i auf der y- Achse vom Schwerpunkt des Fundaments	[m]
A_f	Grundfläche des Fundaments	[m^2]
M_x	Moment von N um die x- Achse	[kN.m]
M_y	Moment von N um die y- Achse	[kN.m]
I_x	Trägheitsmoment der Sohlfläche um die x- Achse	[m^4]
I_y	Trägheitsmoment der Sohlfläche um die y- Achse	[m^4]
I_{xy}	Zentrifugalmoment der Sohlfläche	[m^4]

Bei großen Exzentrizitäten ergeben sich unter dem Fundament negative Sohldrücke an einigen Knoten. Da aber Zugspannungen vom Baugrund nicht aufgenommen werden können, wird das Fundamentsystem nichtlinear. In diesem Fall muss eine Korrektur vorgenommen werden, um den nichtlinearen Sohldruck zu bestimmen.

Die nichtlineare Berechnung von Fundamenten bei dem Modell mit einfacher Annahme ist von vielen Verfassern seit langem behandelt worden, wobei zur Lösung dieses Problems mehrere analytische und graphische Methoden vorgeschlagen wurden. *Pohl* (1918) hat eine Tabelle berechnet, aus der die größten Eckpressungen $max\ q_o$ für beliebige Stellungen von N entnommen werden können. *Hülsdünker* (1964) hat mit den Zahlenwerten dieser Tabelle von *Pohl* (1918) ein Nomogramm entwickelt, aus dem der erforderliche Wert zur Berechnung von $max\ q_o$ abgegriffen werden kann. Für ein Fundament mit einer abgetrennten Ecke, für das die Bestimmung der Null-Linie erforderlich ist, lassen sich in diesem Falle geschlossene Formeln nicht aufstellen. Zur Bestimmung der Null-Linie muss im Probierverfahren iterativ vorgegangen werden (*Pohl* (1918) und *Mohr* (1918)). Neben Tabellen und Nomogrammen können auch Einflusslinien-Tafeln nach *Graßhoff* (1978) zur Ermittlung der Sohldruck-Ordinaten herangezogen werden, wenn das rechteckige Fundament in einer Hauptachse belastet und in der Querrichtung praktisch starr ist (ebener Fall).

Peck/ Hanson/ Thornburn (1974) haben ein Probierverfahren entwickelt, um die Null-Linie für ein rechteckiges Fundament mit Momenten über beide Achsen zu erhalten. *Jarquio/ Jarquio* (1983) haben eine direkte Methode vorgeschlagen, um ein rechteckiges Fundament mit zweiachsigen Momenten anzupassen. *Irles/ Irles* (1994) haben eine analytische Lösung für rechteckige Fundamente mit zweiachsigen Momenten vorgestellt, die dazu führt, explizite Lösungen für Eckpressung und Null-Linie zu erhalten.

Die Ermittlung der Kernweiten und Randspannungen unter ausmittig belasteten Fundamenten mit unregelmäßig und beliebig geformten Sohlflächen ist sehr aufwändig. Für bestimmte, häufig vorkommende T-förmige Fundamentflächen, die in der Symmetrieachse ausmittig belastet sind, hat *Kirschbaum* (1970) Formeln für die größte Kantenpressung $max\ q_o$ und die Breite der klaffenden Fuge abgeleitet. Für einige Fundamentflächen mit polygonalem Umriss bringt *Dimitrov* (1977) Formeln zur Bestimmung der Kern- und Randspannungen $max\ q_o$. Übersichtliche Arbeitsdiagramme hierzu sind von *Miklos* (1964) entwickelt worden. Für allgemeine Fälle wird auf ein graphisches Verfahren von *Opladen* (1958) verwiesen.

Die meisten der analytischen Methoden zur Bestimmung der Kontaktfläche und Eckpressung sind für exzentrisch belastete regelmäßige Fundamente geeignet. Unregelmäßige Fundamente können nur mit graphischen Verfahren berechnet werden. In diesem Beitrag wird ein Iterationsverfahren zur nichtlinearen Berechnung von Fundamenten für die Einfache Annahme vorgestellt. Das Verfahren kann für Fundamente mit beliebiger Grundrissform verwendet werden und ist für Computerprogramme geeignet. Der folgende Abschnitt beschreibt dieses Verfahren.

7.1.2 Beschreibung des Verfahrens

Im Verfahren wird die Gründungsplatte, die beliebige Grundform haben kann, in rechteckige finite Elemente unterteilt. Es wird angenommen, dass der Sohldruck q_i durch äquivalente Last Q_i an den verschiedenen Knotenpunkten ersetzt werden kann. Wird das Fundament, wie es im Bild 7.1 gezeigt wird, einer großen Exzentrizität unterzogen, so wird der Vektor der Sohldrücke $\{Q\}^{o}$ nach der ersten Berechnung an einigen Knoten negative Sohldrücke ergeben. Dieser Vektor kann in eine Form von Trennungsvektoren geschrieben werden, wie folgt:

$$\{Q\}^{(o)} = \{Q_p\}^{(o)} + \{Q_n\}^{(o)} \tag{7.2}$$

wobei:

$\{Q_p\}^{(o)}$ Vektor der positiven Sohldrücke aus der ersten Berechnung
$\{Q_n\}^{(o)}$ Vektor der negativen Sohldrücke aus der ersten Berechnung

Statt negativer Sohldrücke $\{Q_n\}^{(o)}$ auf der Trennungszone sollen äquivalente Reaktionen $\{\Delta Q\}^{(o)}$ über die ganze Platte gefunden werden.

Dies wird erreicht, wenn die Vertikalkomponente, die Resultierende aus den Lasten und die Resultierende des Sohldruckkörpers in ein und derselben Wirkungslinie liegen und entgegengesetzt gleich groß sind.

Ergeben sich nach einer ersten Berechnung negative Sohldrücke, so werden die betreffenden Knoten

in einer zweiten Berechnung mit negativen Knotenlasten beaufschlagt. Aus den Ergebnissen dieser zweiten Berechnung werden die Sohlkräfte in einer dritten Berechnung den in der ersten Berechnung ermittelten Sohldrücken zugeschlagen. Ggf. muss dieser Iterationszyklus ein- oder mehrmals wiederholt werden.

Der Iterationsprozess zum Entfernen negativer Sohldrücke bei der Einfachen Annahme wird in den folgenden Schritten beschrieben:

i) Eine neue Gruppe von Lasten auf der Platte wird angenommen, wobei der Vektor $\{Q_n\}^{(o)}$ diese äußerlich angewandten Lasten an denselben Knoten darstellt

ii) Dann kann der Vektor $\{\Delta Q\}^{(o)}$ aus den neuen Bodenreaktionen aufgrund dieser Lasten mit Hilfe der Gl. 7.1 bestimmt werden

iii) Der Vektor $\{\Delta Q\}^{(o)}$ wird zum Vektor der positiven Sohldrücke $\{Q_p\}^{(o)}$ hinzugefügt, um einen Vektor von umverteilten Sohldrücken $\{Q\}^{(1)}$ zu erhalten, wie folgt:

$$\{Q\}^{(1)} = \{Q_p\}^{(o)} + \{\Delta Q\}^{(o)} \tag{7.3}$$

Wenn dann wieder negative Sohldrücke auftreten, werden die obigen Schritte solange wiederholt, bis negative Sohldrücke nicht mehr erscheinen. Bild 7.1 zeigt den Iterationszyklus des Iterationsprozesses.

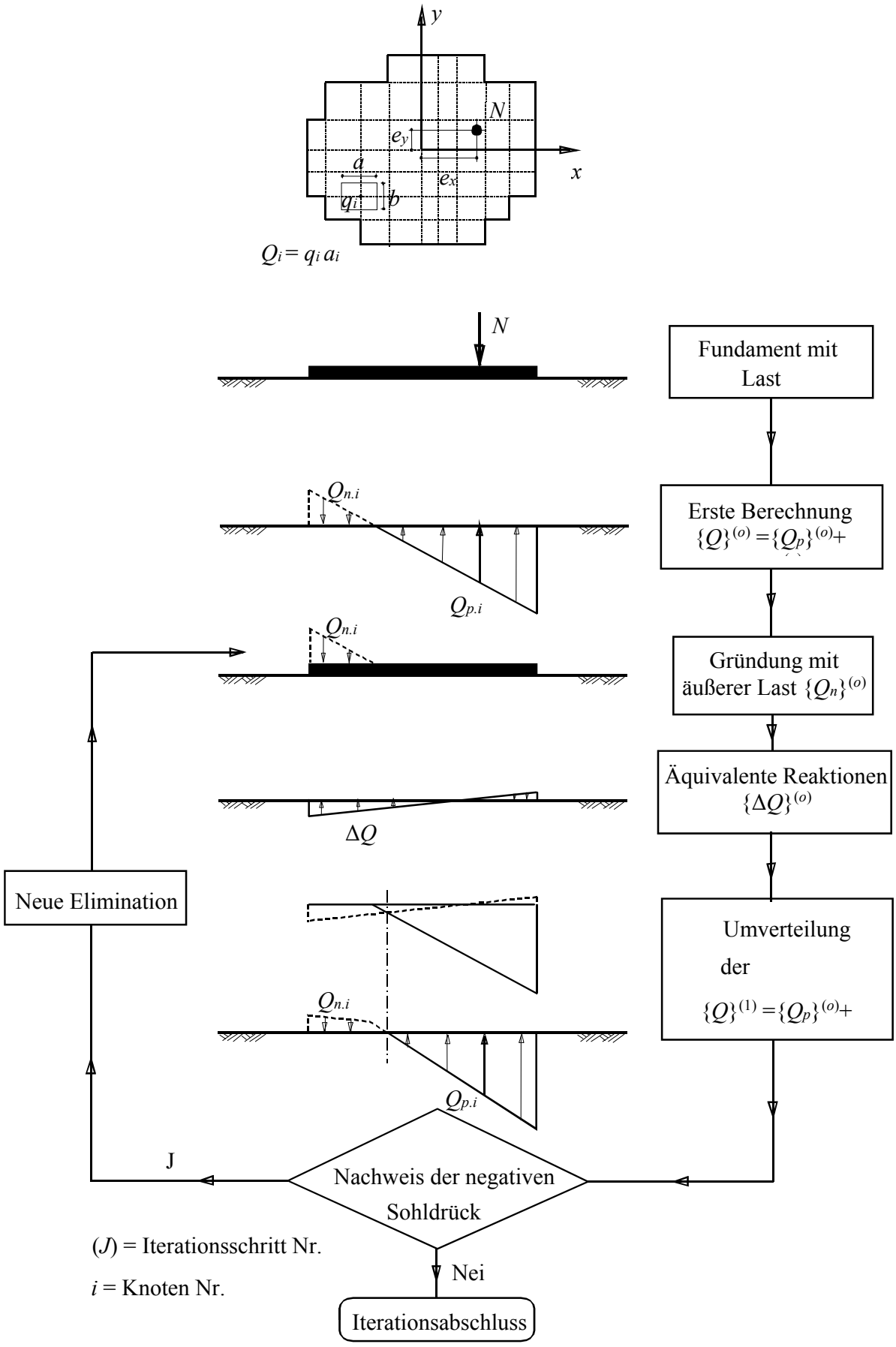


Bild 7.1 Iterationszyklus der Iterationsverfahren

7.2 Nichtlineare Berechnung von Fundamenten mit Bettungsmodulverfahren und Steifemodulverfahren

7.2.1 Einleitung

Wenn Platten mit hohen Belastungen berechnet werden sollen, wird es an einigen Knoten der Platte Sohldrücke geben, die viel größer als die Tragfähigkeit des Bodens q_{ult} sind. Der Boden kann aber solch hohen Pressungen nicht widerstehen. Hier wird das Fundamentsystem nichtlinear und eine Berechnung muss durchgeführt werden, um diese nichtlinearen Sohldrücke zu finden. Die nichtlineare Berechnung dieses Problems für das Steifemodulverfahren wurde von vielen Autoren aufgezeichnet, zum Beispiel von *Biedermann* (1981) und *Stark/ Majer* (1988). Diese Methoden beruhen darauf, den maximal zulässigen Sohldruck q^* in einem iterativen Prozess während der Berechnung zu spezifizieren. Der Wert von q^* wird üblicherweise als ein Verhältnis der mittleren Sohlpressung q_o auf das Fundament ausgedrückt. Typisch ist $2\ q_o \le q^* \le 3\ q_o$ in der praktischen Anwendung. Der erste Schritt in der Berechnung soll die Knoten definieren, die "elastisch" bleiben, die anderen verhalten sich "plastisch". Wenn die Sohldrücke von plastischen Knoten die spezifizierte Grenze q^* überschreiten, werden alle Sohldrücke in diesen Knoten auf q^* reduziert. Dann wird die Platte neu - berechnet, um die modifizierten Sohldrücke auf die elastischen Knoten zu erhalten. Wenn die neuen Ergebnisse zeigen, dass der spezifizierte maximale Sohldruck an weiteren Knoten überschritten ist, wird der ganze Prozess so lange wiederholt, bis Konvergenz erreicht wird.

Ein realistischeres mathematisches Modell für Gründungsplatten auf nichtlinearem Baugrund mit dem Bettungsmodulverfahren wird bei *Baz* (1987) und *Hasnien* (1993) gezeigt. In diesem mathematischen Modell wird der Baugrund durch eine infinite Anzahl von Federn mit nichtlinearer Beziehung zwischen Sohldruck und Setzung der Feder dargestellt. Damit kann man das nicht lineare Verhalten der Beziehung der Sohldruck-Setzung unter dem Fundament bei einer Gleichung analog der Hyperbelfunktion und die Spannung-Dehnung-Beziehung des Bodens erfassen.

Kany/ El Gendy (2000) haben dieses Modell für die Berechnung von Fundamenten mit Einfluss der Bauwerkssteifigkeit entwickelt. Hier wird eine Erweiterung für das nichtlineare Baugrundmodell für das Bettungsmodulverfahren vorgenommen, um das nichtlineare Verhalten elastischer Platten nach dem Steifemodulverfahren darzustellen. In diesem Fall ist die Anfangsbettung veränderlich von einem Knoten zum anderen und wird aus der linearen Berechnung der elastischen Platte nach dem Steifemodulverfahren erhalten.

Im folgenden Beitrag wird eine zusätzliche Erweiterung des oben genannten nichtlinearen Baugrundmodells auf elastische Platten nach dem Steifemodulverfahren gezeigt, um das nichtlineare Verhalten von starren Platten nach dem Steifemodulverfahren darzustellen. Auch wird eine rationelle Methode dargestellt, die negativen Sohldrücke für elastische und starre Platten nach dem Steifemodulverfahren zu entfernen.

7.2.2 Beschreibung des Verfahrens

Elastoplastische Berechnung

Die nichtlineare Berechnung (elastoplastisch) für das Bettungsmodul- und Steifemodulverfahren basiert auf einer hyperbolischen Beziehung zwischen Sohldruck q_i und Setzung s_i, die gegeben ist aus:

$$q_i = \frac{s_i}{\frac{1}{k_t} + \frac{s_i}{q_{ult}}} \tag{7.4}$$

wobei:

q_i	Sohldruck im Knoten i	[kN/m^2]
s_i	Setzung im Knoten i	[cm]
k_t	Anfangsbettung	[kN/m^3]
q_{ult}	Sohldruck beim Grundbruch des Bodens	[kN/m^2]

Die unbekannten Parameter in Gl. 7.6 sind Sohldrücke q_i und Setzungen s_i. Die Anfangsbettung k_t für das Bettungsmodulverfahren ist für das Problem gegeben und kann direkt aus dem elastischen Parameter des Bodens erhalten werden. Für entweder elastische oder starre Platten nach dem Steifemodulverfahren ist die Anfangsbettung k_t variabel über allen Knoten und wird aus der linearen Berechnung des Problems wie folgt erhalten:

$$k_{ti} = \frac{q_{li}}{s_{li}} \tag{7.5}$$

wobei:

k_{ti}	Anfangsbettung im Knoten i	[kN/m^3]
s_{li}	Setzung im Knoten i aus der linearen Berechnung	[m]
q_{li}	Sohldruck im Knoten i aus einer linearen Berechnung	[kN/m^2]

Die Tragfähigkeit des Bodens q_{ult} in Gl. 7.4 kann aus Gl. 7.6 nach DIN 4017 (1979) bestimmt werden.

$$q_{ult} = c\, N_c\, \nu_c + \gamma_1\, t_f\, N_d\, \nu_d + \gamma_2\, B\, N_b\, \nu_b \tag{7.6}$$

wobei:

t_f	Gründungstiefe unter Gelände	[m]
φ	Reibungswinkel des Bodens	[°]
c	Kohäsion des Bodens	[kN/m^2]
γ_1	Wichte des Bodens oberhalb der Gründungssohle	[kN/m^3]
γ_2	Wichte des Bodens unterhalb der Gründungssohle	[kN/m^3]
B	Fundamentbreite	[m]
A	Fundamentlänge	[m]
N_c, N_d, N_b	Tragfähigkeitsbeiwerte	[-]
	$N_d = e^{\pi\ tan\,\varphi}\ tan^2\,(45 + \varphi / 2)$	
	$N_c = (N_d - 1)\ cot\ \varphi$	
	$N_b = (N_d - 1)\ tan\ \varphi$	
ν_c, ν_d, ν_b	Formbeiwerte	[-]
	$\nu_d = 1 + (B / A)\ sin\ \varphi$	
	$\nu_b = 1 - 0.3\ (B / A)$	
	$\nu_c = (\nu_d\, N_d - 1) / (N_d - 1)$	

Bei mehreren Schichten n unter der Sohle (Bild 7.2) werden nach der Schichtdicke h_i gewogene

Mittelwerte der Bodenkennwerte φ_m, c_m und γ_m aus n Schichten errechnet, wobei sich die Mittelwerte aus den Gln. 7.7 errechnen.

$$\varphi_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi_m \, h_i}{\sum_{i=1}^{n} h_i}, c_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_m \, h_i}{\sum_{i=1}^{n} h_i} \text{ und } \gamma_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \, h_i}{\sum_{i=1}^{n} h_i} \tag{7.7}$$

Hierbei wird die von φ_m abhängige Tiefe der Gleitfläche unter der Sohle berücksichtigt, *max* T_s. Deshalb ist eine Iteration notwendig. Es wird solange iteriert, bis die Abweichung des errechneten Reibungswinkels im Schritt i vom vorher errechneten im Schritt i - 1 weniger als 0.1 [°] beträgt.

Nach *DIN* 4017 ist die Mittelwertbildung φ_m nur dann zulässig, wenn die Einzelwerte der Reibungswinkel der einzelnen Schichten φ_i nicht mehr als 5 [°] vom Mittelwert abweichen.

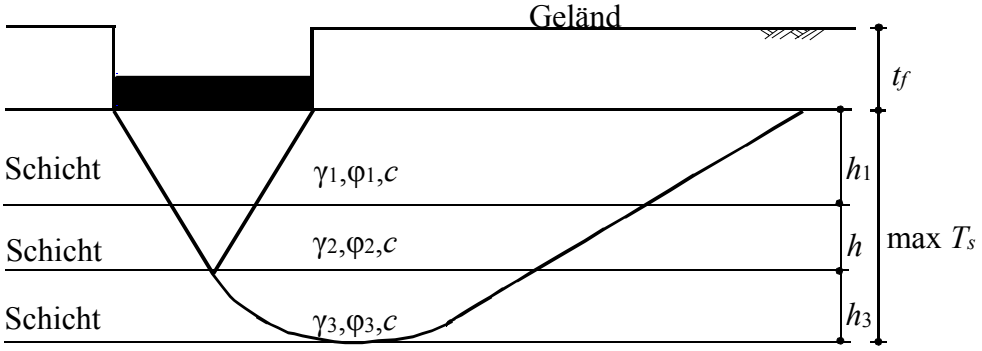


Bild 7.2 Tragfähigkeit bei mehreren Schichtensystemen

Wenn der Untergrund durch eine Anzahl von Bohrprofilen definiert wird, kann eine Interpolation durch die Tragfähigkeiten der Bohrprofile durchgeführt werden, um die Variabilität des Bodens in x- und y- Richtung zu berücksichtigen. Das lineare Verhalten des Bodens wird sowohl im Bettungsmodul- als auch im Steifemodulverfahren durch Iteration wie folgt erfasst (Bild 7.3):

- Beim Iterationsschritt j ist der nichtlineare Sohldruck q_i im Knoten i

$$q_i^{(j)} = k_{si}^{(j)} \, s_i^{(j)} \tag{7.8}$$

  wobei k_{si} der Bettungsmodul im Knoten i *ist*. Er ist gleich der Anfangsbettung k_{ti} im Iterationsschritt 1

- Beim nächsten Iterationsschritt j + 1 wird der Bettungsmodul k_{si} modifiziert durch Gl. 7.9.

$$k_{si}^{(j+1)} = \frac{1}{\frac{1}{k_{ti}} + \frac{s_i^{(j)}}{q_{ult}}} \tag{7.9}$$

Diese Schritte sind so lange zu wiederholen, bis die gewünschte Genauigkeit zwischen dem

nichtlinearen Sohldruck q_i im Iterationsschritt j und im früheren Iterationsschritt j - 1 erreicht ist.

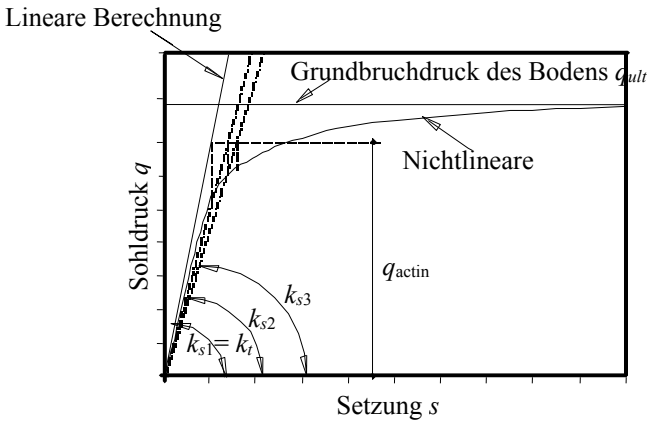


Bild 7.3 Nichtlineare Berechnung

Elimination der negativen Sohldrücke

In vielen Fällen enthalten die Berechnungsergebnisse von Fundamenten nach dem Bettungsmodul- oder dem Steifemodulverfahren sowohl bei elastischen als auch bei elastoplastischen Berechnungen negative Sohldrücke. In der Praxis bedeutet dies, dass eine Trennung zwischen dem Fundament und dem Boden auftritt. Deshalb ist es notwendig, die Berechnung fortzusetzen, um sicherzustellen, dass keine negativen Sohldrücke an der Trennungszone auftreten.

Für das Bettungsmodulverfahren ist es leicht, die negativen Sohldrücke zu entfernen durch Löschen des entsprechenden Bettungsmoduls k_s an Knoten, die negative Sohldrücke haben. Dann wird die Berechnung so lange wiederholt, bis keine negativen Sohldrücke mehr erscheinen.

Für elastische Platten nach dem Steifemodulverfahren haben *Cheung/ Nag* (1968) ein Korrekturverfahren vorgeschlagen. Dieses wird verwendet durch Entfernen der entsprechenden Reihen und Spalten in der Flexibilitätsmatrix des Bodens [c] an allen Knoten, wo die Sohldrücke Zugspannungen aufweisen. Dann wird die Berechnung wiederholt mit Hilfe der modifizierten Steifigkeitsmatrix des Bodens [k_s], bis alle Sohldrücke positiv oder Null sind. Damit bleibt das Problem elastisch aber nichtlinear, weil die Sohldrücke unbekannt sind. *El Gendy* (1994) hat das Verfahren von *Cheung/ Nag* (1968) an starren Platten nach dem Steifemodulverfahren angewandt.

In diesem Beitrag wird eine rationelle alternative Methode dargestellt, um die negativen Sohldrücke zu entfernen. Die Behandlung der Plattentrennung für entweder elastische oder starre Platten nach dem Steifemodulverfahren ist der elastoplastischen Berechnung ähnlich. Nach der ersten Berechnung der Platte kann die Steifigkeit des Bodens als einzelne Feder von variablen Steifigkeiten k_{si} durch die bekannten Sohldrücke und entsprechende Setzungen dargestellt werden. Dann ist es leicht, die negativen Sohldrücke durch Löschen der Steifigkeit des Bodens k_{si} an den getrennten Knoten zu entfernen. Dann wird die Berechnung der Platte auf einzelnen Federn so lange wiederholt, bis keine negativen Sohldrücke mehr erscheinen.

Beispiel 7.1 Überprüfung der nichtlinearen Berechnung für das Bettungsmodulverfahren

1 Aufgabenstellung

Um die nichtlineare Berechnung des Programms *ELPLA* für das Bettungsmodulverfahren zu überprüfen, werden die Ergebnisse eines Rechteckfundaments auf elastischer Bettung von *Hasnien* (1993) mit denen des Programms *ELPLA* verglichen. Es wird ein schlaffes quadratisches Fundament von 0.12 [m] Dicke und 2 [m] × 2 [m] Größe untersucht, wie im Bild 7.4 gezeigt.

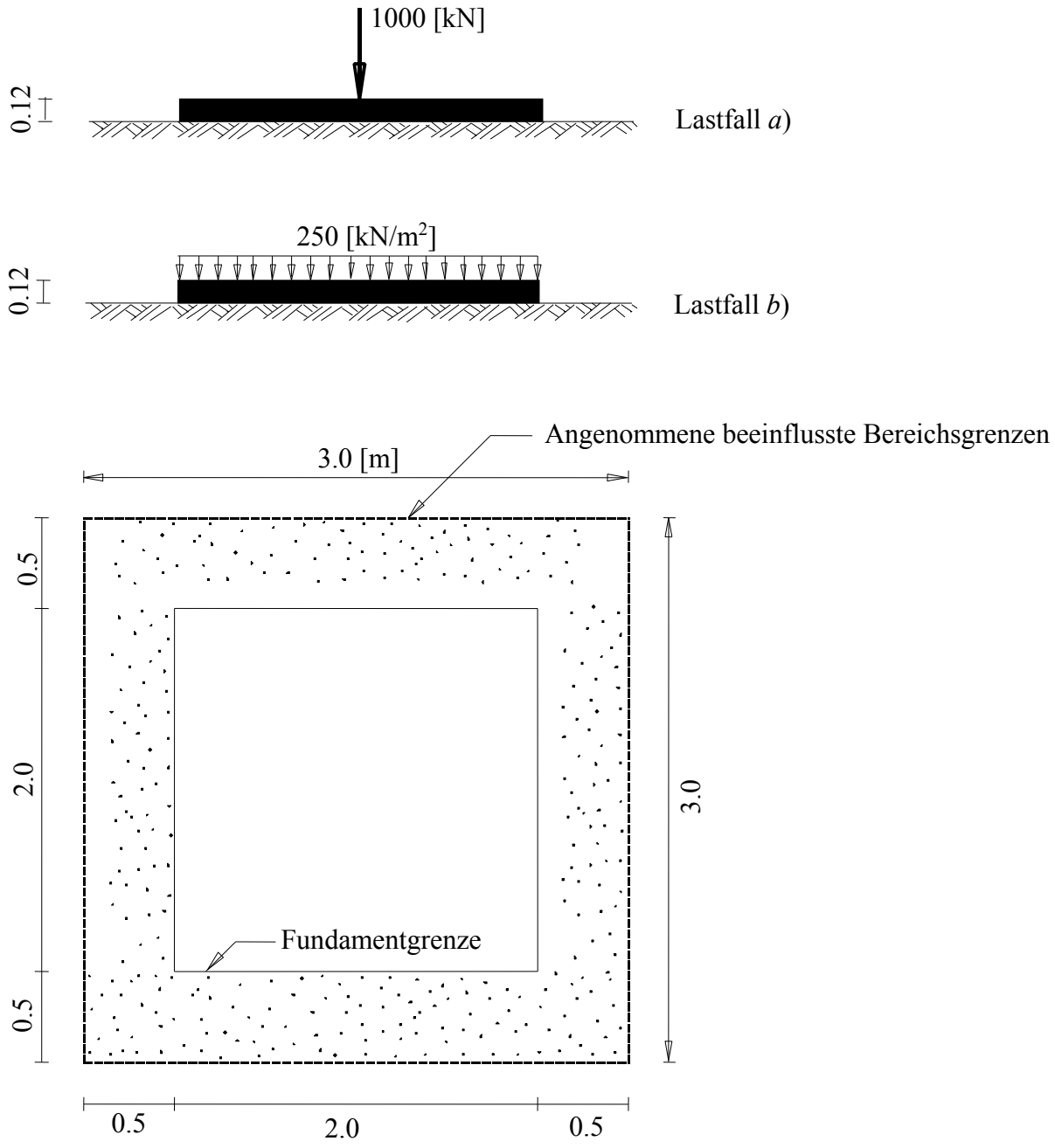


Bild 7.4 Fundamentgeometrie und Belastung

2 Bodenkennwerte

Der Bettungsmodul des Bodens unter dem Fundament ist $k_s = 50\,000$ [kN/m^3] und die Tragfähigkeit des Bodens beträgt $q_{ult} = 600$ [kN/m^2].

3 Materialkennwerte des Betons

Es wird angenommen, dass das Fundamentmaterial die folgenden Parameter hat:

Elastizitätsmodul	$E_b = 1.4 \times 10^7$	[kN/m^2]
*Poisson*zahl	$\nu_b = 0.15$	[-]
Wichte	$\gamma_b = 25$	[kN/m^3]

4 Berechnung

Zwei Lastfälle werden untersucht:

a)	Das Fundament trägt eine Einzellast von 1000	[kN]
b)	Das Fundament trägt eine gleichförmige Last von 250	[kN/m^2]

Zur Untersuchung der Bodensetzung außerhalb der Fundamentgrenzen aufgrund der nichtlinearen Berechnung werden umliegende Elemente von 0.001 [m] Dicke um das Fundament herum angenommen. Fundament und umliegende Elemente werden in 144 quadratische Elemente unterteilt, jedes Element hat Abmessungen von 0.25 [m] × 0.25 [m].

5 Vergleich

Die Tabellen 7.1 und 7.2 zeigen den Vergleich der Ergebnisse des Programms *ELPLA* mit denen von *Hasnien* (1993) am Mittelpunkt des Fundaments für Setzungen s, Sohldrücke q und Momente m_x. Aus diesen Tabellen ist ersichtlich, dass die Ergebnisse beider Berechnungen gut übereinstimmen.

Tabelle 7.1 Vergleich der Ergebnisse aus dem Programm *ELPLA* mit denen von *Hasnien* (1993)

am Mittelpunkt des Fundaments
(Das Fundament trägt eine Einzellast von 1000 [kN])

Ergebnisse	Typ der Berechnung	*Hasnien* (1993)	*ELPLA*
Setzungen s [cm]	Lineare Berechnung	1.78	1.85
	Nichtlineare Berechnung	2.55	2.58
Sohldrücke q [kN/m^2]	Lineare Berechnung	535	556
	Nichtlineare Berechnung	337	338
Momente m_x [kN.m/m]	Lineare Berechnung	213	272
	Nichtlineare Berechnung	229	293

Tabelle 7.2 Vergleich der Ergebnisse des Programms *ELPLA* mit denen von *Hasnien* (1993) am Mittelpunkt des Fundaments
(Das Fundament trägt eine gleichförmige Last von 250 [kN/m^2])

Ergebnisse	Typ der Berechnung	*Hasnien* (1993)	*ELPLA*
Setzungen s [cm]	Lineare Berechnung	0.78	0.81
	Nichtlineare Berechnung	1.18	1.18
Sohldrücke q [kN/m^2]	Lineare Berechnung	232	242
	Nichtlineare Berechnung	222	223
Momente m_x [kN.m/m]	Lineare Berechnung	12	9
	Nichtlineare Berechnung	13	12

Beispiel 7.2 Nichtlineare Berechnung von ausmittig belasteten Rechteckfundamenten

1 Aufgabenstellung

Zum Vergleich mit komplexen Fundamentformen ist noch keine analytische Lösung vorhanden. Deshalb wird zur Überprüfung der gegenwärtigen nichtlinearen Berechnung von Fundamenten ein einfaches Annahmemodell betrachtet, und zwar das Rechteckfundament im Bild 7.5, mit den Kantenlängen L = 8.0 [m] und B = 6.0 [m]. Die x- und die y- Achse sind Hauptachsen, die sich im Schwerpunkt s der Rechteckfläche schneiden. Die Stellung von N ist durch die Ordinaten $x = e_x$ und $y = e_y$ festgelegt. Das Fundament ist ausmittig belastet mit N = 2000 [kN]. Innerhalb der Rechteckfläche sind 5 Zonen dargestellt. Je nach der Stellung von N in einer dieser Zonen errechnet sich ein anderer Sohldruckkörper nach *Irles/ Irles* (1994). In diesem Beispiel wird die maximale Eckpressung $max\ q_o$ bei Anwendung der gegenwärtigen Berechnung mit dem Programm *ELPLA* für jede Zone erhalten und mit anderen analytischen Lösungen verglichen, die für ein rechteckiges Fundament verfügbar sind.

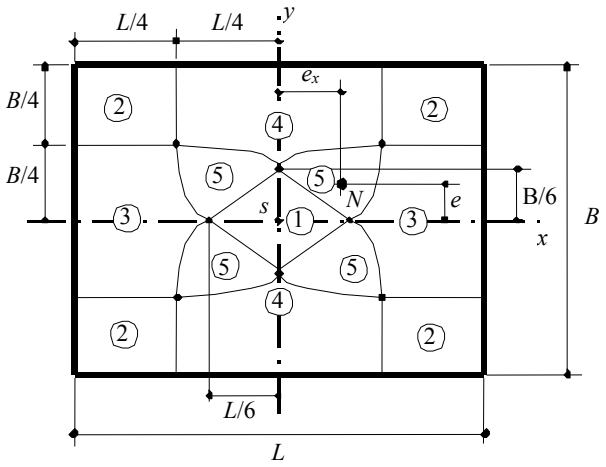


Bild 7.5 Einteilung der rechteckförmigen Sohlfläche in 5 Zonen für die Stellung der Lastkomponenten N

2 Handberechnung der maximalen Eckpressung $max\ q_o$

Zone (1)

Die maximale Eckpressung $max\ q_o$ für die Zone (1) kann direkt mit Verwendung der Gleichung 7.1 erhalten werden, wobei in diesem Fall die Resultierende N im Fundamentkern liegt und keine Trennung vorkommen wird. Die maximalen Eckpressungen $max\ q_o$ der anderen vier Zonen können bei Verwendung der verfügbaren analytischen Lösungen nach *Irles/ Irles* (1994), *Teng* (1962) und *Graßhoff/ Kany* (1997) wie folgt erhalten werden:

Zone (2)
Drei abgetrennte Ecken; e_x = 3.0 [m], e_y = 2.25 [m]

Die maximale Eckpressung $max\ q_o$ für Zone (2), Bild 7.6a, kann nach *Irles/ Irles* (1994) aus der folgenden Gleichung errechnet werden:

$$\max q_o = \frac{3\,N}{2\,(L-2\,e_x)(B-2\,e_y)}$$

$$\max q_o = \frac{3\times 2000}{2\,(8-2\times 3)(6-2\times 2.25)} = 1000\,[\mathrm{kN/m^2}]$$

Zone (3)
Zwei abgetrennte Ecken; e_x = 3.0 [m], e_y = 0.0 [m]

Die maximale Eckpressung *max* q_o für Zone (3), Bild 7.6b, kann nach *Teng* (1962) aus der folgenden Gleichung errechnet werden:

$$\max q_o = \frac{N}{L\,B}\left(\frac{4\,L}{3\,L-6\,e_x}\right)$$

$$\max q_o = \frac{2000}{8\times 6}\left(\frac{4\times 8}{3\times 8-6\times 3}\right) = 222.22\,[\mathrm{kN/m^2}]$$

Zone (4)
Zwei abgetrennte Ecken; e_x = 1.0 [m], e_y = 2.25 [m]

Die maximale Eckpressung *max* q_o für Zone (4), Bild 7.6c, kann nach *Graßhoff/ Kany* (1997) aus der folgenden Gleichung errechnet werden:

$$t = \frac{L}{12}\left(\frac{L}{e_x}+\sqrt{\frac{L^2}{e_x^{\,2}}-12}\right) = \frac{8}{12}\left(\frac{8}{1.0}+\sqrt{\frac{8^2}{1.0^2}-12}\right) = 10.141\,[\mathrm{m}]$$

$$\tan\beta = \frac{3}{2}\left(\frac{B-2\,e_x}{t+e_x}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{6-2\times 2.25}{10.141+1.0}\right) = 0.202$$

$$\max q_o = \frac{12\,N}{L\tan\beta}\,\frac{L+2\,t}{L^2+12\,t^2} = \frac{12\times 2000}{8\times 0.202}\,\frac{8+2\times 10.141}{8^2+12\times 10.141^2} = 323.58\,[\mathrm{kN/m^2}]$$

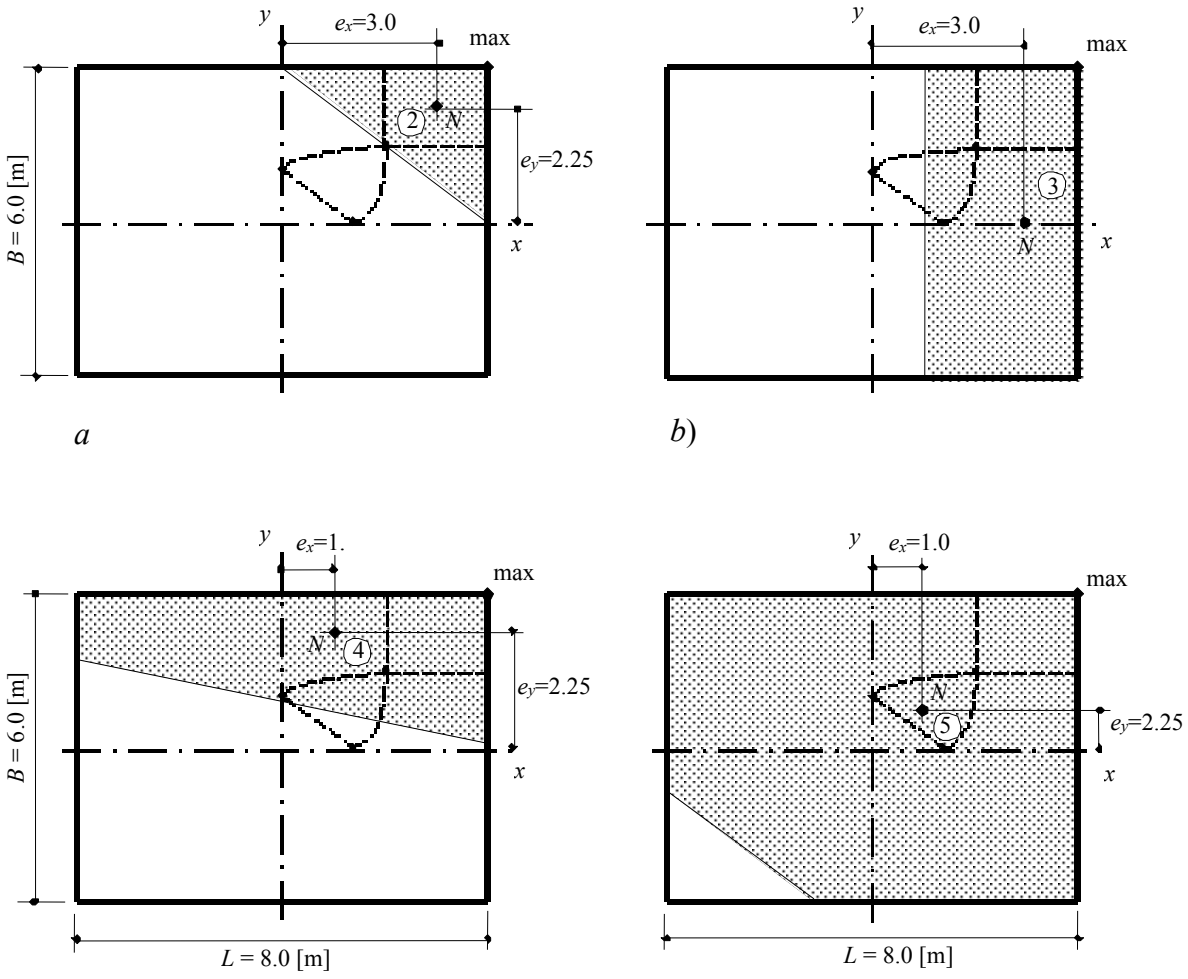


Bild 7.6 Die Resultierende *N* liegt in den vier Zonen (2) bis (5)

Zone (5)
Nur eine abgetrennte Ecke; e_x = 1.0 [m], e_y = 0.75 [m]

Die maximale Eckpressung *max* q_o für Zone (5), Bild 7.6d, kann nach *Graßhoff/ Kany* (1997) aus der folgenden Gleichung errechnet werden:

$$K = \frac{e_x}{L} + \frac{e_y}{B} = \frac{1.0}{8} + \frac{0.75}{6} = 0.25$$

$$\max q_o = \frac{N}{L\,B}\,K\left[12 - 3.9\left(6\,K - 1\right)\left(1 - 2\,K\right)\left(2.3 - 2\,K\right)\right]$$

$$\max q_o = \frac{2000}{8 \times 6}\,K\left[12 - 3.9\left(6 \times 0.25 - 1\right)\left(1 - 2 \times 0.25\right)\left(2.3 - 2 \times 0.25\right)\right]$$

$$\max q_o = 106.72\,[\mathrm{kN/m^2}]$$

3 Berechnung der maximalen Eckpressung *max* q_o beim Programm *ELPLA*

Zum Vergleich der gegenwärtigen Berechnung beim Programm *ELPLA* mit anderen analytischen Lösungen für die maximale Eckpressung *max* q_o wird das Rechteckfundament in verfeinerte Quadratelemente unterteilt.

Jedes Element hat eine Seite von 0.1 [m]. Die Ergebnisse der Berechnung mit den verfügbaren analytischen Lösungen werden in Tabelle 7.3 verglichen. Sie zeigt, dass die Ergebnisse der analytischen Berechnung und des Iterationsverfahrens gut übereinstimmen.

Tabelle 7.3 Vergleich zwischen gegenwärtiger Berechnung und analytischen Lösungen für die maximale Eckpressung *max* q_o [kN/m^2]

Zone Nr.	Zone (2)	Zone (3)	Zone (4)	Zone (5)
Durchgeführte Berechnung	*Irles/ Irles* (1994)	*Teng* (1962)	*Graßhoff/ Kany* (1997)	
	1000	222	324	107
ELPLA	1017	223	325	106
Differenz [%]	1.67	0.45	0.31	0.94

Beispiel 7.3 Nichtlineare Berechnung beim ausmittig belasteten Kreisfundament

1 Aufgabenstellung

Dieses Beispiel wird gewählt, um die Anwendbarkeit der nichtlinearen Berechnung von Fundamenten mit der Einfachen Annahme für verschiedene Fundamentarten zu zeigen. Die Ergebnisse der nichtlinearen Berechnung für eine Kreisplatte nach *Teng* (1962) werden mit der hier durchgeführten Berechnung mit dem Programm *ELPLA* verglichen.

Eine Kreisplatte (Bild 7.7) mit Radius $r = 5$ [m] wird untersucht. Die Platte ist exzentrisch belastet mit $N = 2000$ [kN]. Die Lage der Resultierenden N ist durch die Ordinate e definiert.

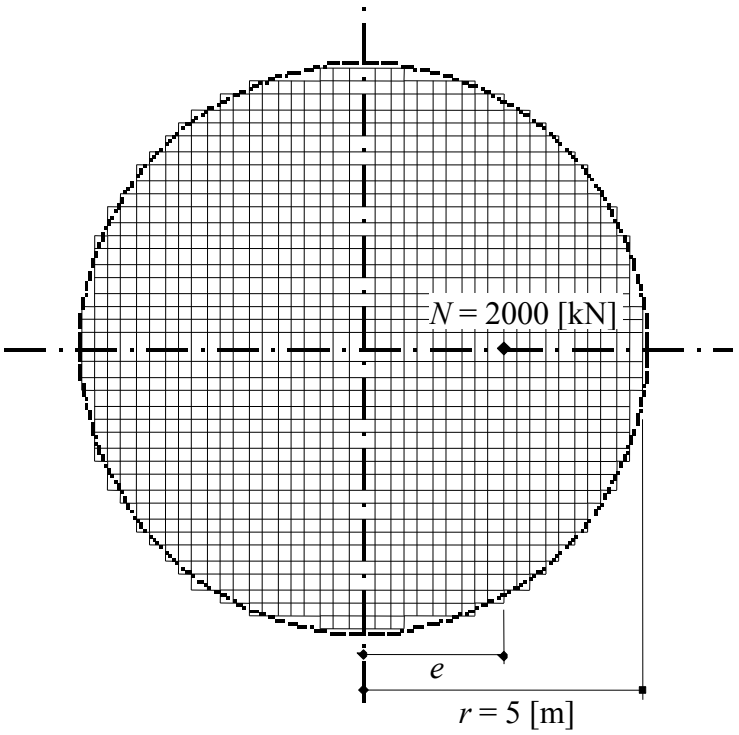


Bild 7.7 Grundriss der Kreisplatte mit Abmessungen und FE-Netz

2 Berechnung

2.1 Einfache Annahme

Für diesen Vergleich zwischen den Ergebnissen wird die Platte in 1238 Quadratelemente unterteilt. Jedes Element hat eine Größe von 0.25 [m]. Die Sohldrücke q unter der Mitte der Platte sind in Bild 7.8 für verschiedene Verhältnisse e/r enthalten. Es zeigt auch die Trennungszonen. Die Verhältnisse e/r liegen zwischen 0.25 und 0.75.

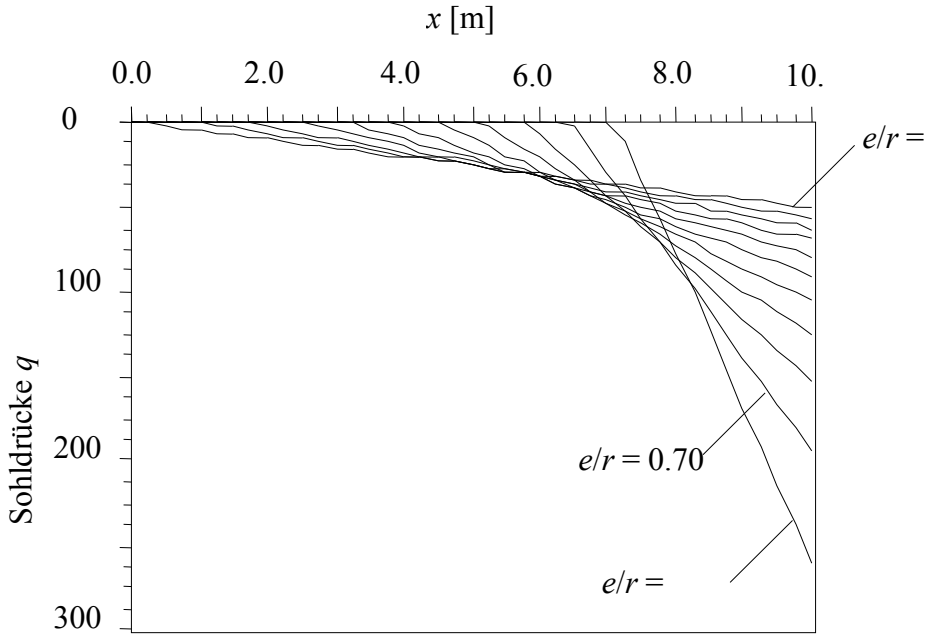


Bild 7.8 Sohldrücke q [kN/m^2] unter der Kreisplatte an verschiedenen Werten von e/r

Der Koeffizient $k = max\ q_o\ \pi\ r^2/N$ bei verschiedenen Verhältnissen e/r und bei Anwendung der hier erläuterten Berechnung und von *Teng* (1962) wird in Bild 7.9 gezeigt und verglichen. Aus diesem Bild kann geschlossen werden, dass die Ergebnisse der nichtlinearen Berechnung der Kreisplatte, der erläuterten Berechnung mit dem Programm *ELPLA* und der von *Teng* (1962) gut übereinstimmen.

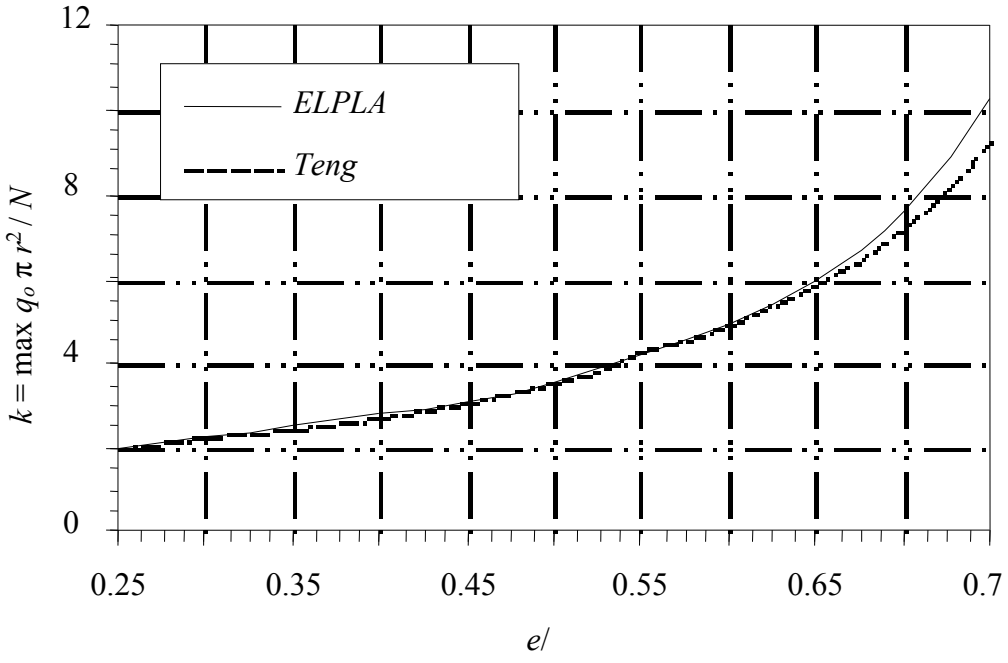


Bild 7.9 Koeffizient $k = max\ q_o\ \pi\ r^2/N$ an verschiedenen Verhältnissen e/r

2.2 Starre Platte nach dem Steifemodulverfahren

Obwohl es leicht ist, geschlossene Formeln für Plattentrennung im Fall von regelmäßigen Platten für die Einfache Annahme aufzustellen, ist es aber schwierig, solche Formeln für kreisförmige starre Platten aufzustellen. Deshalb wird nun dieselbe Kreisplatte wieder für eine starre Platte nach dem Steifemodulverfahren berechnet, um die Anwendbarkeit der nichtlinearen Berechnung von Platten bei verschiedenen Baugrundmodellen zu zeigen. Der Untergrund unter der Platte besteht aus einer Schicht aus Sand mit folgenden Parametern:

Steifemodul	$E_s = 12\,000$	[kN/m^2]
*Poisson*zahl	$\nu_s = 0.25$	[-]
Tiefe der Schicht	$z = 10$	[m]

Der Kern der Kreisplatte, in dem keine Trennung vorkommt, wenn die Resultierende N darin liegt, hat einen Radius $r/4$ bei der Einfachen Annahme, während er im Fall einer starren Platte nach dem Steifemodulverfahren einen Radius $r/3$ hat. Deswegen wird die starre Platte für verschiedene Verhältnisse e/r von 0.35 zu 0.75 berechnet. Bild 7.10 zeigt die Sohldrücke q unter der Platte an verschiedenen Werten von e/r, während Bild 7.11 die Setzungen s zeigt.

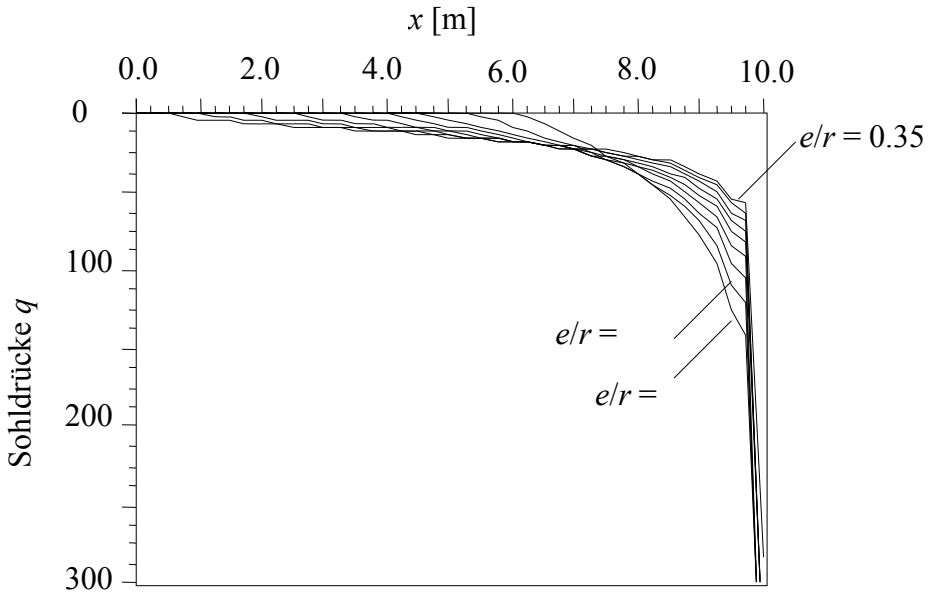


Bild 7.10 Sohldrücke q [kN/m^2] unter der starren Kreisplatte bei verschiedenen Werten von e/r

Ein Vergleich zwischen Bild 7.8 und Bild 7.10 zeigt, dass die wirksame Kontaktfläche für die Platte im Fall der Einfachen Annahme weniger ist als bei starrer Platte nach dem Steifemodulverfahren mit demselben entsprechenden Verhältnis e/r. Die wirksame Kontaktfläche und die wirksame Breite können verwendet werden, um die Bruchlast für die Platte zu bestimmen, die exzentrisch belastet ist. Bild 7.11 zeigt, dass die Trennungszonen negative Setzungen haben.

Die wirksame Kontaktbreite c für die Kreisplatte wird in dimensionsloser Form in Bild 7.12 gezeigt. Je nach der Größe der Lastexzentrizität und dem Radius der Platte kann, wenn die Maße der wirksamen Breite und die wirksamen Flächen bestimmt sind, mit Verwendung der Gl. 7.6 die

Bruchlast der Platte bestimmt werden.

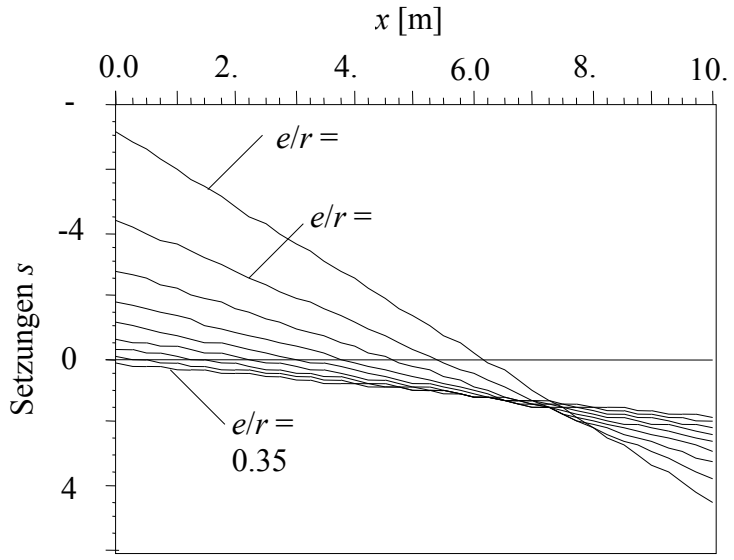


Bild 7.11 Setzungen s [cm] unter der starren Kreisplatte bei verschiedenen Werten von e/r

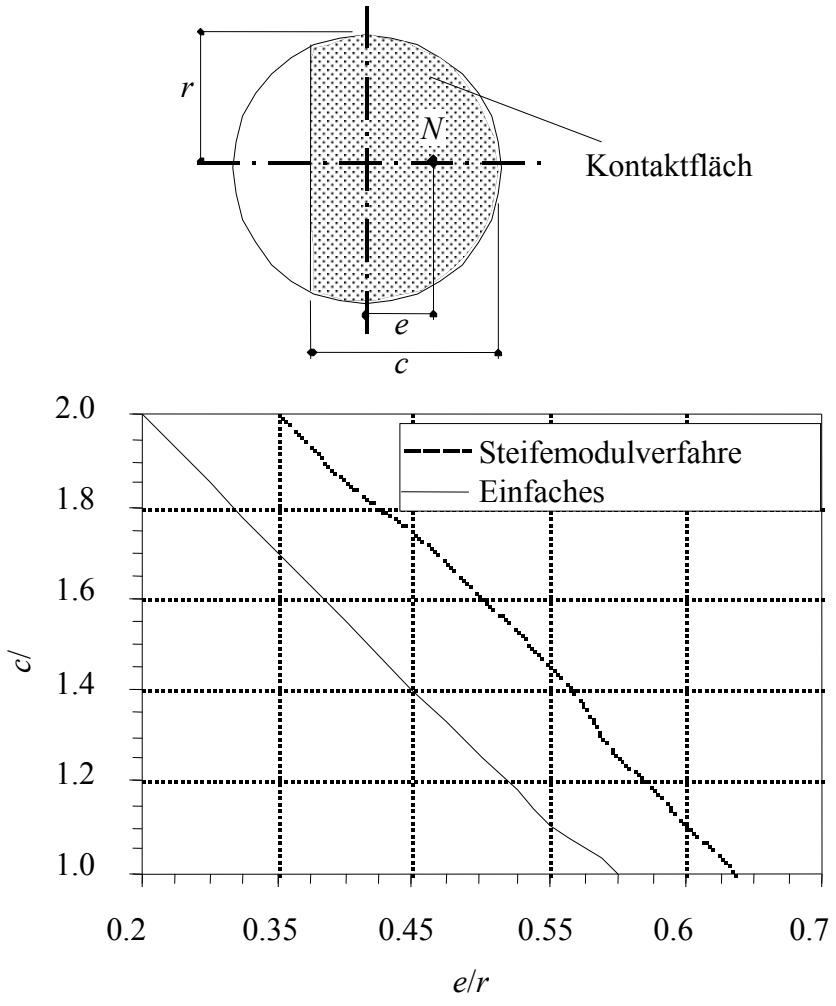


Bild 7.12 Diagramm zur Bestimmung der Kontaktbreite c für die Kreisplatte mit exzentrischen Lasten

Beispiel 7.4 Elastoplastische Berechnung einer Platte nach dem Steifemodulverfahren

1 Aufgabenstellung

Eine der Schwierigkeiten bei Anwendung des Steifemodulverfahrens für praktische Probleme ist das Auftreten hoher Sohldrücke an den Plattenrändern, besonders wenn die Platte hohen Lasten ausgesetzt wird. Die Erscheinung der plastischen Zonen an den Plattenrändern bezieht sich auf die Benutzung von traditionellen mathematischen Baugrundmodellen in der Berechnung, die von der Theorie der Elastizität abhängen. Deshalb wird nun ein Beispiel gerechnet, um die Anwendbarkeit der entwickelten nichtlinearen Berechnung mit Umverteilung der hohen Sohldrücke an den Rändern bei elastischen und auch bei starren Platten zu zeigen.

Eine rechteckige Platte mit den Abmessungen von 8 × 16 [m^2] wird gewählt und unterteilt in 512 Quadratelemente. Jedes Element hat eine Seitenlänge von 0.5 [m], wie im Bild 7.13 gezeigt. Die Platte wird gleichförmig mit 600 [kN/m^2] belastet.

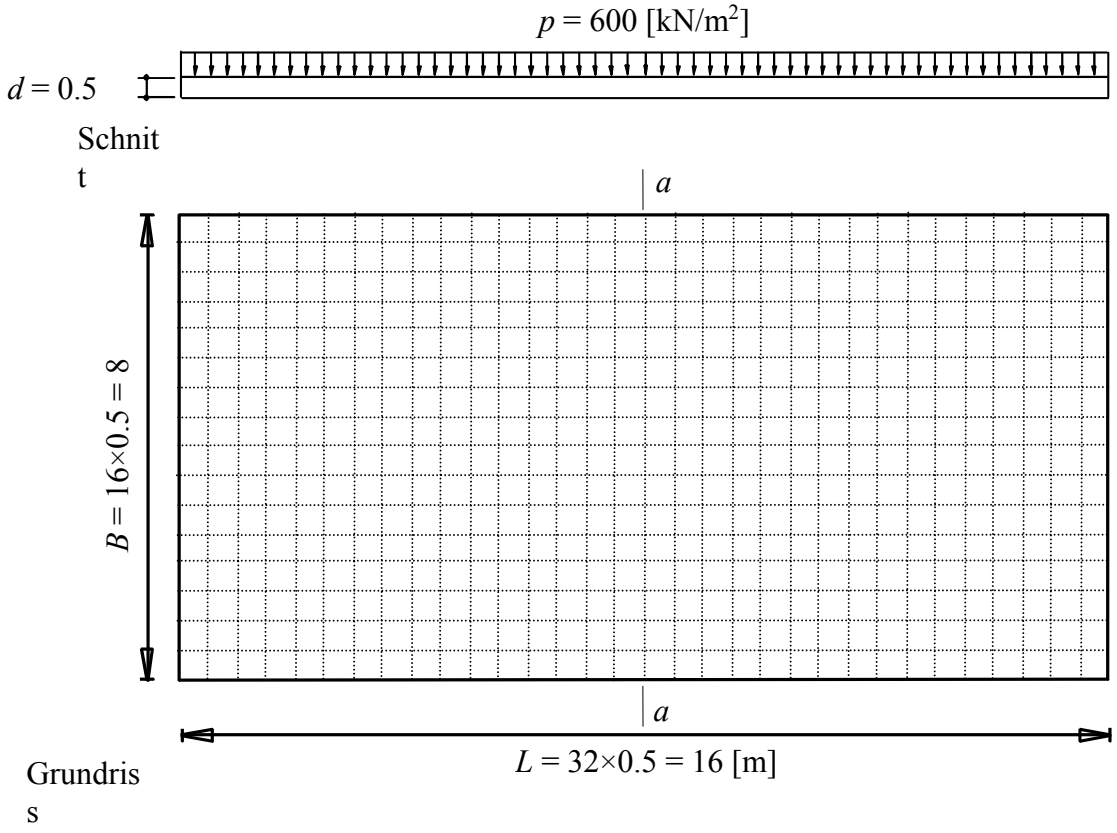


Bild 7.13 Plattengeometrie, Belastung und FE-Netz

2 Bodenkennwerte

Die Platte liegt auf einer gleichmäßigen Sandschicht von 10 [m] Mächtigkeit. Unter der Sandschicht ist eine starre Basis (Fels). Es wird angenommen, dass die Sandschicht die folgenden Parameter hat:

Steifemodul	E_s = 12 000	[kN/m^2]
*Poisson*zahl	ν_s = 0.25	[-]

Wichte	$\gamma_s = 17.5$	[kN/m^3]
Reibungswinkel	$\varphi = 27.5$	[°]
Kohäsion	$c = 0.0$	[kN/m^2]
Gründungstiefe unter Gelände	$t_f = 0.5$	[m]

3 Materialkennwerte des Betons und Plattendicke

Es wird angenommen, dass Plattenmaterial und Plattendicke die folgenden Parameter haben:

Plattendicke	$d = 0.5$	[m]
Elastizitätsmodul	$E_b = 3 \times 10^7$	[kN/m^2]
*Poisson*zahl	$\nu_b = 0.15$	[-]
Wichte	$\gamma_b = 0.0$	[kN/m^3]

Die Wichte des Betons wird mit $\gamma_b = 0.0$ [kN/m^3] gewählt. Damit wird das Eigengewicht der Platte vernachlässigt.

4 Berechnung

Die nichtlineare Berechnung wird sowohl für eine elastische als auch für eine starre Platte nach dem Steifemodulverfahren durchgeführt. Zwei Fälle zur Tragfähigkeit q_{ult} werden wie folgt berücksichtigt:

i) Die Tragfähigkeit q_{ult} ist gleichförmig.
Ihr Wert wird aus der Gl. 7.6 erhalten, $q_{ult} = 1603$ [kN/m^2]

ii) Die Tragfähigkeit q_{ult} ist variabel. Die Tragfähigkeit q_{ult} an den Plattenrändern wird durch das zweite Glied der Gl. 7.6 bestimmt $q_{ult} = \gamma_1 \, t_f \, N_d \, \nu_d = 951$ [kN/m^2], während die Tragfähigkeit q_{ult} am Plattenzentrum aus Gl. 7.6 bestimmt wird. Das dritte Glied wird verdoppelt $q_{ult} = \gamma_1 \, t_f \, N_d \, \nu_d + 2 \, \gamma_2 \, B \, N_b \, \nu_b = 1753$ [kN/m^2].

Bild 7.14 zeigt die Isolinien der variablen Tragfähigkeit q_{ult}.

Leider gibt es bis jetzt keine verfügbare Methode, um die Tragfähigkeit des Bodens bei unregelmäßigem Sohldruck zu bestimmen, da die Tragfähigkeitsgleichungen für einen gleichförmigen Sohldruck unter der Platte abgeleitet sind.

In diesem Beispiel wird die Variabilität von q_{ult} unter der Platte entsprechend dem Prinzip von Gleichgewichtskräften, die Einwirkung auf die Platte und den Boden im Grenzzustand gewählt. Im ersten Glied der Gl. 7.6 wird der Einfluss der seitlichen Auflast neben dem Fundament, $\gamma_1 \, t_f \, N_d \, \nu_d$, und im dritten Glied die Fundamentgröße $\gamma_2 \, B \, N_b \, \nu_b$ bestimmt. Der Sohldruckanteil des zweiten Glieds ist gleichmäßig und der des dritten Glieds dreieckförmig verteilt. Im Grenzzustand liegt also eine dachförmige Sohldruckverteilung vor (Bild 7.15).

Um die gewählte Variable q_{ult} unter der Platte zu berücksichtigen, werden fünf Bohrprofile *B*1 bis *B*5 betrachtet, wie im Bild 7.14 gezeigt. Die Randbohrprofile führen zu $q_{ult} = 951$ [kN/m^2], während

das zentrale Bohrprofil zu q_{ult} = 1753 [kN/m^2] führt. Nun wird die Interpolation mit den Bohrprofilen durchgeführt, um das variable q_{ult} über allen Knoten auf der Platte zu erhalten.

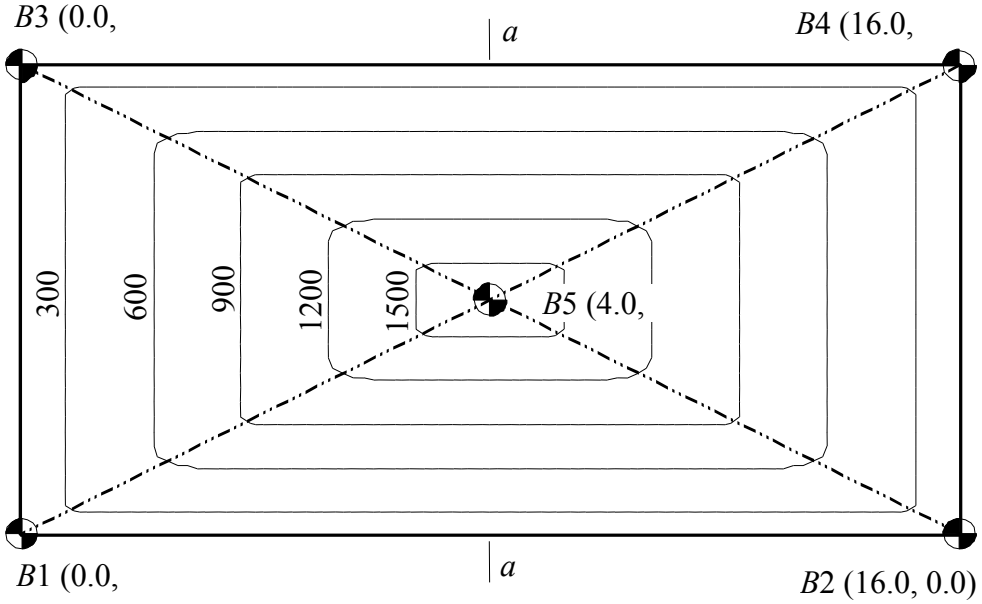


Bild 7.14 Isolinien der variablen Tragfähigkeit q_{ult} [kN/m^2]

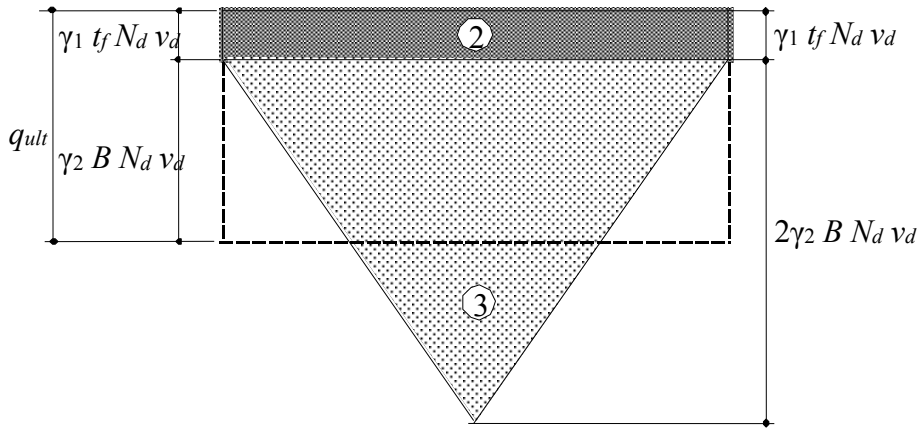


Bild 7.15 Tragfähigkeit im Grenzzustand des Bodens (Schnitt a-a)

5 Diskussion der Ergebnisse

Die Sohldrücke q im Schnitt *a-a* der Platte im Fall von gleichförmigen q_{ult} sind in den Bildern 7.16 und 7.17 gezeigt, während jene im Fall von variablen q_{ult} in den Bildern 7.18 und 7.19 gezeigt werden. Diese Bilder zeigen, dass sich bei linearer Berechnung der sowohl elastischen als auch starren Platten hohe Sohldrücke an den Plattenrändern ergeben. Wie bei der nichtlinearen Berechnung zu erwarten, verschieben sich die Sohldrücke von den Rändern zum Zentrum der Platte, was zum Verlust der Tragfähigkeit führt. Bilder 7.16 und 7.17 (Fall gleichförmige q_{ult}) zeigen, dass die Sohldrücke an allen Knoten auf der Platte kleiner sind als an den Plattenrändern. Im Gegensatz zum Fall variabler Sohldrücke q_{ult} nehmen die Sohldrücke eine ähnliche Form wie zur Grenzlinie von q_{ult} (Bilder 7.18 und 7.19).

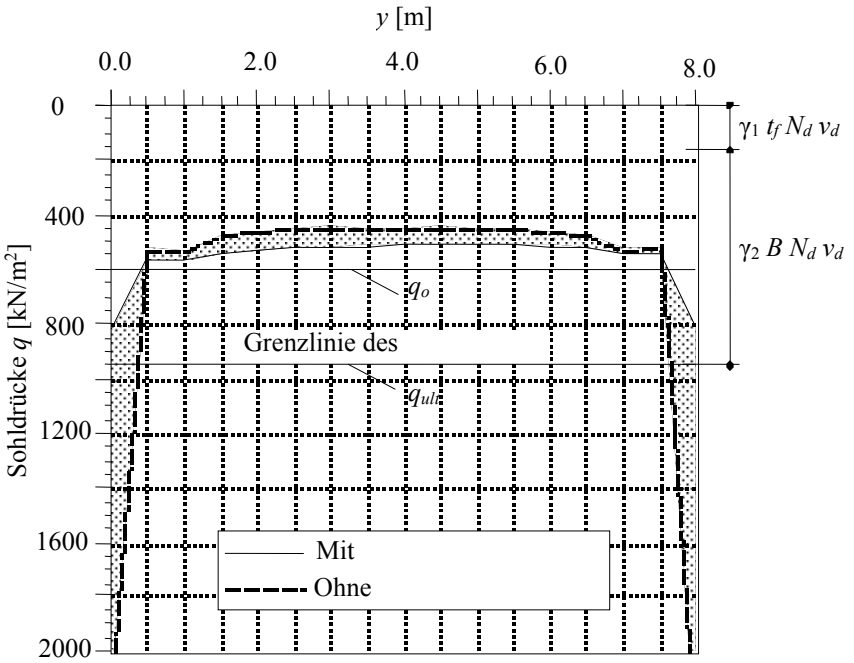


Bild 7.16 Sohldrücke q [kN/m^2] im Schnitt *a-a* mit und ohne Sohldruckbegrenzung (elastische Platte - gleichförmige Tragfähigkeit)

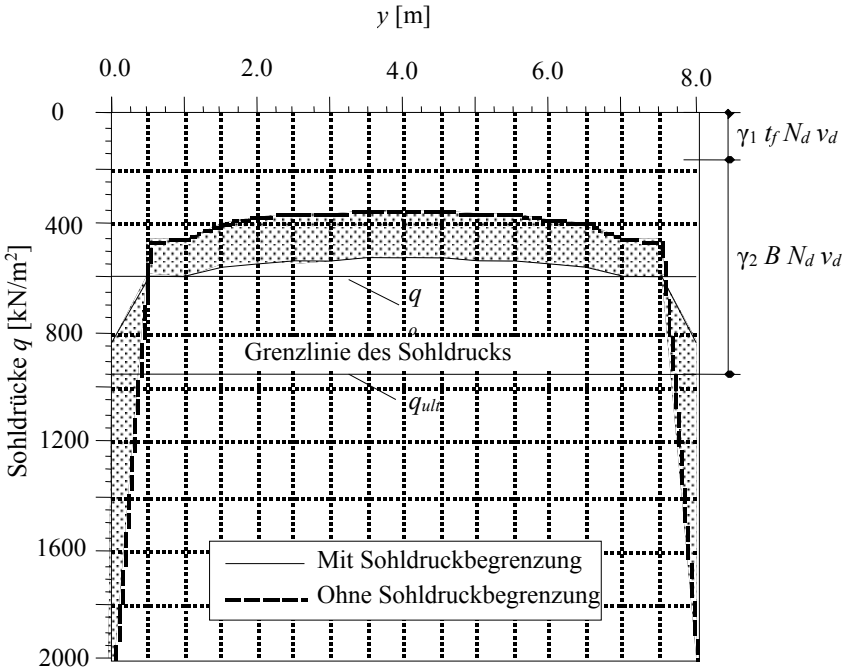


Bild 7.17 Sohldrücke q [kN/m^2] im Schnitt *a-a* mit und ohne Sohldruckbegrenzung (starre Platte - gleichförmige Tragfähigkeit)

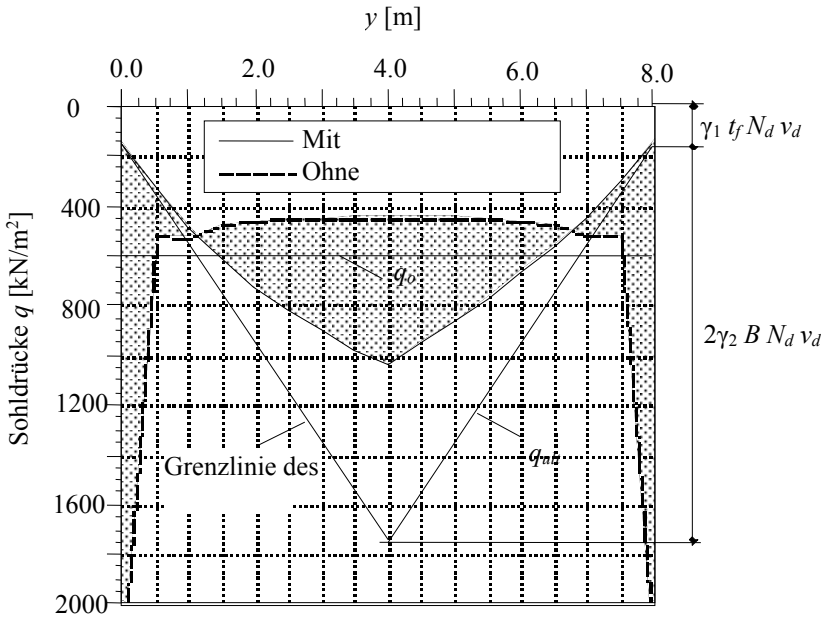


Bild 7.18 Sohldrücke q [kN/m^2] im Schnitt *a-a* mit und ohne Sohldruckbegrenzung (elastische Platte - variable Tragfähigkeit)

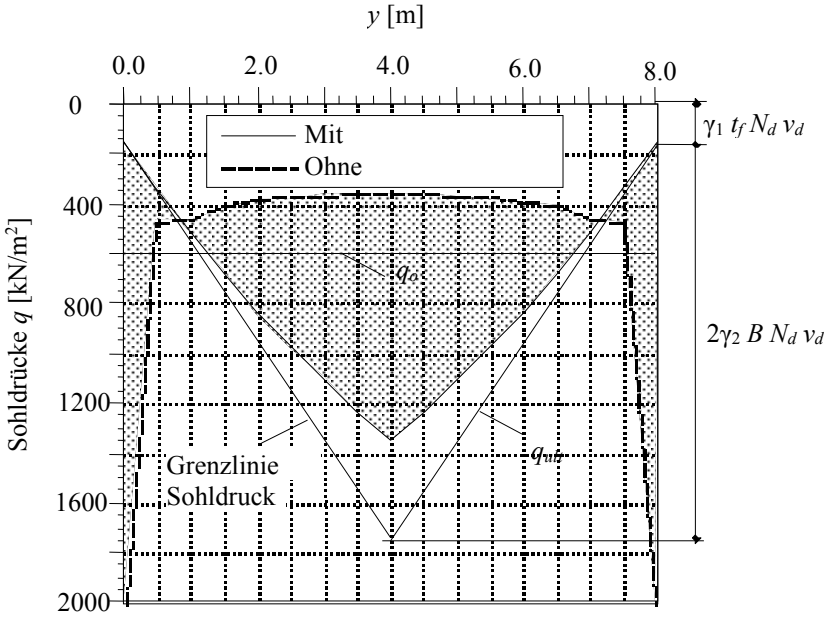


Bild 7.19 Sohldrücke q [kN/m^2] im Schnitt *a-a* mit und ohne Sohldruckbegrenzung (starre Platte - variable Tragfähigkeit)

Die Wirkung der Umverteilung der Sohldrücke auf die Momente m_y im Schnitt *a-a* der Platte wird im Bild 7.19 für den Fall von gleichförmiger q_{ult} und in Bild 7.20 für den Fall von variabler q_{ult} angezeigt. Die Bilder zeigen, dass die Momente aufgrund der Umverteilung der Sohldrücke unter der Platte beträchtlich verändert werden. Im Fall von variablem q_{ult} werden nicht nur die Momente verändert, sondern auch das Vorzeichen der Momente. Im Fall von gleichförmigem q_{ult}, werden die maximalen Momente m_y auf 81 [%] reduziert, während sie im Fall von variablem Sohldruck q_{ult} mehr als doppelt reduziert wurden.

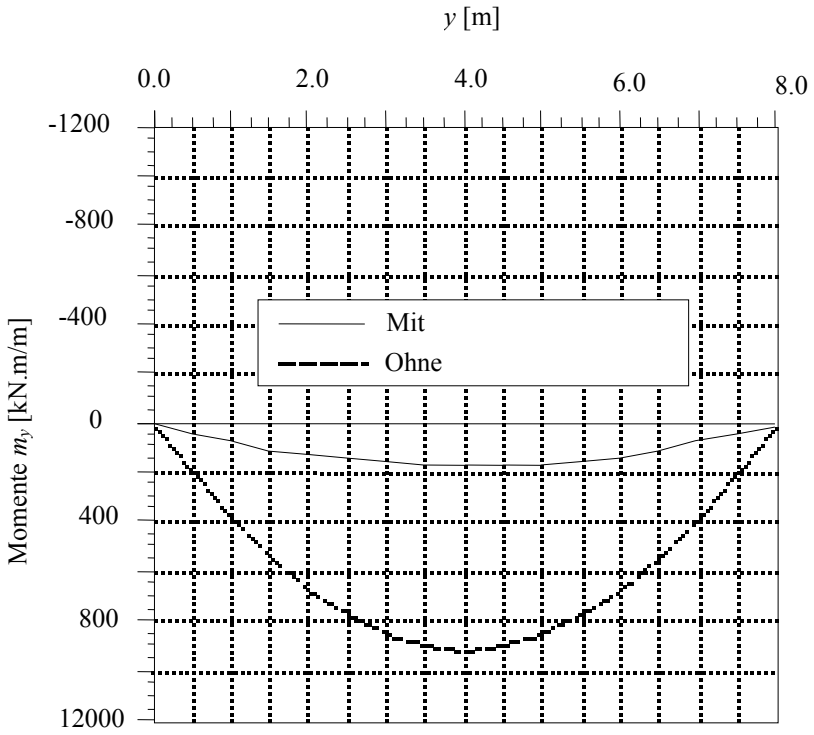


Bild 7.20 Momente m_y [kN.m/m] im Schnitt *a-a* mit und ohne Sohldruckbegrenzung (elastische Platte - gleichförmige Tragfähigkeit)

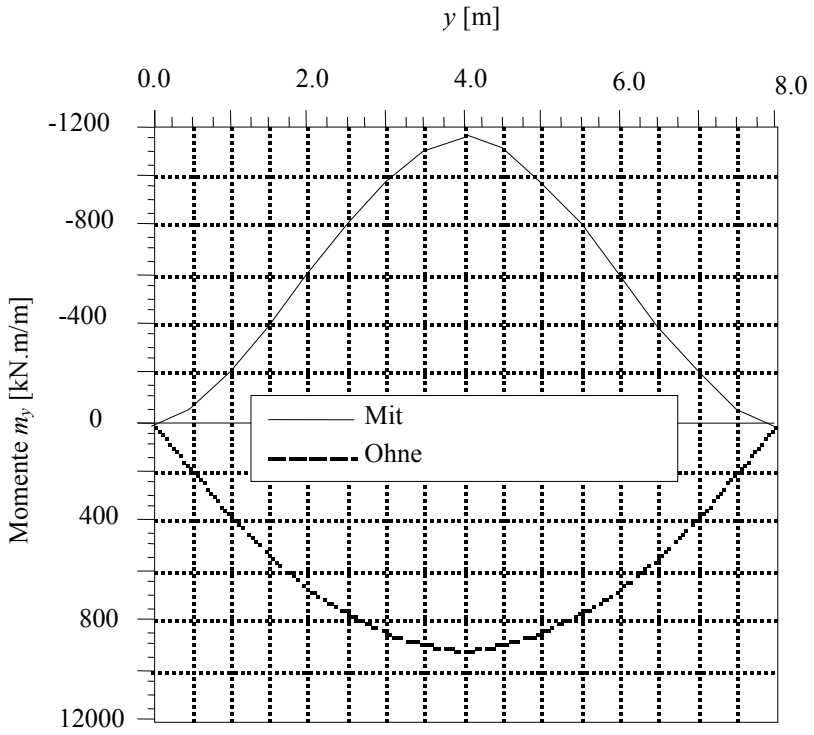


Bild 7.21 Momente m_y [kN.m/m] im Schnitt *a-a* mit und ohne Sohldruckbegrenzung (elastische Platte - variable Tragfähigkeit)

Abschnitt 8

Baugrundeigenschaften

Inhalt

8.1	Allgemeines	8- 2
8.2	*Poisson*zahl ν_s	8- 2
8.3	Steifemoduli E_s und W_s und Raumgewichte γ_s	8- 3
8.4	Elastizitätsmoduli E und W	8- 6
8.5	Kompressionsbeiwert C_c und Anfangsporenzahl e_o	8- 7
8.6	Scherparameter φ und c	8- 9
8.7	Bettungsmodul k_s	8-12
8.8	Zulässige Bodenpressung q_{all}	8-16
8.9	Abminderungsbeiwerte α	8-17

8 Baugrundeigenschaften

8.1 Allgemeines

Bei Berechnung von Fundamenten nach der FE-Methode mit dem Programm *ELPLA* können die Baugrunddaten bei jedem Knoten des FE-Netzes anders sein. Die elastischen Eigenschaften des Bodens werden im Programm *ELPLA* mit folgenden drei verschiedenen Möglichkeiten definiert:

1. Steifemodul E_s ($1/m_v$)
2. Elastizitätsmodul E
3. Kompressionsbeiwert C_c

wobei der Steifemodul E_s [kN/m^2] der reziproke Wert des Volumenänderungskoeffizienten m_v [m^2/kN] ist.

Für jede Bodenschicht wird eingelesen:

Tiefe der Schichtunterkante (gemessen an Geländehöhe)	z	[m]
Steifemodul für Erstbelastung (schichtweise konstant)	E_s	[kN/m^2]
Steifemodul für Wiederbelastung (schichtweise konstant)	W_s	[kN/m^2]
Elastizitätsmodul für Erstbelastung (schichtweise konstant)	E	[kN/m^2]
Elastizitätsmodul für Wiederbelastung (schichtweise konstant)	W	[kN/m^2]
Kompressionsbeiwert für Erstbelastung	C_c	[-]
Kompressionsbeiwert für Wiederbelastung	C_r	[-]
Anfangsporenzahl des Bodens	e_o	[-]
Wichte des Bodens	γ_s	[kN/m^3]
Reibungswinkel des Bodens	φ	[°]
Kohäsion des Bodens	c	[kN/m^2]
*Poisson*zahl des Bodens	ν_s	[-]

In den folgenden Abschnitten werden diese Eigenschaften des Bodens erläutert. Ferner werden die Bodenkennwerte für verschiedene Bodenarten in Tabellen zur Vorentwurfsbearbeitung gelistet.

8.2 *Poisson*zahl ν_s

Die *Poisson*zahl des Bodens ν_s wird als das Verhältnis seitlicher Stauchung zu longitudinaler Stauchung definiert. Die *Poisson*zahl ν_s kann aus Versuchen (z.B. K_o-Versuch) ermittelt werden. Hierbei ergibt sich dann die *Poisson*zahl aus dem Ruhedruckbeiwert K_o:

$$\nu_s = \frac{K_o}{1 + K_o} \quad \# \tag{8.1}$$

Tabelle 8.1 zeigt die *Poisson*zahl ν_s für verschiedene Bodenarten nach *Bowles* (1977). In jedem Fall liegt die *Poisson*zahl ν_s in den Grenzen $0 < \nu_s < 0.5$.

Tabelle 8.1 *Poisson*zahl ν_s für verschiedene Bodenarten nach *Bowles* (1977)

Bodenart	*Poisson*zahl ν_s [-]
Ton (gesättigt)	0.4 - 0.5
Ton (gesättigt)	0.1 - 0.3
sandiger Ton	0.2 - 0.3
Schluff	0.3 - 0.35
Sand (dicht)	0.2 - 0.4
Grobsand (Anfangsporenzahl = 0.4 - 0.7)	0.15
Feinsand (Anfangsporenzahl = 0.4 - 0.7)	0.25
Kies	0.1 - 0.4

8.3 Steifemoduli E_s und W_s und Raumgewichte γ_s

Die im Abschnitt 1 abgeleiteten Gleichungen zur Berechnung der Flexibilitätskoeffizienten erfordern entweder die Steifemoduli für Erstbelastung E_s und Wiederbelastung W_s oder die Elastizitätsmoduli für Erstbelastung E und Wiederbelastung W des Bodens. Die Steifemoduli E_s und W_s können aus dem Druck-Setzungs-Diagramm durch Kompressionsversuch mit behinderter Seitendehnung (z.B. Oedometer-Versuch) eingelesen werden, wie im Bild 8.1 gezeigt. In diesem Fall tritt die Verformung nur in senkrechter Richtung auf. Damit ist als *Poisson*zahl $\nu_s = 0$ einzugeben. Werden andere Steifemoduli E und W verwendet, so muss die *Poisson*zahl $\nu_s \neq 0$ gesetzt werden. In jedem Fall liegt die *Poisson*zahl ν_s in den Grenzen $0 < \nu_s < 0.5$.

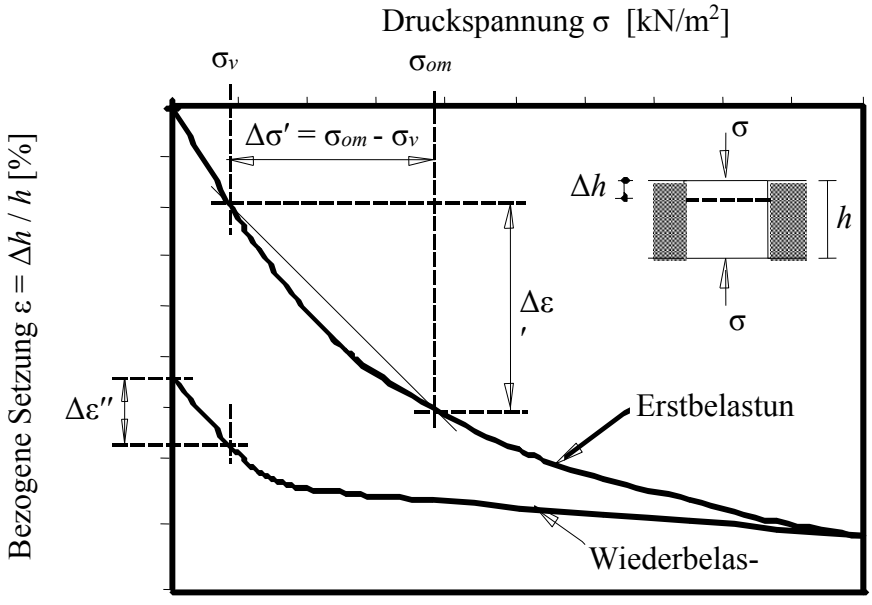


Bild 8.1 Druck-Setzungs-Diagramm aus Kompressionsversuch mit behinderter Seitendehnung (Oedometer-Versuch)

Der Steifemodul E_s [kN/m²] (oder W_s [kN/m²]) wird als das Verhältnis der Steigerung der Spannung $\Delta\sigma$ zu der Verminderung in bezogener Setzung $\Delta\varepsilon$ definiert (Bild 8.1):

$$\left.\begin{aligned} E_s &= \frac{\Delta\sigma'}{\Delta\varepsilon'} = \frac{\sigma_{om}\text{-}\sigma_v}{\Delta\varepsilon'} \\ W_s &= \frac{\Delta\sigma''}{\Delta\varepsilon''} = \frac{\sigma_v}{\Delta\varepsilon''} \end{aligned}\right\} \# \qquad (8.2)$$

wobei:

$\Delta\sigma'$	Steigerung der Spannung von σ_v zu σ_{om}	[kN/m^2]
σ_v	Spannung ist gleich der Vorbelastung	[kN/m^2]
σ_{om}	Spannung ist gleich der erwarteten mittleren Sohlpressung auf dem Boden	[kN/m^2]
$\Delta\varepsilon'$	Verminderung in bezogener Setzung aufgrund Spannung von σ_v zu σ_{om}	[-]
$\Delta\sigma''$	Steigerung der Spannung aufgrund Erstbelastung	[kN/m^2]
$\Delta\varepsilon''$	Verminderung in bezogener Setzung aufgrund Wiederbelastung	[-]

Die Steifemoduli können entweder mit Anfangsporenzahl oder Probedicke ausgedrückt werden. Damit können für eine Steigerung der Effektivspannung $\Delta\sigma$ zur Verminderung der Anfangsporenzahl Δe dann die Steifemoduli E_s [kN/m^2] und W_s [kN/m^2] ausgedrückt werden als:

$$\left.\begin{aligned} E_s &= \frac{1}{m'_v} = \frac{\Delta\sigma'\,(1+e'_o)}{\Delta e'} \\ W_s &= \frac{1}{m''_v} = \frac{\Delta\sigma''\,(1+e''_o)}{\Delta e''} \end{aligned}\right\} \# \qquad (8.3)$$

wobei:

m'_v	Volumenänderungskoeffizient für Erstbelastung	[m^2/kN]
m''_v	Volumenänderungskoeffizient für Wiederbelastung	[m^2/kN]
e'_o	Anfangsporenzahl für Erstbelastung	[-]
e''_o	Anfangsporenzahl für Wiederbelastung	[-]
$\Delta e'$	Verminderung der Porenzahl aufgrund Erstbelastung	[-]
$\Delta e''$	Verminderung der Porenzahl aufgrund Wiederbelastung	[-]

Die Werte von E_s und W_s für einen bestimmten Boden sind nicht konstant, hängen aber vom Spannungsbereich ab, über dem sie berechnet sind. Deshalb wird empfohlen, für lineare Berechnung den Steifemodul für Erstbelastung an Spannung von σ_v zu σ_{om} zu bestimmen, während für Wiederbelastung ein Spannungsinkrement so groß wie die Vorbelastung σ_v bestimmt wird, da der Steifemodul mit der Tiefe des Bodens steigt. Für genauere Berechnung kann der Steifemodul von linearer Steigerung mit der Tiefe bestimmt werden. Nach *Kany* (1976) können auch die Steifemoduli E_s und W_s von der Spannung abhängig werden. In diesen zwei Fällen können die Steifemoduli E_s und W_s in der Berechnung für mehrere Unterschichten statt eine Schicht von konstanten E_s und W_s definiert werden.
In der Regel werden die Bodenkennwerte, insbesondere die Steifemoduli E_s und W_s, vor der Berechnung durch bodenmechanische Laborversuche festgelegt. Für die Vorentwurfsbearbeitung kann auch die Tabelle 8.2 zur Festlegung der Steifemoduli E_s benutzt werden.

Nach *Kany* (1974) sind die Werte von W_s 3 bis 10mal so groß wie die von E_s. Die Steifemoduli W_s für Wiederbelastung sind erfahrungsgemäß 1.5 bis 5mal so groß wie die Steifemoduli E_s für Erstbelastung.

Bei geologisch stark vorbelastetem Boden wird jedoch oft nur mit Steifemoduli für Wiederbelastung gerechnet. In diesen Fällen werden für E_s und W_s die gleichen Zahlen eingegeben.

Wenn bei bindigem Boden der Belastungsvorgang sehr schnell erfolgt (z.B. bei dynamischer Belastung), sodass die Hebung des Baugrunds nach Entlastung beim Erdaushub nicht oder nur in beschränktem Umfang eintritt, bevor die neue Wiederbelastung durch das Fundament wirksam wird, so kann dieser Umstand durch entsprechend große Steifemoduli W_s berücksichtigt werden.

Mit der Wirklichkeit übereinstimmende, befriedigende Berechnungen der Setzungen sind nur zu erwarten, wenn die maßgebenden Baugrundkennwerte im bodenmechanischen Labor, durch Feldversuche oder durch Rückrechnung von Setzungsmessungen zuverlässig bestimmt werden.

In der Tabelle 8.2 sind Mittelwerte der Raumgewichte γ_s und Steifemoduli E_s von Böden nach EAU (1990) angegeben.

Tabelle 8.2 Mittlere Bodenkennwerte für die Vorentwurfsbearbeitung nach EAU (1990)

Bodenart	Raumgewicht γ_s [kN/m^3]		Steifemodul E_s [kN/m^2]
	über Wasser	unter Wasser	
Nichtbindige Böden			
Sand, locker, rund	18	10	20000 - 50000
Sand, locker, eckig	18	10	40000 - 80000
Sand, mitteldicht, rund	19	11	50000 - 100000
Sand, mitteldicht, eckig	19	11	80000 - 150000
Kies ohne Sand	16	10	100000 - 200000
Naturschotter, scharfkantig	18	11	150000 - 300000
Bindige Böden			
Ton, halbfest	19	9	5000 - 10000
Ton, schwer knetbar, steif	18	8	2500 - 5000
Ton, leicht knetbar, weich	17	7	1000 - 2500
Geschiebemergel, fest	22	12	30000 - 100000
Lehm, halbfest	21	11	5000 - 20000
Lehm, weich	19	9	4000 - 8000
Schluff	18	8	3000 - 10000

8.4 Elastizitätsmoduli *E* und *W*

In dem noch zu erläuternden Programm *ELPLA* wird die Formel 1.51 nach *Steinbrenner* (1934) im Abschnitt 1 mit Steifemoduli für unbehinderte Seitendehnung E und *Poisson*zahl $\nu_s \neq 0$ verwendet, um die Flexibilitätskoeffizienten zu berechnen. Es muss darauf hingewiesen werden, dass, wenn als *Poisson*zahl $\nu_s = 0$ (Grenzfall) einzugeben ist, die Steifemoduli E_s und W_s aus Kompressionsversuch mit behinderter Seitendehnung (z.B. Oedometer-Versuch) verwendet werden können. Der Elastizitätsmodul wird oft von einem Kompressionsversuch mit unbehinderter Seitendehnung (Dreiaxialversuch) bestimmt (Bild 8.2). Plattendruckversuche können auch verwendet werden, um den Elastizitätsmodul des Bodens im Feld als elastisch und isotrop zu bestimmen.

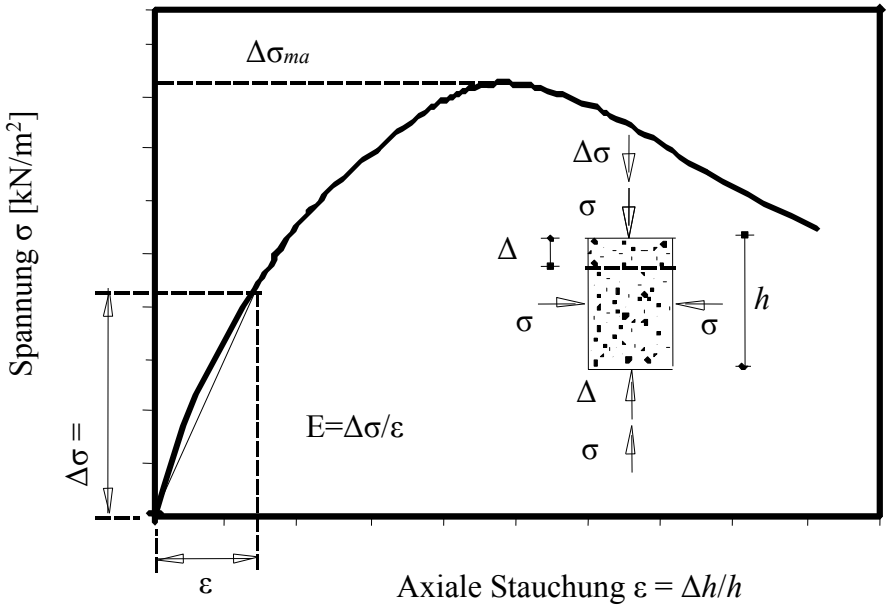


Bild 8.2 Elastizitätsmodul E aus Dreiaxialversuch

Die Werte E und W aus Versuchen mit unbehinderter Seitendehnung lassen sich auch aus den Steifemoduli E_s und W_s bestimmen:

$$\left.\begin{aligned} E &= E_s \frac{1-\nu_s-2\nu_s^2}{1-\nu_s} \\ W &= W_s \frac{1-\nu_s-2\nu_s^2}{1-\nu_s} \end{aligned}\right\} \# \qquad (8.4)$$

Gl. 8.4 zeigt:

- Im Grenzfall $\nu_s = 0$ (Verformung ohne Seitendehnung) stimmen demnach die Werte E mit E_s und die Werte W und W_s überein

- Im anderen Grenzfall $\nu_s = 0.5$ (Verformung bei konstantem Volumen) wird $E = 0 \times E_s$ und $W = 0 \times W_s$. Sollen also nur Sofortsetzungen (Schubverformungen mit konstantem Volumen) untersucht werden, so dürfen nicht die Ergebnisse von Kompressionsversuchen verwendet werden. Andererseits fällt in Gl. 1.51 das 2. Glied weg, wenn für volumenkonstante Verformung (Schubverformung) $\nu_s = 0.5$ eingesetzt wird

Tabelle 8.3 zeigt den Elastizitätsmodul E für verschiedene Bodenarten nach *Bowles* (1977). Die Werte können für die Vorentwurfsbearbeitung verwendet werden.

Tabelle 8.3 Elastizitätsmodul E für verschiedene Bodenarten nach *Bowles* (1977)

Bodenart	Elastizitätsmodul E [kN/m^2]
Sehr weicher Ton	3000 - 3000
weicher Ton	2000 - 4000
halbfester Ton	4500 - 9000
steifer Ton	7000 - 20000
sandiger Ton	30000 - 42500
Schluff	2000 - 20000
schluffiger Sand	5000 - 20000
lockerer Sand	10000 - 25000
dichter Sand	50000 - 100000
dichter Sand und Kies	80000 - 200000
lockerer Sand und Kies	50000 - 140000
Schiefer	140000 - 1400000

8.5 Kompressionsbeiwert C_c und Anfangsporenzahl e_o

Im Falle von Tonsschichten ist zu empfehlen, die Setzungsparameter C_c, C_r und C_s zu verwenden, um die elastischen Eigenschaften des Bodens in der Berechnung der Konsolidationssetzung darzustellen. Diese Parameter oder Beiwerte können direkt vom Konsolidationsversuch oder indirekt mit Hilfe einiger empirischer Gln. wie 8.7 und 8.8 erhalten werden.

Kompressionsbeiwert C_c aus Konsolidationsversuch

Die typische Beziehung zwischen der Porenzahl e und der wirksamen Spannung σ, die vom Konsolidationsversuch erhalten wird, wird im Bild 8.3 gezeigt. Die Neigung vom Endteil der Porenzahl e gegen die Kurve log σ (Bild 8.3) wird als Kompressionsbeiwert C_c bezeichnet und berechnet als:

$$C_c = \frac{\Delta e}{\log \frac{\sigma_2}{\sigma_1}} \quad (8.5)$$

Bei Analogie können die anderen Beiwerte C_r und C_s erhalten werden, wie im Bild 8.3 und Gl. 8.6 gezeigt:

$$C_r \text{ or } C_c = \frac{\Delta e}{\log \frac{\sigma_2}{\sigma_i}} \quad (8.6)$$

wobei:

C_r	Kompressionsbeiwert für Wiederbelastung	[-]
C_s	Schwellbeiwerte	[-]
Δe	Änderung der Porenzahl zwischen σ_i und σ_2	[-]
σ_i	jede Spannung entlang der entsprechenden Kurve	[kN/m^2]

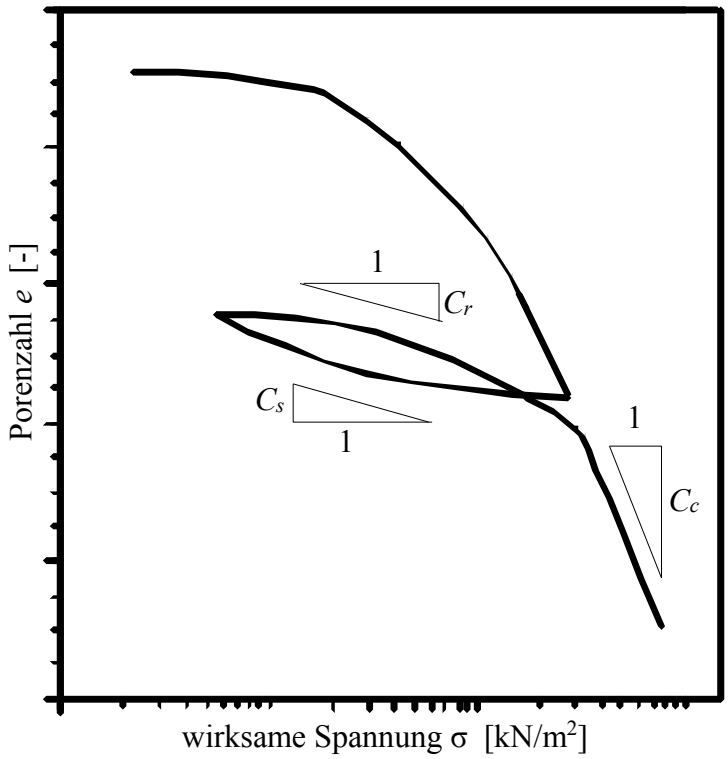


Bild 8.3 Wirksame Spannung-Porenzahl-Beziehung aus Kompressionsversuch (log σ- *e* Diagramm)

Kompressionsbeiwert C_c aus empirischen Gleichungen

Weil die Anzahl von Konsolidationsversuchen zur Ermittlung des Kompressionsbeiwerts für ein gegebenes Projekt beschränkt ist, es ist oft wünschenswert, ungefähre Werte durch Verwenden von anderen Bodenparametern zu erhalten, die leichter ermittelt werden. Ungefähre Werte können für die Vorentwurfsbearbeitung verwendet werden oder zur Überprüfung der Labordaten.

Für normalen konsolidierten Ton haben *Terzaghi/ Peck* (1967), basierend auf der Forschung an unberührtem Ton, die folgende Gl. 8.7 vorgeschlagen, um den Kompressionsbeiwert C_c [-] aus der Fließgrenze des Bodens *LL* [%] zu erhalten:

$$C_c = 0.009\,(LL - 10) \qquad (8.7)$$

#

Azzouz (1976) hat mehrere Gleichungen gelistet, um die Kompressionsbeiwerte zu erhalten, eine davon ist unten gegeben, um den Kompressionsbeiwert C_c [-] aus der Anfangsporenzahl des Bodens e_o [-] zu erhalten:

$$C_c = 1.15\,(e_o - 0.35) \qquad (8.8)$$

#

Typische Kompressions- und Schwellbeiwerte sowie Bezugsporenzahlen bei der Spannung $\sigma_o = 10$ [kN/m^2] sind in folgender Tabelle 8.2 nach *Gudehus* (1981) dargestellt. Die Kompressionsbeiwerte C_c gelten für Erstbelastung und die Schwellbeiwerte C_s für Entlastung bzw. Wiederbelastung.

Tabelle 8.4 Kompressions- und Schwellbeiwerte in Abhängigkeit von der Anfangsporenzahl

Bodenart	Kompressionsbeiwert C_c [-]	Schwellbeiwerte C_s [-]	Anfangsporenzahl e_o [-]
Kiessand	0.001	0.0001	0.3
Feinsand, dicht	0.005	0.0005	0.5
Feinsand, locker	0.01	0.001	0.7
Grobschluff	0.02	0.002	0.8
Toniger Schluff	0.03-0.6	0.01-0.02	0.9-1.2
Kaolin-Ton	0.1	0.03	1.5
Klei	0.1-0.3	0.03-0.1	1.2-2.5
Montmorillonit-Ton	0.5	0.4	5
Torf	1	0.3	10

8.6 Scherparameter φ und *c*

Reibungswinkel φ und Kohäsion *c* sind die maßgebenden Bodenkennwerte für die Berechnung von Grenzzuständen. Sie heißen auch Scherparameter. Die Scherparameter φ und *c* können aus Scherversuch oder Dreiaxialversuch erhalten werden. Es werden mit einem Erdstoff meist drei Scherversuche mit verschiedenen Drücken durchgeführt. Die Ergebnisse einer solchen Serie können als Punkte in einem τ_f-σ Diagramm dargestellt werden (Bild 8.4).

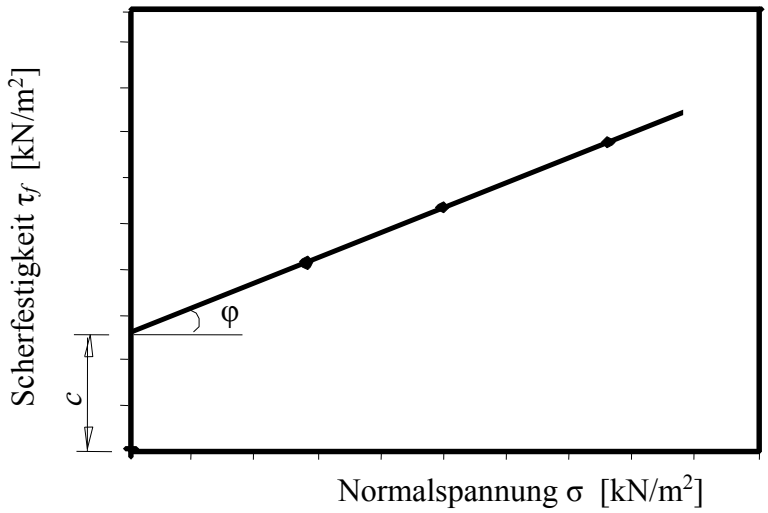


Bild 8.4 Scherfestigkeit bei veränderlicher Normalspannung

Bei vielen Erdstoffen liegen die Punkte recht genau auf einer Ausgleichsgeraden. Ihr Abschnittswert *c* ist identisch mit der oben eingeführten Kohäsion. Ihre Neigung φ heißt Reibungswinkel. Die Geradengleichung 8.9 dieser Punkte heißt *Coulomb*-Gradbedingung.

$$\tau_f = c + \sigma \tan\varphi \qquad (8.9)$$

#

Bei Kenntnis des Porenwasserdrucks u [kN/m²] kann man statt der Druckspannung σ die wirksame Spannung $\sigma' = \sigma - u$ verwenden. Dann wird die Scherfestigkeit τ_f in Gl. 8.9 mit σ′ geschrieben als:

$$\tau_f = c' + \sigma' \tan\varphi' \qquad (8.10)$$

#

wobei:

c'	wirksame Kohäsion	[kN/m^2]
φ'	wirksamer Reibungswinkel	[°]

Wenn die Probe gesättigt und während der Scherung wasserdicht umschlossen ist, liegt ein so genannter undrainierter Versuch vor. In diesem Fall wird die *Coulomb*gleichung geschrieben als:

$$\tau_f = c_u + \sigma \varphi_u \qquad (8.11)$$

#

wobei:

c_u	undrainierte Kohäsion	[kN/m^2]
φ_u	undrainierter Reibungswinkel	[°]

In einem vollständig gesättigten Boden ist $\varphi_u = 0$.

Man kann den Index *u* weglassen, wenn klar ist, dass Grenzzustände gesättigter Böden ohne Volumenänderungen gemeint sind. Oft ist es zweckmäßig die Grenzzustände ohne Berücksichtigung des Porenwasserdrucks gemäß Bild 8.4 und Gl. 8.9 auswerten. In der Tabelle 8.5 sind Mittelwerte der Reibungswinkel φ und Kohäsion *c* von Böden nach *EAU* (1990) angegeben.

Tabelle 8.5 Mittlere Scherparameter für Vorentwurfsbearbeitung nach EAU (1990)

Bodenart	Reibungs-winkel φ bzw. φ′ [°]	Kohäsion	
		c' [kN/m^2]	c_u [kN/m^2]
Nichtbindige Böden			
Sand, locker, rund	30	-	-
Sand, locker, eckig	32.5	-	-
Sand, mitteldicht, rund	32.5	-	-
Sand, mitteldicht, eckig	35	-	-
Kies ohne Sand	37.5	-	-
Naturschotter, scharfkantig	40	-	-
Bindige Böden			
Ton, halbfest	25	25	50 - 100
Ton, schwer knetbar, steif	20	20	25 - 50
Ton, leicht knetbar, weich	17.5	10	10 - 25
Geschiebemergel, fest	30	25	200 - 700
Lehm, halbfest	27.5	10	50 - 100
Lehm, weich	27.5	-	10 - 25
Schluff	27.5	-	10 - 50
Torf	15	5	-

Erläuterungen zur Tabelle 8.5:

φ wirklicher Reibungswinkel
φ' wirksamer Reibungswinkel; bei nichtbindigen Böden ist $\varphi = \varphi'$
c' wirksame Kohäsion entsprechend φ'
c_u scheinbare Kohäsion bei Nullreibung für wassergesättigte bindige Böden

8.7 Bettungsmodul k_s

Der Bettungsmodul k_s [kN/m^3] ist nach Umformung der Gl. 8.12 als Quotient aus dem Sohldruck q [kN/m^2] an jeder beliebigen Stelle der Gründungssohle und der hier vorhandenen Setzung s [m] definiert:

$$k_c = \frac{q}{s} \quad \# \tag{8.12}$$

Hieraus wird deutlich, dass k_s in der gesamten Gründungssohle verschieden große Werte haben kann, da in der Regel nicht nur der Sohldruck, sondern auch die Setzungen ungleichmäßig verteilt sind. Weiterhin zeigt die Gl. 8.12, dass der Bettungsmodul keine Bodenkonstante ist, sondern als Funktion des Sohldrucks und der Setzung von der Lastgröße, den Grundrissabmessungen der Flächengründung und von der Schichtung des Untergrunds beeinflusst wird. Größe und Verteilung des Bettungsmoduls sind daher von den Bedingungen eines jeden Einzelfalls abhängig. Sie lassen sich vor Beginn der Berechnung nur schätzen. Bei praktischen Berechnungen ist man daher gezwungen, zunächst nur Näherungswerte von k_s zu benutzen.

Der Bettungsmodul k_s kann überschläglich nach Erfahrungswerten geschätzt werden. Die folgende Tabelle 8.6 zeigt die mittleren Werte von k_s nach *Wölfer* (1978). Diese Werte können nur für die Vorentwurfsbearbeitung verwendet werden.

Der in *DIN* 18314 (1976) definierte Bettungsmodul auf der Grundlage eines Plattendruckversuchs kann bei der Berechnung ausgedehnter Flächengründungen nicht benutzt werden, da wegen der geringen Tiefenwirkung des Plattendruckversuchs nur oberflächennahe Bodenschichten erfasst werden und sich die Plastifizierungen bei der relativ kleinen Platte stark auf die Setzung auswirken (Bild 8.5).

Für den Fall, dass mit einem konstanten Bettungsmodul gerechnet werden soll, empfiehlt sich eine in der Praxis bewährte Näherungsberechnung des Bettungsmoduls über eine Setzungsberechnung aus den elastischen Parametern E_s und ν_s des Bodens.

Tabelle 8.6 Mittlerer Bettungsmodul k_s für verschiedene Bodenarten nach *Wölfer* (1978)

Bodenart	Bettungsmodul k_s [kN/m^3]
Leichter Torf- und Moorboden	5000 - 10000
Schwerer Torf- und Moorboden	10000 - 15000
Feiner Ufersand	10000 - 15000
Schüttungen von Humus, Sand, Kies	10000 - 20000
Lehmboden, nass	20000 - 30000
Lehmboden, feucht	40000 - 50000
Lehmboden, trocken	60000 - 80000
Lehmboden, trocken und hart	100000
Festgelagerter Humus mit Sand und wenig Steinen	80 000 - 100000
Festgelagerter Humus mit vielen Steinen	100000 – 120000
Feiner Kies mit viel feinem Sand	80000 – 100000
Mittlerer Kies mit feinem Sand	100000 – 120000
Mittlerer Kies mit viel grobem Sand	120000 – 150000
Grober Kies mit grobem Sand	150000 – 200000
Grober Kies mit wenig Sand	150000 – 200000
Grober Kies mit wenig Sand, sehr fest gelagert	200000 – 250000

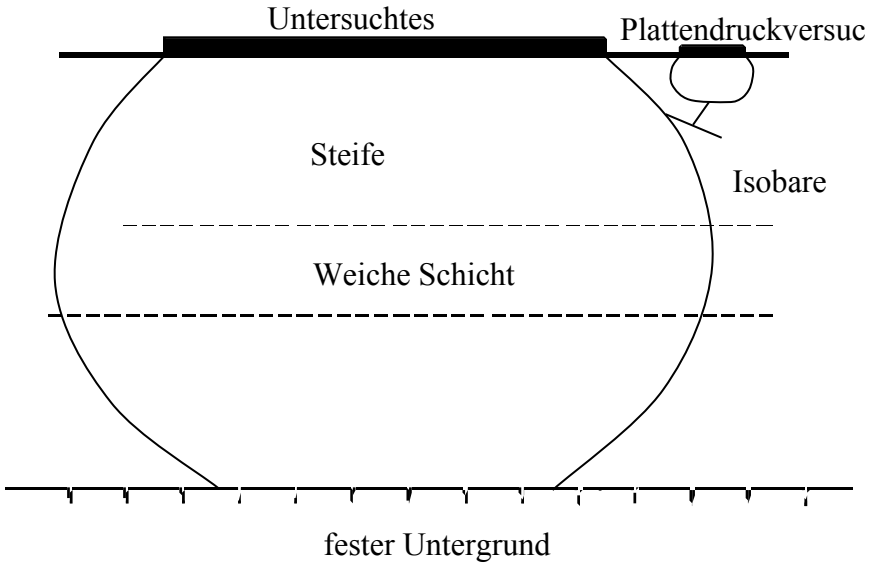


Bild 8.5 Isobare bei Plattendruckversuch und untersuchtem Fundament

Berechnung des Bettungsmoduls k_s

Die Berechnung des Bettungsmoduls ist eine in der Literatur wenig behandelte Aufgabe. Das liegt wohl daran, dass in der Praxis vielfach die Tragwerks-Planer (Statiker) den Bettungsmodul vom Baugrundberater anfordern. Letztere kennen zwar besser die Problematik des Bettungsmoduls, möchten aber als Subunternehmer dem Statiker die Aufgabe der Sohlplattenberechnung nicht unnötig erschweren.

Berechnung des Bettungsmoduls k_s aus mittlerer Bodenpressung

Man muss bei der Berechnung des Bettungsmoduls konsequent vorgehen. Zur Erfassung des Einflusses der Vorbelastung infolge Erdaushubs gibt es drei Möglichkeiten:

i) Vernachlässigung des Vorbelastungseinflusses

Bei der Berechnung der Setzungen s wird von der vollen aufgebrachten Belastung q_o ausgegangen, die Vorbelastung q_v also nicht berücksichtigt:

$$S = S_E + S_W = \frac{q_o \; b \; f_s}{E_s} \quad \# \tag{8.13}$$

wobei:

E_s	Steifemodul für Erstbelastung oder für Wiederbelastung	[kN/m^2]
f_s	Flexibilitätskoeffizient	[-]
b	Fundamentbreite	[m]
S_E	Erstbelastungssetzung	[m]
S_W	Wiederbelastungssetzung	[m]

Dann muss bei der Bestimmung des Bettungsmoduls k_s auch die volle Sohlpressung q_o angesetzt werden:

$$k_s = \frac{q_o}{S} \quad \# \tag{8.14}$$

ii) Vorbelastungssetzung wird vernachlässigt

Es wird nur mit der Erstbelastungssetzung s_E gerechnet:

$$S = S_E = \frac{q'_o \; b \; f_s}{E_s} \quad \# \tag{8.15}$$

wobei:

$q'_o = q_o - \gamma_s \; t_F$	Erstbelastungsanteil	
γ_s	Wichte des Bodens	[kN/m^3]
t_F	Gründungstiefe des Fundaments	[m]

Der Vorbelastungsanteil s_W an der Setzung wird also wie bei *Simmer* (1987) und *Türke* (1990) vernachlässigt. Damit ergibt sich der Bettungsmodul k_s aus:

$$k_s = \frac{q'_o}{S_E} \quad \# \quad \# \tag{8.16}$$

iii) Vorbelastungssetzung wird berücksichtigt

Hier sind drei Fälle zu unterscheiden:

a) Die Gesamtbelastung des Baugrunds in der Sohle ist größer als die Vorbelastung ($q_o > q_v$). Man kann hier von bilinearem Verformungsverhalten sprechen. Dann ergibt sich der Bettungsmodul aus:

$$k_s = \frac{q_o}{S_E + S_W} \quad \# \tag{8.17}$$

b) Die Gesamtbelastung q_o in der Sohle ist kleiner als die Vorbelastung ($q_o < q_v$). Dann ergibt sich der Bettungsmodul nur aus dem Wiederbelastungsanteil s_W:

$$k_s = \frac{q_o}{S_W} \quad \# \tag{8.18}$$

c) Es ist keine Vorbelastung vorhanden ($q_v = 0$). Dann errechnet sich der Bettungsmodul nur aus dem Erstbelastungsanteil s_E der Setzung:

$$k_s = \frac{q_o}{S_E} \quad \# \qquad \# \tag{8.19}$$

Im Computerprogramm *ELPLA* wird bei der Berechnung der Bettungsmoduli von den bilinearen Verformungen gemäß Verfahren iii) a, b oder c ausgegangen. Es können somit Steifemoduli für Wiederbelastung und für Erstbelastung in der Rechnung eingeführt werden. Dabei wird durch programminterne Abfragen jeweils festgestellt, welcher Fall der Vorbelastung zutreffend ist.

Weit komplizierter ist im Programm *ELPLA* die Bestimmung der Bettungsmoduli bei unregelmäßigen Plattengrundrissen oder bei unregelmäßig geschichtetem Baugrund, wie das in der Praxis häufig vorkommt. Ferner kann man mit dem Programm *ELPLA* die Bettungsmoduli an den Knoten unter Verwendung der berechneten Sohldruckverteilung iterativ verbessern.

Berechnung des Bettungsmoduls k_s aus zulässiger Bodenpressung

Nach *Bowles* (1977) kann eine vernünftige Näherung des Bettungsmoduls k_s von der zulässigen Bodenpressung q_{all} erhalten werden. Hier wird angenommen, dass die zulässige Bodenpressung auf irgendeinem Maximalmaß der Setzung s einschließlich eines Faktors der Sicherheit FS basiert. Dementsprechend wird der Bettungsmodul k_s gegeben als:

$$k_s = F\,S\,\frac{q_{all}}{S} \quad \# \tag{8.20}$$

Der Bettungsmodul k_s [kN/m^3] für eine Setzung von s = 0.0254 [cm] (Gleichgestellter zu s = 1.0 [m]) und ein Faktor der Sicherheit FS = 3 kann genommen werden als:

$$k_s = 3\frac{q_{all}}{0.0254} = 120\,q_{all} \qquad (8.21)$$

#

Bei Berechnung mit konstantem Bettungsmodul wird empfohlen, den Bettungsmodul aus der Setzungsberechnung zu bestimmen.

8.8 Zulässige Bodenpressung q_{all}

Der Wert der zulässigen Bodenpressung basiert auf sowohl theoretischer als auch experimenteller Untersuchung. Solch ein Wert schließt normalerweise einen Faktor der Sicherheit von 3 ein ($q_{ult} = 3\,q_{all}$). Dies zeigt an, dass die Entwurfslasten, die beim Feststellen der Grundbruchfläche des Fundaments verwendet werden, Dienstlasten ohne Reduktion sein müssen.

Tabelle 8.7 zeigt die mittleren Werte der zulässigen Bodenpressungen q_{all} für verschiedene Bodenarten nach *Bakhoum* (1986). Diese Werte können zur Vorentwurfsbearbeitung verwendet werden.

Tabelle 8.7 Mittlere Werte von zulässigen Bodenpressungen q_{all} für verschiedene Bodenarten nach *Bakhoum* (1986)

Bodenart	zulässige Bodenpressung q_{all} [kN/m^2]
Nichtbindige Böden	
Sand, locker	100
Sand, mitteldicht	200
Sand, dicht	500
Fels, klüftig	5000
Bindige Böden	
Ton, halbfest, weich	90
Ton, steif	150
Ton, sehr steif	300
Ton, klüftig	500

8.9 Abminderungsbeiwerte α

Zur Bestimmung der Setzungseinflusszahlen $c_{i,j}$ in den Setzungsgleichungen im Abschnitt 1 werden in Anlehnung an *DIN* 4019 Teil 1 die Setzungen nach der Theorie des elastisch isotropen Halbraums

und dem *Hooke*schen Verformungsgesetz bestimmt. In jedem Fundamentmittelpunkt *i* (Teilfläche) können die Setzungen für beliebig wählbare Fundamentabmessungen *a*, *b* und Gründungstiefen t_F berechnet werden.

Es wird besonders darauf hingewiesen, dass hier bei der Berechnung durch die Unterscheidung zwischen Erstbelastung E_s und Wiederbelastung W_s die Setzungen in Anlehnung an plastizitätstheoretische Überlegungen mit nichtlinearen Stoffgesetzen bestimmt werden können. Mit dem Programm werden im Übrigen nur die Konsolidationssetzungen berechnet. Die von *Schultze* (1953) angeführten Sofortsetzungen treten nur bei wassergesättigten bindigen Böden auf und beruhen auf volumengetreuer Gestaltänderung. Sie werden hier durch den Abminderungsbeiwert bei den Konsolidierungssetzungen berücksichtigt. Die sekundären Setzungen sind ebenfalls vernachlässigbar klein, wenn die Fundamentbelastung ausreichend weit von der Grundbruchlast entfernt ist.

Nach *DIN* 4019 Teil 1 (Tabelle 8.8) können, sofern sie nicht schon in E_s und W_s berücksichtigt sind, folgende Abminderungsbeiwerte α in Ansatz gebracht werden:

Tabelle 8.8 Abminderungsbeiwerte α (nach *DIN* 4019 Teil 1)

Bodenart	α
Sand und Schluff	0.66
einfach verdichteter und leicht überverdichteter Ton	1.0
Stark überverdichteter Ton	0.5 - 1

Mit dem eingelesenen Wert α werden im Programm *ELPLA* die Steifemoduli dividiert:

$$\left.\begin{aligned} \overline{E}_s &= \frac{E_s}{\alpha} \\ \overline{W}_s &= \frac{W_s}{\alpha} \end{aligned}\right\} \quad \# \tag{8.22}$$

Im Ergebnis ist dieser Vorgang gleichwertig folgender Formel:

$$\overline{S} = \alpha\, S \qquad \# \tag{8.23}$$

Abschnitt 9

Liste der Beispiele für die Berechnung von Gründungsplatten mit dem Programm *ELPLA*

Inhalt

9.1	Vorbemerkungen	9 - 2
9.2	Beispiele zum Abschnitt 2	9 - 3
9.3	Beispiele zum Abschnitt 3	9 - 6
9.4	Beispiele zum Abschnitt 4	9 - 9
9.5	Beispiele zum Abschnitt 5	9-13
9.6	Beispiele zum Abschnitt 6	9-14
9.7	Beispiele zum Abschnitt 7	9-15

mit dem Programm *ELPLA*

9.1 Vorbemerkungen

Bei Bestellung der Programmkette *ELPLA* wird eine *CD* geliefert. Sie beinhaltet die Programme und für 20 Projekte feste Daten für Testzwecke. Es handelt sich um die in den Abschnitten 9.2 bis 9.7 beschriebenen Testaufgaben. Mit diesen Daten werden einige Möglichkeiten zur Berechnung von Flächengründungen vorgestellt. Im Einzelnen sind 20 verschiedene Fundamente gewählt worden, damit werden einige praktisch vorkommende Fälle erfasst.

An den vollständig durchgerechneten Zahlenbeispielen soll in erster Linie der Einfluss der verschiedenartigen Baugrundmodelle auf die Ergebnisse gezeigt werden. Weiterhin werden bei jeweils gleichem Baugrundmodell verschiedene Berechnungsmethoden angewandt, um in Gegenüberstellung deren Rechenaufwand und die gegenseitigen Abweichungen in den Ergebnissen beurteilen zu können.

Alle Berechnungen von Flächengründungen wurden mit dem Programm *ELPLA* durchgeführt.

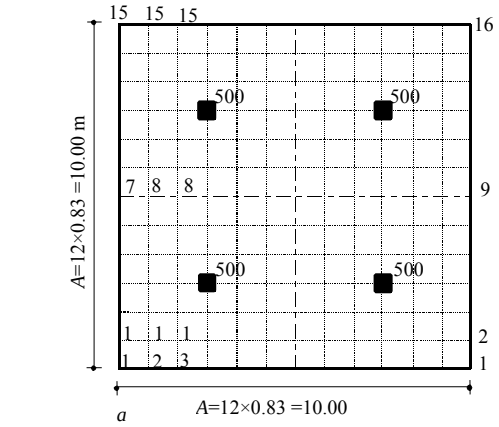
Auf den nächsten Seiten sind die Speichernamen der Dateien zu den Zahlenbeispielen, Inhalt und Kurzbeschreibung der Beispiele aufgelistet.

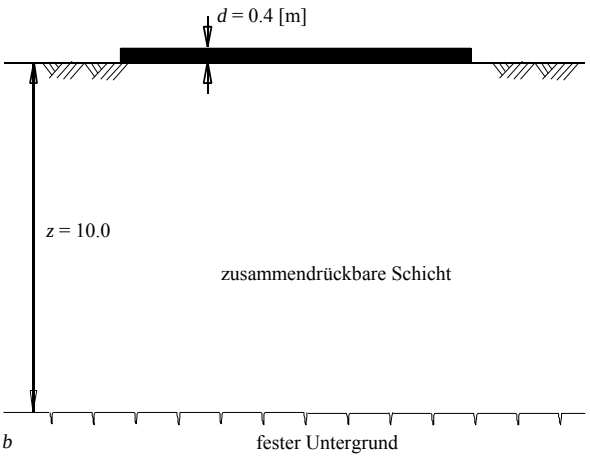
9.2 Beispiele zum Abschnitt 2

Beispiel 2.1 Berechnung einer quadratischen Platte auf unregelmäßigem Baugrund

Datei	Inhalt	Grundriss, Lasten, Untergrund, ... usw.

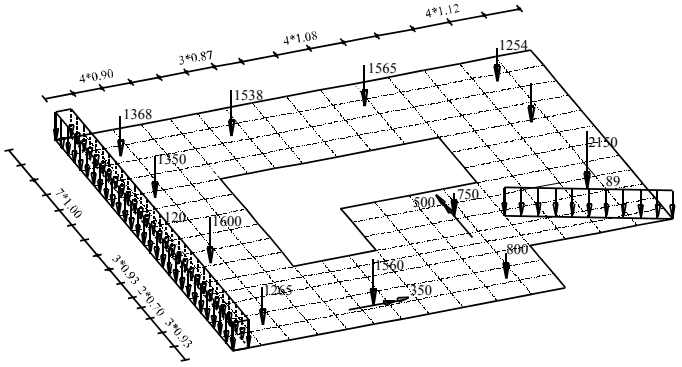
Berechnung mit Verwendung der Interpolationsmethode
un1 Bettungsmodulverfahren (Verfahren 3)
un2 Steifemodulverfahren für die elastische Platte (Verfahren 7)
un3 Steifemodulverfahren für die starre Platte (Verfahren 8)
Berechnung mit Verwendung der Aufteilung in die Teilflächen-Methode
un4 Bettungsmodulverfahren
un5 Elastisch isotroper Halbraum
un6 Steifemodulverfahren
Berechnung mit nur einer elastischen Schicht
un1 Bettungsmodulverfahren (Verfahren 3)
un2 Steifemodulverfahren für die elastische Platte (Verfahren 7)
un3 Steifemodulverfahren für die starre Platte (Verfahren 8)



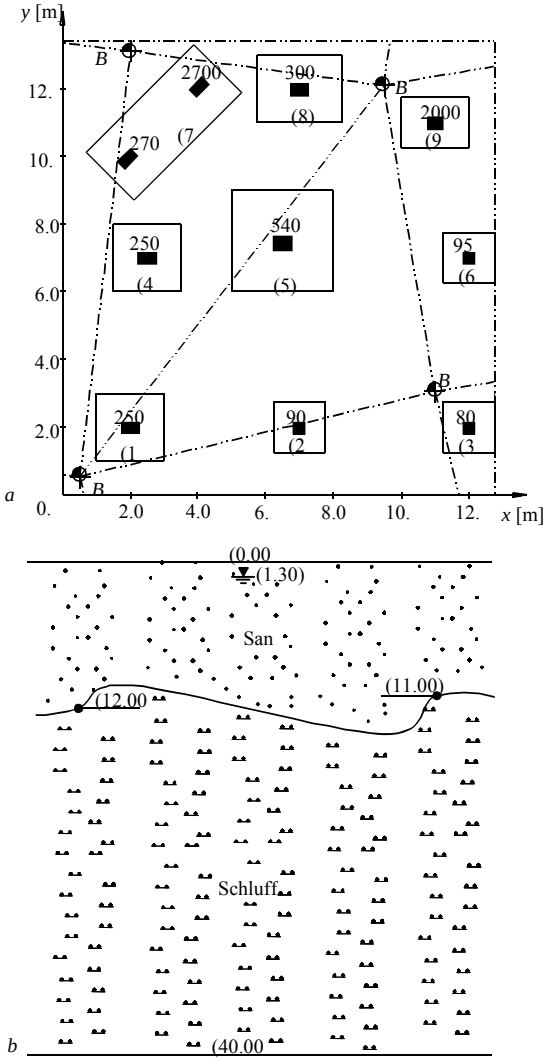


Beispiel 2.2 Berechnung einer unregelmäßigen Platte auf unregelmäßigem Baugrund

Datei	Inhalt	Grundriss, Lasten, Untergrund, ... usw.
gb1	Einfache Annahme (Verfahren 1)	
gb2	Konstanter Bettungsmodul (Verfahren 2)	
gb3	Variabler Bettungsmodul (Verfahren 3)	
gb4	Bettungsmodulverfahren mit iterativer Verbesserung (Verfahren 4)	
gb5	Elastisch isotroper Halbraum (Verfahren 5)	
gb6	Steifemodulverfahren mit Iteration (Verfahren 6)	
gb7	Steifemodulverfahren (Verfahren 7)	
gb8	Starre Platte (Verfahren 8)	

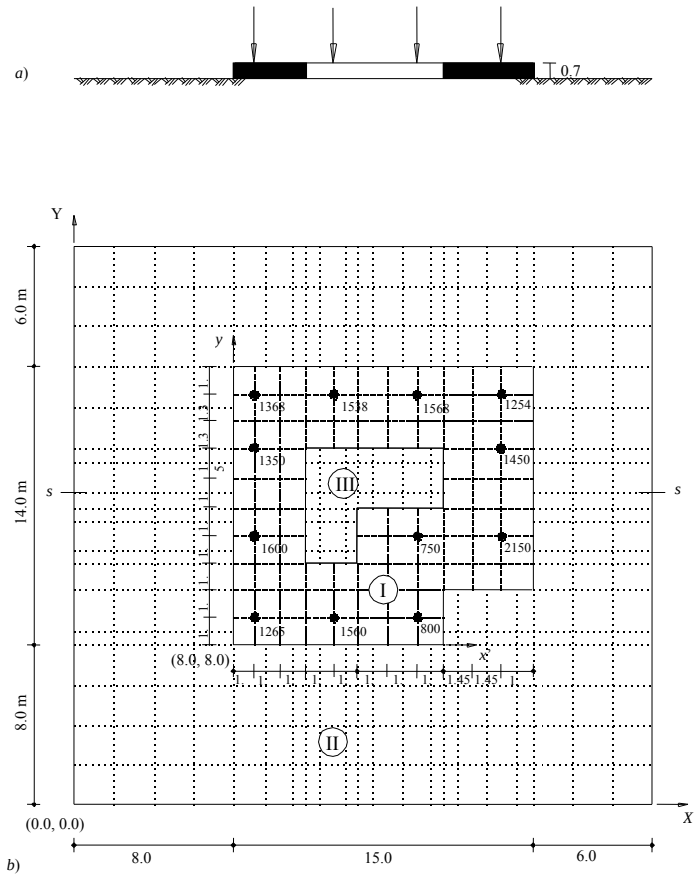


Beispiel 2.3 Berechnung von Fundamentgruppen auf unregelmäßigem Baugrund

Datei Inhalt	Grundriss, Lasten, Untergrund, ... usw.
Die Grenztiefen für alle Bohrprofile werden erhalten infolge minimaler Fundamentbelastung f5* Fundament Nr. * gr5 Fundamentgruppe 1 bis 9 Die Grenztiefen für alle Bohrprofile werden erhalten infolge maximaler Fundamentbelastung f3* Fundament Nr. * gr3 Fundamentgruppe 1 bis 9 Berechnung ohne Grenztiefen fo* Fundament Nr. * grw Fundamentgruppe 1 bis 9 Die Grenztiefen werden durch Interpolation erhalten fi* Fundament Nr. * gri Fundamentgruppe 1 bis 9	

9.3 Beispiele zum Abschnitt 3

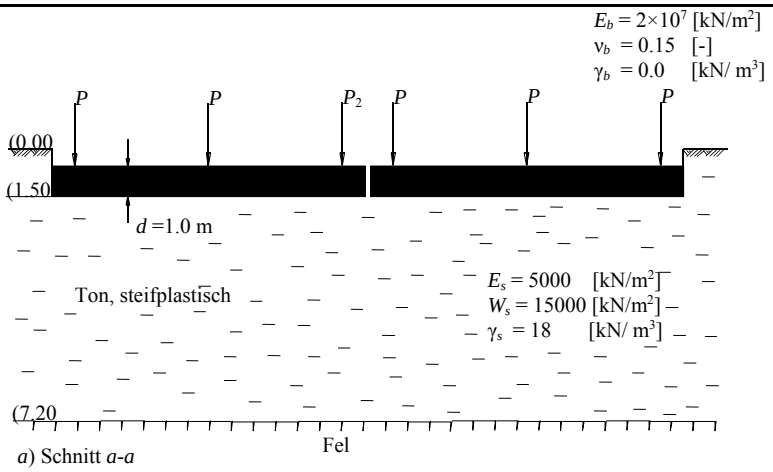
Beispiel 3.1 Setzungen außerhalb der Kontaktflächen

Datei	Inhalt	Grundriss, Lasten, Untergrund, ... usw.
se1 se2	Kontaktfläche I Kontaktflächen II + III	

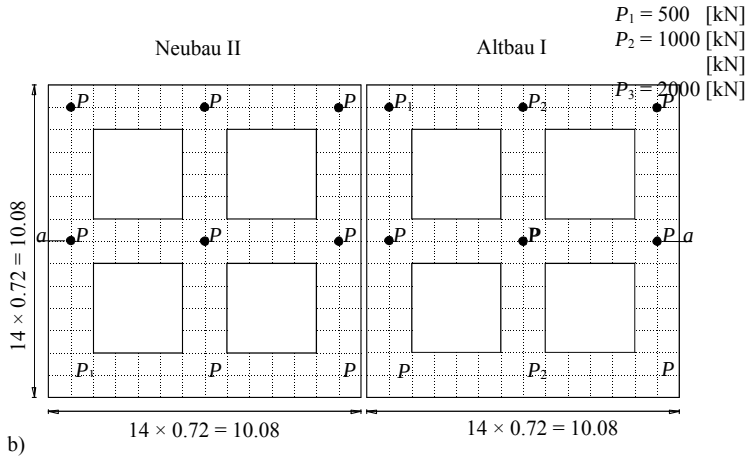
Beispiel 3.2 Einfluss eines Nachbarbauwerks II auf ein bestehendes Fundament I

Datei	Inhalt	Grundriss, Lasten, Untergrund, ... usw.

ei1 Nur Neubau
ei2 Neubau und Altbau



a) Schnitt *a-a*

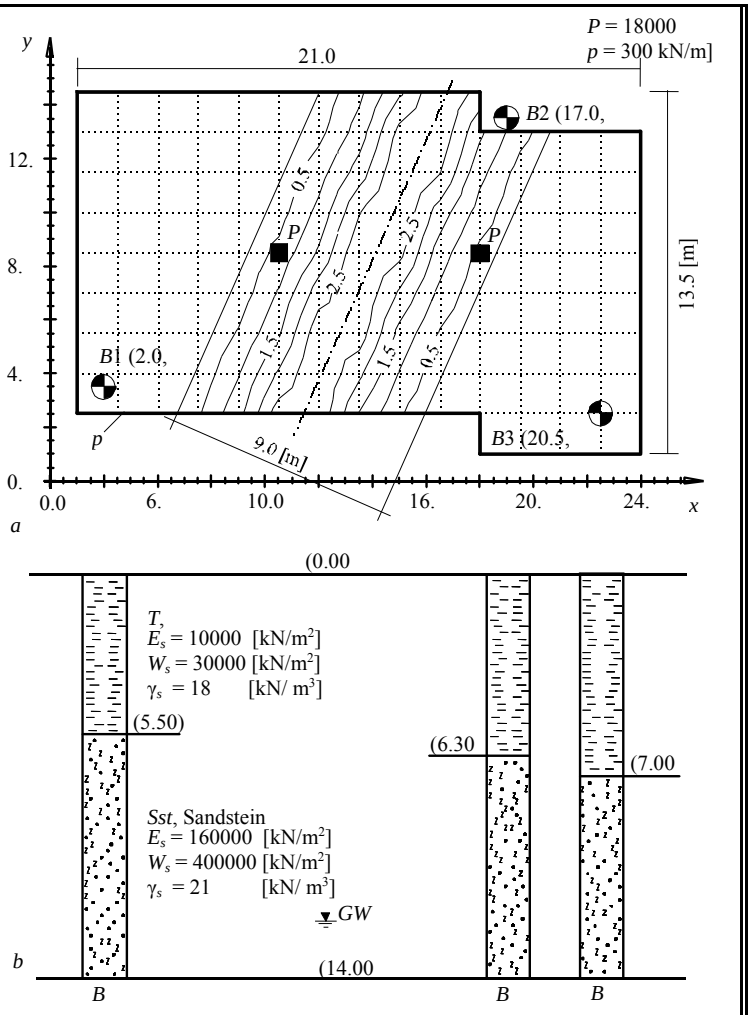


b)

Beispiel 3.3 Interaktion durch Senken der Sohlfläche eines Gebäudes bei Untertunnelung

Datei	Inhalt	Grundriss, Lasten, Untergrund, ... usw.

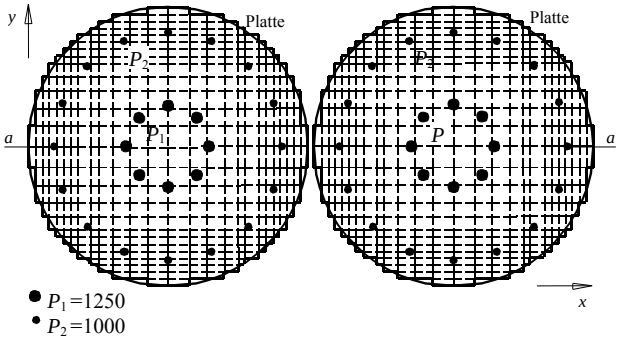
tu1 ohne Tunnel
tu2 mit Tunnel



9.4 Beispiele zum Abschnitt 4

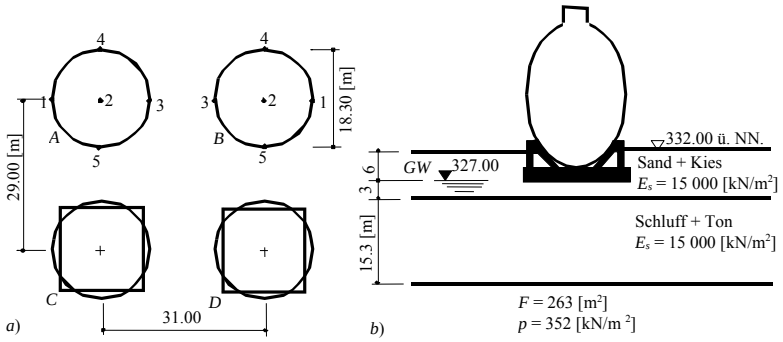
Beispiel 4.1 Berechnung eines Systems von zwei benachbarten, gleich großen Kreisplatten

Datei	Inhalt	Grundriss, Lasten, Untergrund, ... usw.
ha1	Kreisplatte I	
ha2	Kreisplatte II	
h12	Plattensysteme I + II	



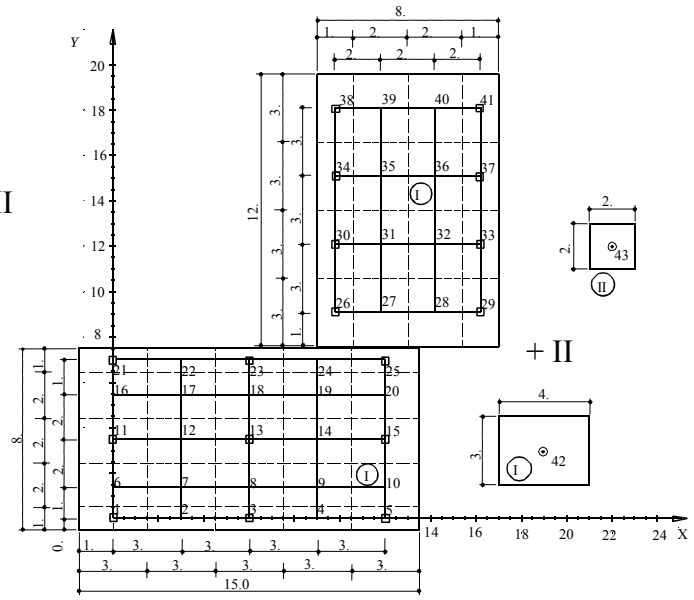
Beispiel 4.2 Setzungsverhalten von Faulbehältern (Kreisplatten) einer Kläranlage

Datei	Inhalt	Grundriss, Lasten, Untergrund, ... usw.
sta	Kreisplatte A	
stb	Kreisplatte B	
stc	Kreisplatte C	
std	Kreisplatte D	
ste	Plattensysteme A + B	



Beispiel 4.3 Berechnung von zwei benachbarten Fundamentplatten
unter Berücksichtigung von zwei Schornsteinfundamenten

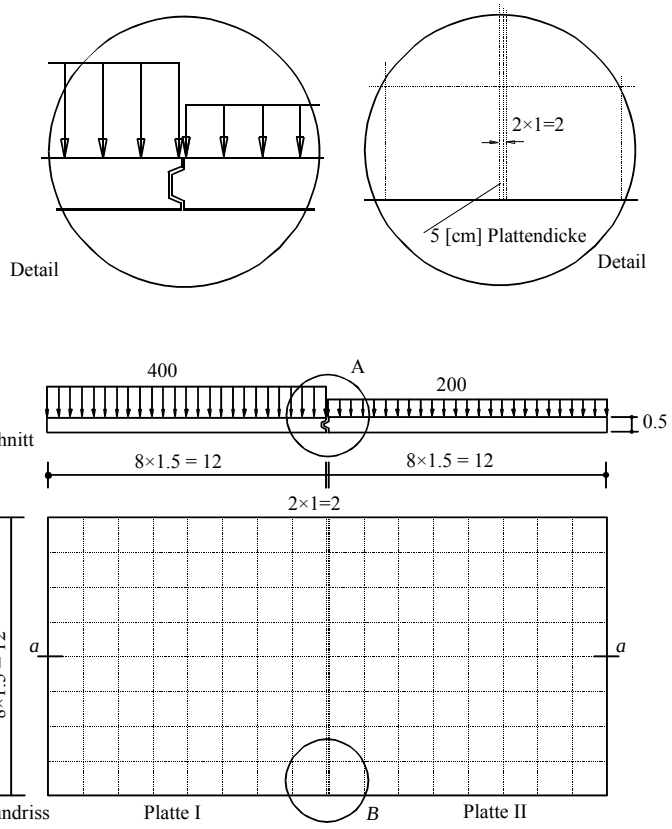
Datei	Inhalt	Grundriss, Lasten, Untergrund, ... usw.
sf1	Fundament III	
sf2	Fundament IV	
fl1	schlaffe Platte I	
fl2	schlaffe Platte II	
f12	schlaffes Plattensystem I + II	
el1	elastische Platte I	
el2	elastische Platte II	
e12	elastisches Plattensystem I	
rg1	starre Platte I	
rg2	starre Platte II	
r12	starres Plattensystem I + II	



Beispiel 4.4 Wechselwirkung zweier nebeneinander liegender quadratischer Platten

Datei	Inhalt	Grundriss, Lasten, Untergrund, ... usw.

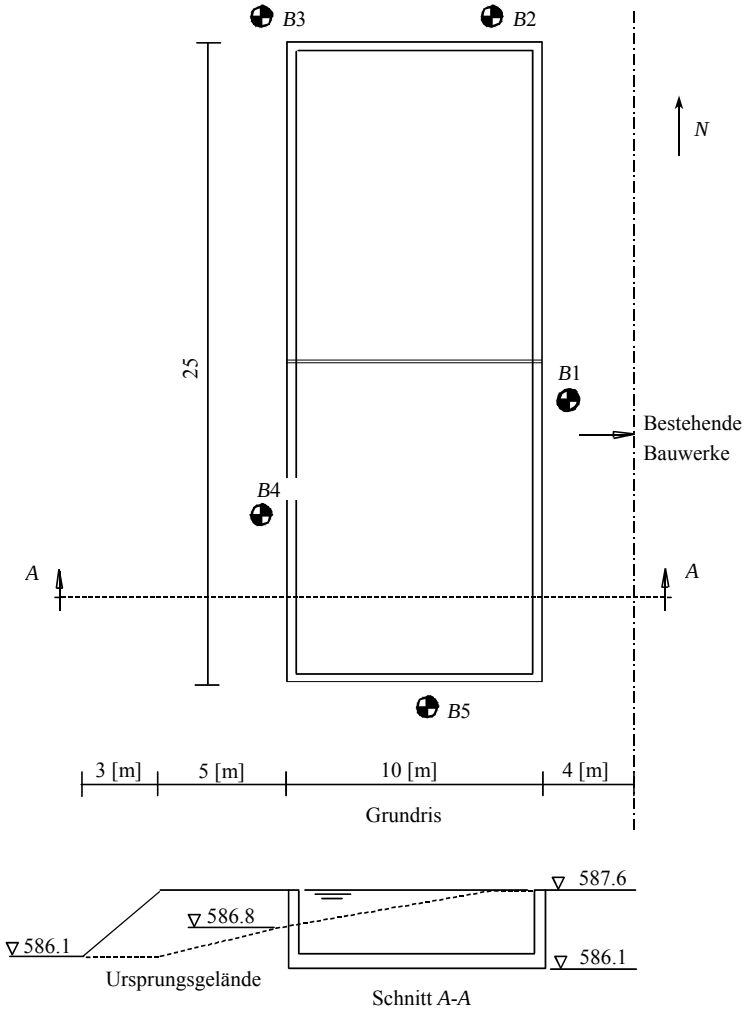
Rf1_sys	Plattensysteme (Platte I)
Rf2_sys	Plattensysteme (Platte II)
Rf1_2_sys	Plattensysteme (Platten I + II)
Rf1	ohne Interaktion (Platte I)
Rf2	ohne Interaktion (Platte II)
Rf1_2_*cm	Fall 1: (c = *cm)
Rf1_Nachbar_*cm	Fall 2: Platte I (c = *cm)
Rf2_Nachbar_*cm	Fall 2: Platte II (c = *cm)
Rf1_2	Fall 3
Rf1_2_Fugen	Fall 4



Beispiel 4.5 Erhöhung eines Schwimmbeckens

Datei	Inhalt	Grundriss, Lasten, Untergrund, ... usw.

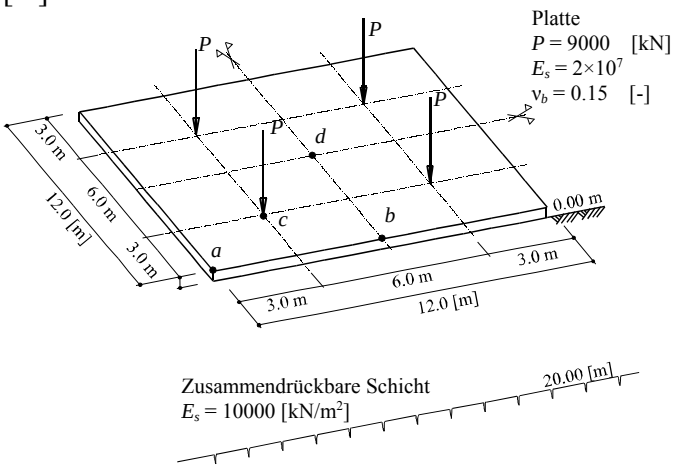
slr	Schwimmbad links + rechts (ohne Fuge)
smt	Schwimmbad links + rechts (mit Interaktion und mit Querkraftübertragung)
sol	Schwimmbad links 5 (ohne Interaktion)
sor	Schwimmbad rechts 5 (ohne Interaktion)
ssy	Schwimmbad links + rechts 5 (mit Interaktion und ohne Querkraftübertragung)
au*	Einfluss der seitlichen Auflast (Lastfläche *)



9.5 Beispiele zum Abschnitt 5

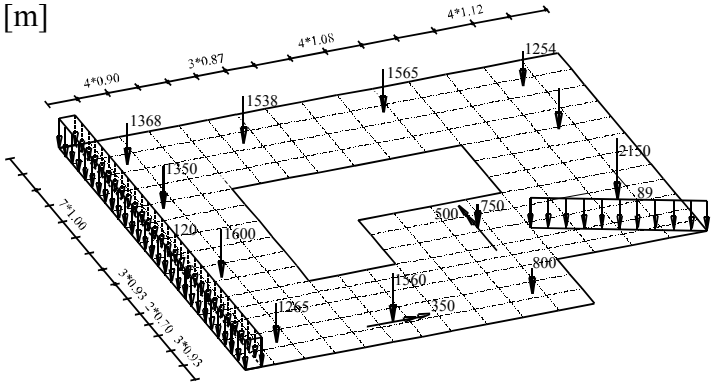
Beispiel 5.1 Steifigkeit einer einfachen Rechteckplatte

Datei	Inhalt	Grundriss, Lasten, Untergrund, ... usw.
th*	Plattendicke von 0.0 bis 0.9 [m]	
t1*	Plattendicke von 1.0 bis 2.0 [m]	
txx	starre Platte	



Beispiel 5.2 Steifigkeit einer unregelmäßigen Platte auf unregelmäßigem Baugrund

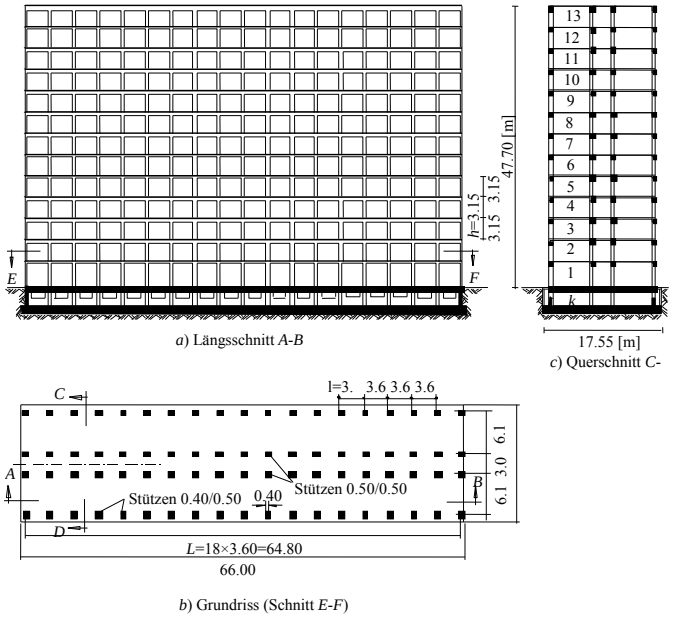
Datei	Inhalt	Grundriss, Lasten, Untergrund, ... usw.
g00	Plattendicke d = 0.0 [m]	
gb*	Plattendicke von 0.1 bis 0.9 [m]	
g1*	Plattendicke von 1.0 bis 1.9 [m]	
g20	Plattendicke d = 2.0 [m]	
gxx	starre Platte	



9.6 Beispiele zum Abschnitt 6

Beispiel 6.1 Berechnung der Gründungsplatte eines Hochhauses

Datei	Inhalt	Grundriss, Lasten, Untergrund, ... usw.
rft1	nicht ausgesteifte Sohlplatte	
rft2	Sohlplatte-Keller	
rft3	Sohlplatte-Keller-Hochbau	
rftr	völlig starre Sohlplatte	



a) Längsschnitt *A-B*

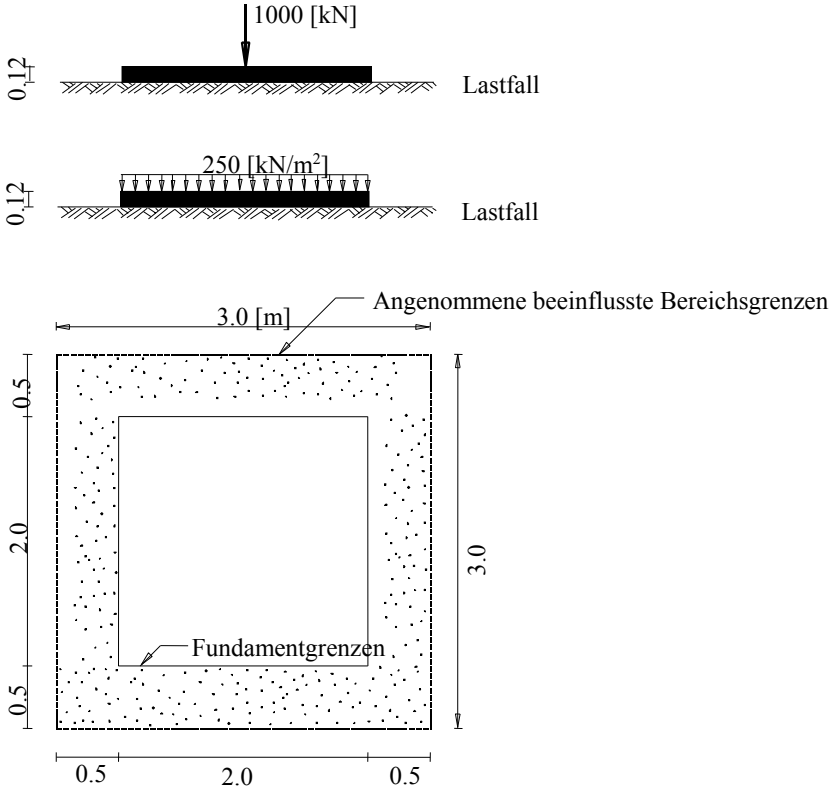
c) Querschnitt *C-*

b) Grundriss (Schnitt *E-F*)

9.7 Beispiele zum Abschnitt 7

Beispiel 7.1 Überprüfung der nichtlinearen Berechnung für das Bettungsmodulverfahren

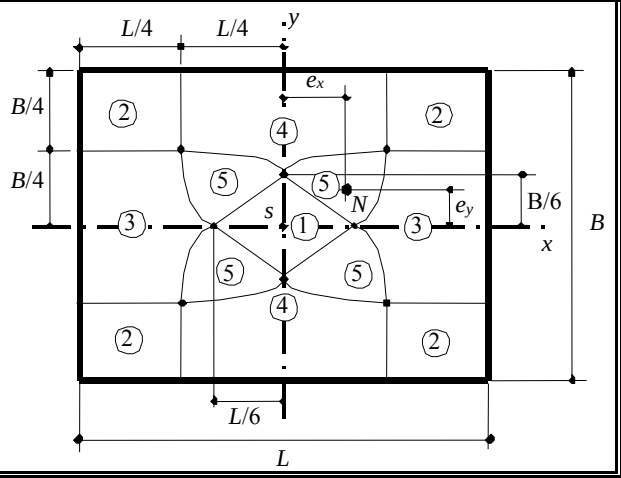
Datei	Inhalt	Grundriss, Lasten, Untergrund, ... usw.
fc1	Einzellast (lineare Berechnung)	
fcn	Einzellast (nichtlineare Berechnung)	
fu1	Flächenlast (lineare Berechnung)	
fun	Flächenlast (nichtlineare Berechnung)	



Beispiel 7.2 Nichtlineare Berechnung beim ausmittig belasteten Rechteckfundament

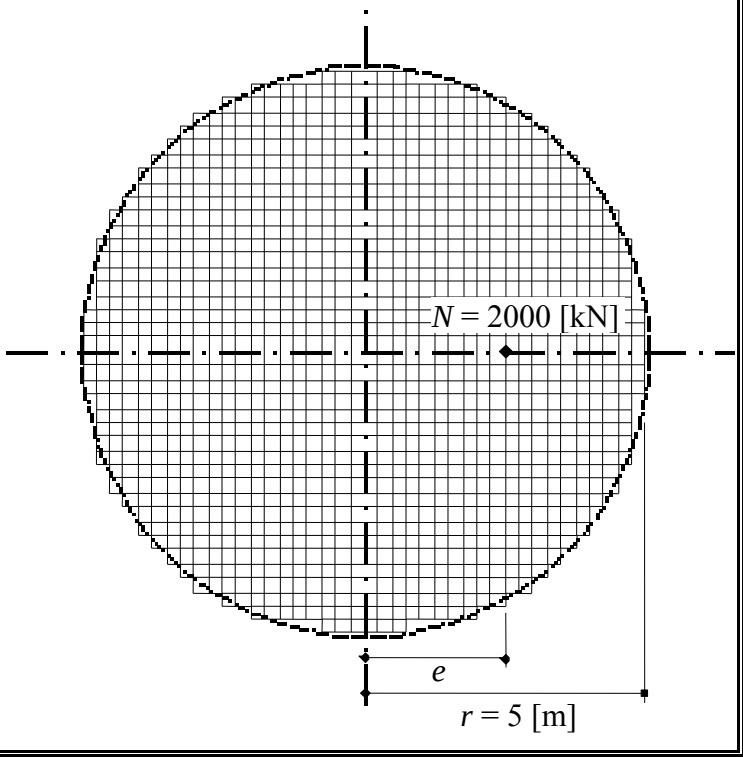
Datei	Inhalt	Grundriss, Lasten, Untergrund, ... usw.

rz2	Zone (2)
rz3	Zone (3)
rz4	Zone (4)
rz5	Zone (5)



Beispiel 7.3 Nichtlineare Berechnung beim ausmittig belasteten Kreisfundament

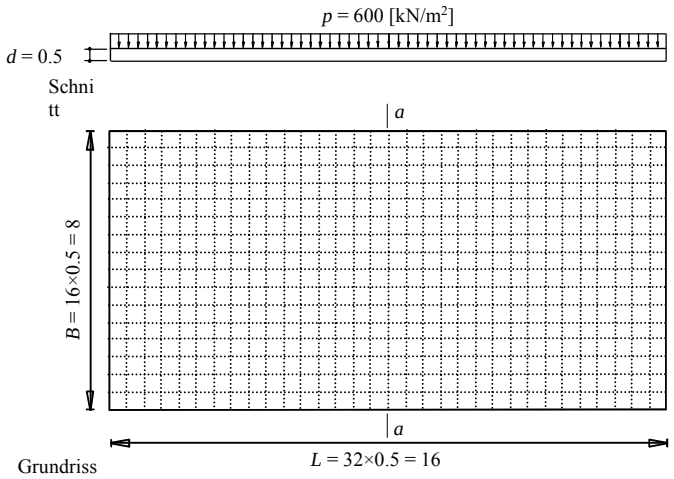
Datei	Inhalt	Grundriss, Lasten, Untergrund, ... usw.
Cir-e=1.75	e = 1.75 [m]	
Cir-e=2.00	e = 2.00 [m]	
Cir-e=2.25	e = 2.25 [m]	
Cir-e=2.50	e = 2.50 [m]	
Cir-e=2.75	e = 2.75 [m]	
Cir-e=3.00	e = 3.00 [m]	
Cir-e=3.25	e = 3.25 [m]	
Cir-e=3.50	e = 3.50 [m]	
Cir-e=3.75	e = 3.75 [m]	



Beispiel 7.4 Elastoplastische Berechnung einer Platte nach dem Steifemodulverfahren

Datei	Inhalt	Grundriss, Lasten, Untergrund, ... usw.

lin	lineare Berechnung
non	nichtlineare Berechnung



Abschnitt 10

Literatur

Ahrens, H./ Winselmann, D. (1984): Eine iterative Berechnung von Flächengründungen nach

dem Steifemodulverfahren. Finite Elemente Anwendungen in der Baupraxis
Verlag W. Ernst & Sohn, München

Amann, P./ H. Breth (1972): Setzungsverhalten der Böden nach Messungen unter einem Frankfurter Hochhaus
Vorträge der Baugrundtagung Stuttgart

El Arabi, I./ El Gendy, M. (2001): On the Optimum Design of Foundation Systems
Suez Canal University, Faculty of Engineering, Port-Said
Port-Said Engineering Research Journal, November 2001

Azzouz, A./ Krizek, R./ Corotis, R. (1976): Regression Analysis of Soil Compressibility
Soil and foundations, Tokyo, vol. 16, no. 2, pp. 19-29

Bakhoum, A. (1986): An Investigation on the Analysis of Raft-Soil Interaction
M.Sc. Thesis, Cairo University, Egypt

Baz, M. (1987): Plates on Nonlinear Subgrade
M. Sc. Thesis, El Mansoura University, Faculty of Engineering, Egypt

Bazaraa, A./ Ghabrial, N./ Henedy, E. (1997): Effect of Boundary Retaining Walls on Raft Behaviour
The Third International Geotechnical Engineering Conference, Cairo University, Egypt

Bazaraa, A./ Shaheen, H./ Sabry, A./ Krem, A. (1991): Analysis of Tie-Beams Connecting Isolated Footing Resting on Soil
Proceeding of Fourth Arab Structural Engineering Conference, Cairo University, Egypt

El Behairy, S. (1992): Reinforced concrete design book
Ain Shams University, Cairo, Egypt

Beton-Kalender (1957)
Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin/ München/ Düsseldorf

Biedermann, B. (1981): Der Einfluß plastischer Verformungen auf die Sohldruckverteilung
FBG, Dissertation, Heft 7, Technische Hochschule Aachen

Bobe, R./ Hertwig, G./ Seiffert H. (1981): Computing Foundation Slabs with Building Rigidity
Proc. Xth Intern. Conf. on Soil Mech. and Found. Engineering, Stockholm, 5/ 8, pp. 53-56

Borowicka, H. (1939): Druckverteilung unter elastischen Platten
Ingenieur-Archiv, Band 10, S. 113-125

Boussinesq, J. (1885): Applications des Potentiels a l'Etude de l'Equilibre et du Mouvement des Solides Elastiques
Gauthier-Villars, Paris

Bowles, J. E. (1974): Analytical and Computer Methods in Foundation Engineering
McGraw-Hill, New York

Bowles, J. (1977): Foundation analysis and design
McGraw-Hill, New York

Brown, P./ Yu, K. (1986): Load sequence and structure foundation interaction
J. Struct. Div. ASCE 112, 481-488

Cheung, M. (1978): A Simplified Finite Element Solution for the Plate on Elastic Foundation
Computers and Structures, Vol. 8, pp. 139-145, Pergamon

Cheung, Y./ Zienkiewicz, O. (1965): Plates and Tanks on Elastic Foundations - an Application of Finite Element Method
International Journal of Solids Structures Vol. 1, pp. 451-461, Pergamon

Cheung, Y./ Nag, D. (1968): Plates and Beams on Elastic Foundation - Linear and Non-Linear Behaviour
Géotechnique Vol. 18, pp. 250-260, London

Dememeghi, A. (1981): Analysis of Soil-Structure Interaction
Proc. Xth Intern. Conf. on Soil Mech. and Found. Engineering, Stockholm, 5/ 8, pp. 95-98

Deninger, A. (1964): Ein Verfahren zur Berechnung biegsamer und durch Wandscheiben ausgesteifter rechteckiger Gründungsplatten
Dissertation, Karlsruhe

Dimitrov, N. (1977): Festigkeitslehre
Beton-Kalender, Teil I, S. 425-532
Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin/ München/ Düsseldorf

DIN 4017 Teil 1 (1979): Baugrund. Grundbruchberechnungen von lotrecht mittig belasteten Flachgründungen. Ausgabe August 1979
Beuth-Verlag GmbH, Berlin

DIN 4018 (1974): Baugrund. Berechnung der Sohldruckverteilung unter Flächengründungen (mit Beiblatt 1: Erläuterungen und Berechnungsbeispiele)
Beuth-Verlag GmbH, Berlin

DIN 4019, Blatt 1 (1974): Baugrund. Setzungsberechnungen bei lotrechter, mittiger Belastung
Neufassung DIN V 4019-100 (1996). Mit Beiblatt
Beuth-Verlag GmbH, Berlin

DIN 18314 (1976): Baugrund. Untersuchung von Böden, Plattendruckversuch
Beuth-Verlag, Berlin/ Köln

EAU (1990): Empfehlungen des Arbeitsausschusses Ufereinfassungen, Seite 10
Berlin/ München/ Düsseldorf

ECP 464 (1989): The Egyptian Code of Practice, Design and Construction of Reinforced Concrete Structures (in Arabic)

ECP 196 (1995): Egyptian Code for Soil Mechanics, Design and Construction of Foundations Part 3, Shallow Foundations (in Arabic)

Ellner, A./ Kany, M. (1976): Berücksichtigung der aussteifenden Wirkung von Kellermauern und Decken bei der Berechnung von Sohlplatten mit der FE-Methode
Forschungsbericht Ka 282/6 an die *DFG*, Nürnberg

Empfehlungen EVB (1993): Verformungen des Baugrunds bei baulichen Anlagen -
Erarbeitet durch den Arbeitskreis "Berechnungsverfahren" der Deutschen Gesellschaft für Erd- und Grundbau e.V.
Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin

EWB (2001): Empfehlung Wechselwirkung Baugrund/ Bauwerk
DIN-Arbeitsausschuß Berechnungsverfahren
Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin

El Gendy, M. (1994): Comparing examinations of the influence of calculation methods of basement slabs
Ph. D. Thesis, Suez Canal University, Egypt

El Gendy, M. (1998): An iteration method for design of slab on elastic foundation
Proceeding of the first International Conference on Civil Engineering, Helewan University, Cairo, Egypt

El Gendy, M. (1998): An Analysis for Determination of Foundation Rigidity
8th International Colloquium on Structural and Geotechnical Engineering
Ain Shams University, Egypt

El Gendy, M. (1999): Effect of Girders on the Raft Rigidity
1st International Conference for Advanced Trends in Engineering
Minia University, Egypt

Gorbunov-Posadov (1959): Tables for Analysis of Thin Plates Resting on Elastic Foundations
Gosstroiizdat, Moscow (in Russian)

Graßhoff, H. (1955): Setzungsberechnungen starrer Fundamente mit Hilfe des kennzeichnenden Punktes
Der Bauingenieur, S. 53-54

Graßhoff, H. (1978): Einflußlinien für Flächengründungen
Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin

Graßhoff, H. (1987): Systemsteifigkeit und Flächengründung
Ber. Nr. 6, Lehrgebiet Grundbau, Bodenmechanik und Unterird. Bauen, Berg. Universität GH Wuppertal

Graßhoff, H./ Kany, M. (1997): Berechnung von Flächengründungen
Grundbautaschenbuch Band 3, 5. Auflage
Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin/ München

Gudehus, G. (1981): Bodenmechanik
Verlag Ferdinand Enke, Stuttgart

Haddadin, M. (1971): Mats and Combined Footings - Analysis by the Finite Element Method
Journal of the American Concrete Institute, Proceed., Vol. 68., pp. 945-949

Hahn, J. (1971): Durchlaufträger, Rahmen, Platten und Balken auf elastischer Bettung
11. Auflage; Werner-Verlag, Düsseldorf

Hain, S./ Lee, I. (1974): Rational Analysis of Raft Foundation
Journal of the Geotechnical Engineering Division, GT, pp. 843-860

Hasnien, M. (1993): Finite Element Analysis of Mat Resting on Nonlinear Elastic Medium
M. Sc. Thesis, Ain Shams University, Faculty of Engineering, Egypt

Haung, Y. (1974): Analysis of Symmetrically Loaded Slab on Elastic Solid
Transportation Engineering Journal of ASCE, Vol. 100 No. TE2, pp. 537-541

Haung, Y. (1974): Finite Element Analysis of Slabs on Elastic Solids
Transportation Engineering Journal of ASCE, Vol. 100 No. TE2, pp. 403-416

Hemsley, J. (1998): Elastic analysis of raft foundations
Tomas Telford, London

Hülsdünker, A. (1964): Maximale Bodenpressung unter rechteckigen Fundamenten bei Belastung mit Momenten in beiden Achsrichtungen
Bautechnik 41, H. 8, S. 269, Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin

Irles, R./ Irles, F. (1994): Explicit Stresses under Rectangular Footings
Journal of Geotechnical Engineering, Vol. 120, No. 2, February 1994, pp. 444-450

Jarquio, R./ Jarquio, V. (1983): Design Footing Area with Biaxial Bending
Journal of Geotechnical Engineering, Vol. 109, No. 10, October 1983, pp. 1337-1341

Jessberger, H./ Yuan, H./ Thaher, M./ Ming-Bao, C. (1992): Superstructure- Foundation-Subsoil Interaction Analysis
Cooperation Research Project, Ruhr-University Bochum, Germany and Tongji University Shanghai, China

El Kadi, F. (1968): Die Statische Berechnung von Gründungsbalken und Gründungsplatten
Mitt. Inst. Verkehrswasserbau, Grundbau und Bodenmechanik der TH Aachen, VGB 42

Kany, M. (1954): Beitrag zur Berechnung von Gründungskörpern auf nachgiebiger Unterlage
Dissertation, Darmstadt

Kany, M. (1959): Berechnung von Flächengründungen, 1. Auflage
Verlag W. Ernst u. Sohn, Berlin

Kany, M. (1963): Sohldrücke und Setzungen der starren Platte
Europ. Baugrundtagung Wiesbaden, S. 401-409. Sonderdruck mit Ergänzungen in Heft 5 der

Veröffentl. des Grundbauinstitutes der LGA Bayern, Nürnberg

Kany, M. (1972): Berechnung von Systemen starrer Fundamentplatten mit beliebigem Grundriß auf ungleich geschichtetem Baugrund
Grundbauinstitut der LGA Bayern, Nürnberg

Kany, M. (1973): Elektronische Berechnung von Fundamentgruppen mit wirtschaftlich optimaler Bemessung
Veröffentl. des Grundbauinstitutes der LGA Bayern, Heft 24, Nürnberg

Kany, M. (1973): Einflüsse von Unregelmäßigkeiten im Baugrund und in der Bauwerksteifigkeit auf die Biegebeanspruchung von Flächengründungen
Grundbauinstitut der LGA Bayern, Nürnberg

Kany, M. (1974): Berechnung von Flächengründungen, 2. Auflage
Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin

Kany, M. (1976): Setzungsberechnung mit Verwendung Druckabhängiger Steifemoduln
Veröffentlichungen des Grundbauinstitutes der Landesgewerbeanstalt Bayern, Heft 24, Einzelbeiträge, Nürnberg

Kany, M. (1976): Berechnung von Systemen elastischer Fundamentplatten auf beliebig geschichtetem Baugrund
Benutzerhandbuch für das Programm *ELPLA*
Programmbibliothek des Grundbauinstitutes der LGA Bayern, Nürnberg

Kany, M. (1976): Berechnung der Sohldrücke und Setzungen von Systemen starrer Sohlplatten nach dem Steifemodulverfahren von *Kany*
Benutzerhandbuch für das Programm *STAPLA*
Programmbibliothek des Grundbauinstitutes der LGA Bayern, Nürnberg

Kany, M. (1977): Method of analysis for structures on settling ground
Proc. IXth Intern. Conf. on Soil Mech. and Found. Engineering, Tokyo

Kany, M. (1980): Berechnung von Gründungsbalken auf beliebig geschichtetem Baugrund
Benutzerhandbuch für das Programm *ELBAL*
Programmbibliothek des Grundbauinstitutes der LGA Bayern, Nürnberg

Kany, M./ El Gendy, M. (1995): Computing of beam and slab foundations on three dimensional layered model
Proc. VIth Intern. Conf. on Computing in Civil and Building Engineering, Berlin

Kany, M./ El Gendy, M. (1996): Benutzerhandbuch für das Programm *ELBAL*
Programmserie GEOTEC, Zirndorf
Kany, M./ El Gendy, M. (1997): Analysis of System of Footing Resting on Irregular Soil
Proc. XIVth Intern. Conf. on Soil Mech. and Found. Engineering, Hamburg, Vol. 2, 995-998

Kany, M./ El Gendy, M. (1999): Berechnung von großen Systemen starrer Sohlplatten
Bauingenieur, Band. 74, Nr. 11, Seite 471-478

Kany, M./ El Gendy, M. (2000): Einfluß der Bauwerkssteifigkeit auf das Fundamentsystem
2. Kolloquium Bauen in Boden und Fels, Technische Akademie Esslingen, Ostfildern, Germany

Kany, M./ El Gendy, M. (2007): Benutzerhandbuch für das Programm *ELPLA* 9
Zirndorf, Germany

Kézdi, A. (1964): Bodenmechanik (2 Bände)
VEB-Verlag für Bauwesen, Berlin

Kirschbaum, P. (1970): Nochmals: Ausmittig belastete T-förmige Fundamente
Bautechnik 47, H. 6, S. 214, Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin

Landgraf, K./ Quade, *J.* (1993): Bauwerk-Baugrund Wechselwirkung an biegsamen Gründungsplatten und Platten bis zum Versagen
Zeitschrift Bauingenieur, S. 303

Lee, I./ Harrison H. (1970): Structure and foundation interaction theory
J. Struct. Div. ASCE 96, 177-197

Lee, I./ Brown P. (1972): Structure-Foundation Interaction Analysis
Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, St 11, pp. 2413-2431

Lopes, F./ Gusmão, A. (1991): On the Influence of Soil-Structure Interaction in the Distribution of Foundation Loads and Settlements
Proc. Xth Europ. Conf. on Soil Mech. and Found. Engineering, Florance, pp. 475-478

Matl, F. (1954): Zur Berechnung der Setzungen und Schiefstellungen des exzentrisch belasteten starren Plattenstreifens
Österr. Bauzeitschr., S. 65-70

Meyerhof, G. (1953): Some Recent Foundation Research and its Application to Design
The Structure Engineer, volume 13, pp. 151-167

Meyer, H. (1977): Beitrag zur Berechnung von Gründungsplatten mit Hilfe der Finite-Element-Methode
Bericht-Nr. F 77/2 der Forsch.- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mech.
Techn. Univ. Hannover

Mikhaiel, S. (1978): Soil Structure Interaction in Multi-Story Buildings
Ph.D. Thesis, Cairo University, Egypt

Miklos, E. (1964): Ausmittig gedrückte symmetrische Trapez- und T-Querschnitte bei Ausschluß von Zugspannungen
Bautechnik 41, H. 10, S. 343, Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin

Mohr, O. (1913): Abhandlungen aus dem Gebiet der Technischen Mechanik, II. Auflage, S. 66
Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin

Ohde, J. (1942): Die Berechnung der Sohldruckverteilung unter Gründungskörpern
Der Bauingenieur, Heft 14/16, S. 99-107 - Heft 17/18 S. 122-127

Opladen, K. (1958): Spannungsnachweise bei schiefer Biegung mit und ohne Längskraft in beliebigen Querschnitten
Beton- und Stahlbetonbau 53, H. 11, S. 288

Panayotounakos, D./ Spyropoulos, C./ Prassianakis, J. (1987): Interaction of multi-story and multi-column rigid-jointed frames supported on an elastic foundation under static loading
Computer & Structure, Vol. 26, No. 5, pp. 855-869

Peck, R./ Hanson, W./ Thornburn, T. (1974): Foundation Engineering, 2nd Edition
John Wiley and Sons, New York

Pohl, K. (1918): Zahlentafeln zur Bestimmung der Nullinie und der größten Eckpressung im Rechteckquerschnitt bei Lastangriff außerhalb des Kerns und Ausschluß von Zugspannungen
Eisenbau 9, Nr. 10, S. 211
Auch: Beton-Kalender 1964, Bd. I, S. 194. Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin/ München

Poulos, H. (1975): Settlement Analysis of Structural Foundation Systems
Proc. 4th South-East Asian Regional Conf. on Soil Eng., Kuala Lumpur, Malaysia, pp. 4.52-4.62

Poulos, H./ Davis, E. (1974): Elastic solution for soil and rock mechanics
Wiley, New York/ London/ Sydney/ Toronto

Schultze, E. (1953): Die Berechnung von Gründungsplatten
Arbeiten des AK "Berechnungsverfahren" DGEG-Baugrundtagung Hannover

Schwarz, H. (1984): Methode der finiten Elemente
Teubner-Verlag, Stuttgart

Selvadurai, A. (1979): Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction
Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam/ Oxford/ New York

Selvadurai, A. (1983): Fundamental results concerning the settlement of a rigid foundation on an elastic medium due to an adjacent surface load
International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics
John Wiley & Sons, Ltd

Sherif G./ König G. (1975): Platten und Balken auf nachgiebigem Baugrund
Springer Verlag, Berlin

Simmer, K. (1987): Grundbau 1, 18. Auflage
Verlag Teubner, Stuttgart

Smoltczyk, U./ Netzel, D./ Kany, M. (2001): Flachgründungen
Grundbautaschenbuch Teil 3, 6. Auflage
Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin

Sommer, H. (1972): Bauwerkssteifigkeitsbeitrag aus dem Vergleich gemessener und berechneter

Setzungen eines Hochhauses
Intern. Symposium Dresden. Schriftenreihe der Bauforsch., Reihe Ing.- und Tiefbau 47

Sowjetische Norm I - TU 6-48
(deutschsprachige Quelle: *Kézdi, A.* (1964): Handbuch der Bodenmechanik, Band 2, S. 141)

Stark, R. (1990): Beitrag zur numerischen Behandlung des Kontaktproblems beliebig orthogonal berandeter Fundamentplatten unter Einbeziehung von Grenzzuständen im Boden
Dissertation, Universität Innsbruck

Stark, R./ Majer, J. (1988): Soil-structure interaction - A possibility for elastic-plastic calculation of foundation slabs
Numerical Methods in Geomechanics, volume 2, pp. 1135-1141, Innsbruck

Steinbrenner, W. (1934): Tafeln zur Setzungsberechnung
Straße, S. 121-124

Szechy, D. (1965): Der Grundbau (3 Teile)
Springer-Verlag, Wien - New York

Teng, W. (1962): Foundation Design
Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J., U.S.A

Terzaghi, K./ Peck, R. (1967): Soil Mechanics in Engineering Practice, 2nd Edition
Wiley, New York

Türke, H. (1990): Statik im Erdbau, 2. Auflage
Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin

Winkler, E. (1867): Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit
Dominicus, Prag

Wölfer, K. (1978): Elastisch gebettete Balken und Platten. Zylinderschalen
Bauverlag, Wiesbaden, Berlin

Zienkiewicz, O./ Cheung, Y. (1970): The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics
McGraw-Hill, England

Zilch, K. (1993): Verfahren für die Berechnung der Interaktion von Baugrund und Bauwerk
Der Prüfingenieur, Heft 3